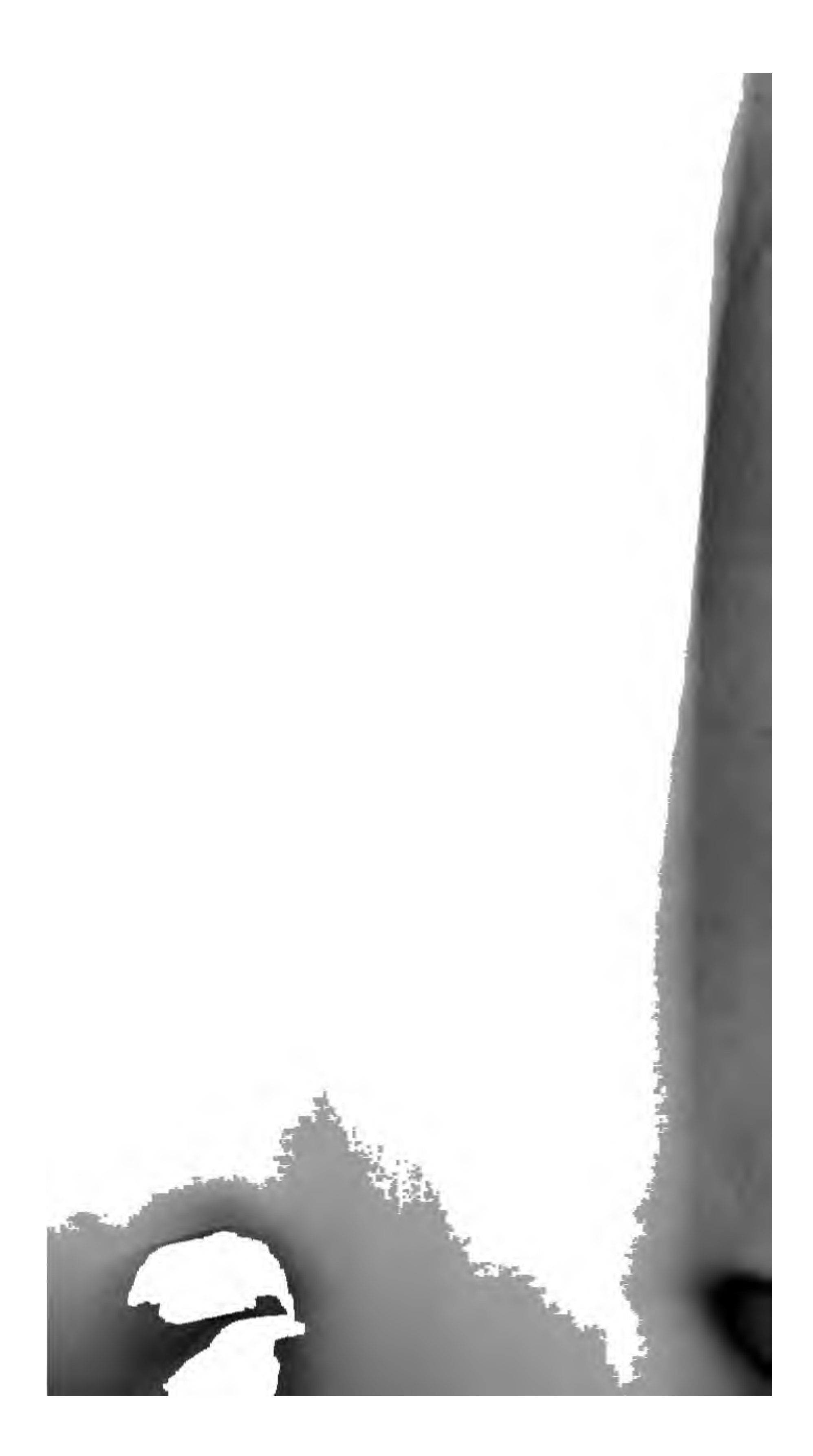






Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,

Professor zu Greifswald.

Vierundvierzigster Theil.

Mit neun Figurentafeln.

Greifswald.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

Th. Kunike.

1865.

Inhaltsverzeichniss des vierundvierzigsten Theils.

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	Geschichte der Mathematik und Physik.		
XXIII.	Handschriftlicher Fund aus der Thorner Gymnasial-Bibliothek. Von dem Lehrer Herrn M. Curtze am Gymnasium zu Thorn	III.	371
XXVIII.	Weiteres über den handschriftlichen Fund aus der Thorner Gymnasial-Bibliothek. Von dem Lehrer Herrn M. Curtze am Gymnasium zu Thorn	IV.	501
	Arithmetik.		
I.	Ueber die Beurtheilung der Wurzeln einer vorgelegten cubischen Gleichung. (Dritte Abtheilung, als Fortsetz. der Abhandlungen Thl. XLI., No. VI. und Thl. XLII., No. XVI.). Von Herrn Ferdinand Kerz, Major in dem Grossherzogl. Hessischen Gendarmerie-Corps in Darmstadt	I.	1
II.	Théorie des équations réciproques par Monsieur Dr. Ad. Vogt à Olpe en Westphalie . .	I.	50
VIII.	Ueber die durch $y=\sqrt[x]{x}$ dargestellte Curve mit zwei Zeichnungen auf Taf. I. Von Herrn Hubert Müller, Lehramts-Candidaten der Mathematik in Freiburg i. B.	I.	128
IX.	Ueber die Beurtheilung der Wurzeln einer vor-		

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	gelegten cubischen Gleichung. (Vierte Abtheilung, als Fortsetzung der Abhandl. Thl. XLIV., No. I.). Von Herrn Ferdinand Kerz, Major in dem Grossherzogl. Hessischen Gendarmerie-Corps in Darmstadt	II.	129
XIX.	Zur Theorie der Determinanten. Von Herrn M. Dietrich, Professor am Realgymnasium in Regensburg	III.	344
XXIII.	Es ist immer:		

$$
\begin{aligned}
&(ab'c''+bc'a''+ca'b''-ac'b''-ba'c''-cb'a'')^2\\
=\;&(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)(a''^2+b''^2+c''^2)\\
&+2(aa'+bb'+cc')(aa''+bb''+cc'')(a'a''+b'b''+c'c'')\\
&-(a^2+b^2+c^2)(a'a''+b'b''+c'c'')\\
&-(a'^2+b'^2+c'^2)(aa''+bb''+cc'')\\
&-(a''^2+b''^2+c''^2)(aa'+bb'+cc').
\end{aligned}
$$

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	Von dem Herausgeber	III.	374
XXIV.	Ueber die Beurtheilung der Wurzeln einer vorgelegten cubischen Gleichung. (Fünfte Abtheilung, als Fortsetzung der Abhandl. Thl. XLIV. Nr. IX.). Von Herrn Ferdinand Kerz, Major in dem Grossherzogl. Hessischen Gendarmerie-Corps in Darmstadt	IV.	379
XXVI.	Theorie der Aequivalenzen. Von dem Herausgeber	IV.	443
XXVII.	Neuer Beweis eines wichtigen und merkwürdigen arithmetischen Satzes. Von dem Herausgeber	IV.	478
XXVIII.	Zwei Briefe von Schumacher und Gauss über eine Aufgabe der unbestimmten Analysis. (Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und H. C. Schumacher. Herausgegeben von C. A. F. Peters. Fünfter Band. Altona. 1863. S. 375.) . . .	IV.	504

Geometrie.

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
III.	Ueber die Quadratur des Zirkels. Von Herrn Dr. Hermann Scheffler in Braunschweig	I.	84
V.	Beweis des in Thl. XLII. S. 354 mitgetheilten		

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	Beltrami'schen Satzes. Von Herrn C. Struve, ordentlichem Lehrer an der königl. Realschule in Fraustadt	I.	119
VI.	Ein anderer rein geometrischer Beweis des Beltrami'schen Satzes vom Schwerpunkte der Centra der Berührungskreise eines Dreiecks. Von Herrn Carl Schmidt in Spremberg . . .	I.	120
VII.	Ueber ein System parallelachsiger Rotationsflächen zweiter Ordnung, welche eine gemeinschaftliche Schnittcurve besitzen. Von Herrn Heinrich Gretschel, Lehrer der Mathematik an der Handelslehranstalt in Leipzig . .	I.	124
XI.	Der excentrische Kreis für die Hyperbel. Von Herrn C. Struve, ordentlichem Lehrer an der königl. Realschule in Fraustadt	II.	196
XII.	Analytisch-geometrische Parallelen. Von Herrn M. Dietrich, Professor am Realgymnasium in Regensburg	II.	200
XVI.	Elementarer Beweis des Beltrami'schen Satzes. Von Herrn Oberlehrer Dr. W. Stammer in Düsseldorf	III.	335
XXI.	Geometrischer Ort der Mittelpunkte aller durch einen festen Punkt gehenden Sehnen eines Kegelschnitts. Von Herrn Jos. Braun, Lehrer am Ryffel'schen Institut in Stäfa (Zürichsee)	III.	358
XXIII.	Ueber die Berechnung eines Kreisabschnitts. Von dem Herausgeber	III.	363
XXIII.	Analytische Bedingungsgleichung, dass vier Punkte in einem Kreise liegen. Von dem Herausgeber	III.	376
XXV.	Der pythagoräische Lehrsatz in der Sphärik. Von Herrn Jos. Eilles in München . . .	IV.	440

Trigonometrie.

XXIII. Summirung der Reihe

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{1}}{1}, \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{2}, \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{4}}{4}, \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{8}}{8}, \ldots$$

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	Nach einer Mittheilung des Herrn Dr. Paul Escher in Wien	III.	374

Geodäsie.

X.	Ueber die Pothenot'sche Aufgabe. Von dem Herausgeber . . . , ...	II.	184
XVII.	Trunk's Planimeter. Von Herrn A. Hübner in Halle	III.	337
XXII.	On two new forms of Heliotrope. By W. H. Miller, M. A., For. Sec. R. S., Professor of Mineralogy in the University of Cambridge	III.	361

Mechanik.

XIII.	Die Trägheitsmomente geradkantiger, krummkantiger und gewundener Prismen und Pyramiden. Von Herrn Dr. Eduard Zetzsche, Lehrer an der königlichen höhern Gewerbschule in Chemnitz	II.	227
XVIII.	Ueber die Anwendung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten zur Bestimmung der Gleichgewichtsbedingungen eines Systems unveränderlich mit einander verbundener Punkte, auf deren jeden eine Kraft wirkt. Von Herrn Doctor Hartwig, Lehrer am Grossherzogl. Mecklenburgischen Gymnasium in Schwerin	III.	340
XX.	Ueber die Schwere an der Oberfläche eines gleichförmig dichten, durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleinere Axe erzeugten Rotationssphäroides. Von Herrn Dr. Karl Friesach, k. k. Hauptmann in der Armee in Wien	III.	355

Astronomie.

XIV.	Ueber die Berücksichtigung des Fehlers, welcher bei Berechnung der Auf- und Untergänge der Sonne und des Mondes dadurch entsteht,		

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	dass der zuerst auf- oder untergehende Punkt des Randes des Gestirns nicht genau die in den Ephemeriden angegebene Declination des Mittelpunkts desselben hat. Von Herrn Doctor D. K. Kokides, Adjunct bei der Sternwarte in Athen	II.	255
XV.	Neue Entwickelung der Grundformeln der sphärischen Astronomie mit völliger Beseitigung jeder eigentlichen Parallaxen-Rechnung und mit verschiedenen Anwendungen. Von dem Herausgeber	III.	269
XX.	Ueber die Schwere an der Oberfläche eines gleichförmig dichten, durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleinere Axe erzeugten Rotationssphäroides. Von Herrn Dr. Karl Friesach, k. k. Hauptmann in der Armee in Wien	III.	355

Physik.

IV.	Ueber Wasserhosen und über Duftanhang und Hagel. Von dem Herrn Grafen L. v. Pfeil auf Hausdorf bei Neurode in Schlesien	I.	113

Literarische Berichte *).

CLXXIII.	I.	1
CLXXIV.	II.	1
CLXXV.	III.	1
CLXXVI.	IV.	1

*) Jede einzelne Nummer der Literarischen Berichte ist für sich besonders paginirt von Seite 1 an.



I.

Ueber die Beurtheilung der Wurzeln einer vorgelegten cubischen Gleichung.

Dritte Abtheilung, als Fortsetzung der Abhandlungen Thl. XLI, No. VI. und Thl. XLII, No. XVI.

Von

Herrn *Ferdinand Kerz*,

Major in dem Grossherzogl. Hessischen Gendarmerie-Corps in Darmstadt.

91.

Ist

1) $$0 = a + by + cy^2 + y^3$$

die gegebene cubische Gleichung und setzt man in [8. 1)]

2) $$\mathfrak{a} = \tfrac{1}{3}c, \quad \text{also auch:} \quad w = \tfrac{1}{3}c \qquad [4.3)];$$

so sind die drei Wurzeln:

3) $$-\tfrac{1}{3}c, \quad -\tfrac{1}{3}c - \tfrac{1}{3}\sqrt{3c^2 - 9b}, \quad -\tfrac{1}{3}c + \tfrac{1}{3}\sqrt{3c^2 - 9b};$$

und da das Produkt dieser drei Wurzeln, mit entgegengesetzten Zeichen genommen, gleich a sein muss, so erhält man als Bedingung hierfür:

4) $$27a = 9bc - 2c^3.$$

Ist

5) $$c^2 < 3b, \quad \text{also auch} \quad 3c^2 < 9b,$$

so sind die drei Wurzeln:

6) $$-\tfrac{1}{3}c, \quad -\tfrac{1}{3}c - \tfrac{1}{3}\sqrt{9b - 3c^2}.\sqrt{-1}, \quad -\tfrac{1}{3}c + \tfrac{1}{3}\sqrt{9b - 3c^2}.\sqrt{-1}.$$

92.

Schreibt man für die gegebene Gleichung [91. 1)]

1) $$0 = 27a + 9b(3y) + 3c(3y)^2 + (3y)^3,$$

so ist, wenn die Bedingung [91. 4)] stattfindet,

2) $$+c + (3y)$$

genau ein Faktor dieser Gleichung.

Ist aber

3) $$27a \lessgtr 9bc - 2c^3$$

und setzt man

4) $$a = q \mp r,$$

indem man q so wählt, dass

5) $$27q = 9bc - 2c^3$$

ist, (also auch r eine bekannte Grösse ausdrückt), so sei:

6) $$(3y) = -c \pm p,$$

in welchem Falle p eine noch zu bestimmende Grösse bezeicl

In diesem Falle muss

7) $$+c \mp p + (3y)$$

genau ein Faktor der Gleichung 1) sein.

93.

Wenn man nun die Gleichung [92. 1)] in Bezug auf den pothetischen Faktor [92. 7)] zerlegt, so ergiebt sich, indem nach fallenden Potenzen ordnet:

1)

$$0 = (3y)^3 + 3c(3y)^2 + 9b(3y) + 27a$$
$$= (3y)^3 + [c \mp p](3y)^2 + [2c \pm p](3y)^2 + [2c^2 \mp cp - p^2](3y$$
$$+ [9b - 2c^2 \pm cp + p^2](3y) + [9bc - 2c^3 \mp (9b - 3c^2)p \mp p^3$$

Da nun nach [92. 3) — 5)]

$$2)\qquad 27(q\mp r)=[9bc-2c^3\mp(9b-3c^2)p\mp p^3]$$

sein muss; so folgt, im Hinblicke auf [92. 5)] alsbald:

$$3)\qquad 27(\mp r)=\mp(9b-3c^2)p\mp p^3$$

oder

$$4)\qquad \mp\frac{27r}{(9b-3c^2)^{\frac{3}{2}}}=\mp\left[\frac{p}{(9b-3c^2)^{\frac{1}{2}}}\right]\mp\left[\frac{p}{(9b-3c^2)^{\frac{1}{2}}}\right]^3.$$

Setzt man:

$$5)\qquad \frac{27r}{(9b-3c^2)^{\frac{3}{2}}}=R,$$

$$6)\qquad p=P(9b-3c^2)^{\frac{1}{2}},$$

so folgt:

$$\text{III.}\qquad +R=+P+P^3.$$

Es folgt [aus 5) und 6)]:

7) Sollen die Grössen R und p, also auch r und P, reelle Grössen bezeichnen, so muss die Bedingung

$$3c^2<9b \quad\text{oder}\quad c^2<3b \qquad [91.\ 5)]$$

stattfinden und die vorgelegte Gleichung hat eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln. [8. 4)]

Da die Gleichung III. nur zwei veränderliche Grössen, R und P, enthält, so dient sie uns, analog den Gleichungen I. und II. [45.], zur Aufstellung einer Tabelle [96.], welche für auf einander folgende Werthe von R die zugehörigen Werthe von P angiebt, und welche daher für Werthe von R, welche in ihr nicht genau enthalten sind, annähernde Werthe von P, und somit auch von p und y, in Zahlenfällen liefert. Diese Tabelle (III.) hat dieselbe Einrichtung wie die Tabellen I. und II., und sind da, wo sich in Spalte D ein Querstrich vorfindet, die über diesem Querstriche befindlichen Zahlen dem oben eingeschriebenen Werthe von D, die unter demselben befindlichen Zahlen aber dem unten eingeschriebenen Werthe von D anzufügen, eine Einrichtung, die auch schon bei den Tabellen I. und II. hätte zweckmässig stattfinden können.

Zusammenstellung der verschiedenen Fälle, welch sich zur annähernden Bestimmung der reellen Wurz einer vorgelegten cubischen Gleichung $0=a+by+cy^2+$ $c^2<3b$ vorausgesetzt, ergeben.

94.

$0=\pm a+by+cy^2+y^3.$
$+27q=9bc-2c^3$

1)	$\pm a<+q$	$q\mp a=r$	$(3y)=-c+p$
2)	$+a>+q$	$a-q=r$	$-\ -$

95.

$0=\pm a+by-cy^2+y^3.$
$-27q=-9bc+2c^3$

1)	$\pm a>-q$	$q\pm a=r$	$(3y)=+c-p$
2)	$-a<-q$	$a-q=r$	$+\ +$

96.

Tabelle III.

P	R	D = 0,00100	P	R	D = 0,00100
0,000	0,000000000		0,030	0,030027	
		0001			279
0,001	0,001000001		0,031	0,031029791	
		0007			298
0,002	0,002000008		0,032	0,032032768	
		0019			317
0,003	0,003000027		0,033	0,033035937	
		0037			337
0,004	0,004000064		0,034	0,034039304	
		0061			357
0,005	0,005000125		0,035	0,035042875	
		0091			378
0,006	0,006000216		0,036	0,036046656	
		0127			400
0,007	0,007000343		0,037	0,037050653	
		0169			422
0,008	0,008000512		0,038	0,038054872	
		0217			445
0,009	0,009000729		0,039	0,039059319	
		0271			468
0,010	0,010001		0,040	0,040064	
		0331			492
0,011	0,011001331		0,041	0,041068921	
		0397			517
0,012	0,012001728		0,042	0,042074088	
		0469			542
0,013	0,013002197		0,043	0,043079507	
		0547			568
0,014	0,014002744		0,044	0,044085184	
		0631			594
0,015	0,015003375		0,045	0,045091125	
		0721			621
0,016	0,016004096		0,046	0,046097336	
		0817			649
0,017	0,017004913		0,047	0,047103823	
		0919			677
0,018	0,018005832		0,048	0,048110592	
		1027			706
0,019	0,019006859		0,049	0,049117649	
		1141			735
0,020	0,020008		0,050	0,050125	
		126			765
0,021	0,021009261		0,051	0,051132651	
		139			796
0,022	0,022010648		0,052	0,052140608	
		152			827
0,023	0,023012167		0,053	0,053148877	
		166			859
0,024	0,024013824		0,054	0,054157464	
		180			891
0,025	0,025015625		0,055	0,055166375	
		195			924
0,026	0,026017576		0,056	0,056175616	
		211			958
0,027	0,027019683		0,057	0,057185193	
		227			992
0,028	0,028021952		0,058	0,058195112	
		244			027
0,029	0,029024389		0,059	0,059205379	
		261			062
0,030	0,030027		0,060	0,060216	
P	R	D = 0,00100	P	R	D = 0,00101

Tabelle III.

P	R	D = 0,00101	P	R	D = 0,0010
0,060	0,060216	098	0,090	0,090729	2457
0,061	0,061226981	135	0,091	0,091753571	2512
0,062	0,062238328	172	0,092	0,092778688	2567
0,063	0,063250047	200	0,093	0,093804357	2623
0,064	0,064262144	248	0,094	0,094830584	2679
0,065	0,065274625	287	0,095	0,095857375	2736
0,066	0,066287496	327	0,096	0,096884736	2794
0,067	0,067300763	367	0,097	0,097912673	2852
0,068	0,068314432	408	0,098	0,098941192	2911
0,069	0,069328509	449	0,099	0,099970299	2970
0,070	0,070343	491	0,100	0,101	3030
0,071	0,071357911	534	0,101	0,102030301	3091
0,072	0,072373248	577	0,102	0,103061208	3152
0,073	0,073389017	621	0,103	0,104092727	3214
0,074	0,074405224	665	0,104	0,105124864	3276
0,075	0,075421875	710	0,105	0,106157625	3339
0,076	0,076438976	756	0,106	0,107191016	3403
0,077	0,077456533	802	0,107	0,108225043	3467
0,078	0,078474552	849	0,108	0,109259712	3532
0,079	0,079493039	896	0,109	0,110295029	3597
0,080	0,080512	944	0,110	0,111331	3663
0,081	0,081531441	993	0,111	0,112367631	3730
0,082	0,082551368	042	0,112	0,113404928	3797
0,083	0,083571787	092	0,113	0,114442897	3865
0,084	0,084592704	142	0,114	0,115481544	3933
0,085	0,085614125	193	0,115	0,116520875	4002
0,086	0,086636056	245	0,116	0,117560896	4072
0,087	0,087658503	297	0,117	0,118601613	4142
0,088	0,088681472	350	0,118	0,119643032	4213
0,089	0,089704969	403	0,119	0,120685159	4284
0,090	0,090729		0,120	0,121728	
P	R	D = 0,00102	P	R	D = 0,0010

Tabelle III.

P	R	D = 0,0010	P	R	D = 0,0010
0,120	0,121728	4356	0,150	0,153375	680
0,121	0,122771561	4429	0,151	0,154442951	689
0,122	0,123815848	4502	0,152	0,155511808	698
0,123	0,124860867	4576	0,153	0,156581577	707
0,124	0,125906624	4650	0,154	0,157652264	716
0,125	0,126953125	4725	0,155	0,158723875	725
0,126	0,128000376	4801	0,156	0,159796416	735
0,127	0,129048383	4877	0,157	0,160869893	744
0,128	0,130097152	4954	0,158	0,161944312	754
0,129	0,131146689	5031	0,159	0,163019679	763
0,130	0,132197	5109	0,160	0,164096	773
0,131	0,133248091	5188	0,161	0,165173281	782
0,132	0,134299968	5267	0,162	0,166251528	792
0,133	0,135352637	5347	0,163	0,167330747	802
0,134	0,136406104	5427	0,164	0,168410944	812
0,135	0,137460375	5508	0,165	0,169492125	822
0,136	0,138515456	5590	0,166	0,170574296	832
0,137	0,139571353	5672	0,167	0,171657463	842
0,138	0,140628072	5755	0,168	0,172741632	852
0,139	0,141685619	5838	0,169	0,173826809	862
0,140	0,142744	5922	0,170	0,174913	872
0,141	0,143803221	6007	0,171	0,176000211	882
0,142	0,144863288	6092	0,172	0,177088448	893
0,143	0,145924207	6178	0,173	0,178177717	903
0,144	0,146985984	6264	0,174	0,179268024	914
0,145	0,148048625	6351	0,175	0,180359375	924
0,146	0,149112136	6439	0,176	0,181451776	935
0,147	0,150176523	6527	0,177	0,182545233	945
0,148	0,151241792	6616	0,178	0,183639752	956
0,149	0,152307949	6705	0,179	0,184735339	967
0,150	0,153375		0,180	0,185832	
P	R	D = 0,0010	P	R	D = 0,0010

Tabelle III.

P	R	$D = 0{,}0010$	P	R	$D = 0{,}0011$
0,180	0,185832	977	0,210	0,219261	329
0,181	0,186929741	988	0,211	0,220393931	342
0,182	0,188028568	999	0,212	0,221528128	355
0,183	0,189128487	010	0,213	0,222663597	367
0,184	0,190229504	021	0,214	0,223800344	380
0,185	0,191331625	032	0,215	0,224938375	393
0,186	0,192434856	043	0,216	0,226077696	406
0,187	0,193539203	055	0,217	0,227218313	419
0,188	0,194644672	066	0,218	0,228360232	432
0,189	0,195751269	077	0,219	0,229503459	445
0,190	0,196859	089	0,220	0,230648	459
0,191	0,197967871	100	0,221	0,231793861	472
0,192	0,199077888	112	0,222	0,232941048	485
0,193	0,200189057	123	0,223	0,234089567	499
0,194	0,201301384	135	0,224	0,235239424	512
0,195	0,202414875	147	0,225	0,236390625	526
0,196	0,203529536	158	0,226	0,237543176	539
0,197	0,204645373	170	0,227	0,238697083	553
0,198	0,205762392	182	0,228	0,239852352	566
0,199	0,206880599	194	0,229	0,241008989	580
0,200	0,208	206	0,230	0,242167	594
0,201	0,209120601	218	0,231	0,243326391	608
0,202	0,210242408	230	0,232	0,244487168	622
0,203	0,211365427	242	0,233	0,245649337	636
0,204	0,212489664	255	0,234	0,246812904	650
0,205	0,213615125	267	0,235	0,247977875	664
0,206	0,214741816	279	0,236	0,249144256	678
0,207	0,215869743	292	0,237	0,250312053	692
0,208	0,216998912	304	0,238	0,251481272	706
0,209	0,218129329	317	0,239	0,252651919	721
0,210	0,219261		0,240	0,253824	
P	R	$D = 0{,}0011$	P	R	$D = 0{,}0011$

Tabelle III.

P	R	D=0,0011	P	R	D=0,0012
0,240	0,253824	735	0,270	0,289683	195
0,241	0,254997521	750	0,271	0,290902511	211
0,242	0,256172488	764	0,272	0,292123648	228
0,243	0,257348907	779	0,273	0,293346417	244
0,244	0,258526784	793	0,274	0,294570824	261
0,245	0,259706125	808	0,275	0,295796875	277
0,246	0,260886936	823	0,276	0,297024576	294
0,247	0,262069223	838	0,277	0,298253933	310
0,248	0,263252992	853	0,278	0,299484952	327
0,249	0,264438249	868	0,279	0,300717639	344
0,250	0,265625	883	0,280	0,301952	360
0,251	0,266813251	898	0,281	0,303188041	377
0,252	0,268003008	913	0,282	0,304425768	394
0,253	0,269194277	928	0,283	0,305665187	411
0,254	0,270387064	943	0,284	0,306906304	428
0,255	0,271581375	958	0,285	0,308149125	445
0,256	0,272777216	974	0,286	0,309393656	462
0,257	0,273974593	989	0,287	0,310639903	480
0,258	0,275173512	005	0,288	0,311887872	497
0,259	0,276373979	020	0,289	0,313137569	514
0,260	0,277576	036	0,290	0,314389	532
0,261	0,278779581	051	0,291	0,315642171	549
0,262	0,279984728	067	0,292	0,316897088	567
0,263	0,281191447	083	0,293	0,318153757	584
0,264	0,282399744	099	0,294	0,319412184	602
0,265	0,283609625	115	0,295	0,320672375	620
0,266	0,284821096	131	0,296	0,321934336	637
0,267	0,286034163	147	0,297	0,323198073	655
0,268	0,287248832	163	0,298	0,324463592	673
0,269	0,288465109	179	0,299	0,325730899	691
0,270	0,289683		0,300	0,327	
P	R	D=0,0012	P	R	D=0,0012

Tabelle III.

P	R	D=0,0012	P	R	D=0,0013
0,300	0,327	709	0,330	0,365937	277
0,301	0,328270901	727	0,331	0,367264691	297
0,302	0,329543608	745	0,332	0,368594368	317
0,303	0,330818127	763	0,333	0,369926037	337
0,304	0,332094464	782	0,334	0,371259704	357
0,305	0,333372625	800	0,335	0,372595375	377
0,306	0,334652616	818	0,336	0,37[illegible]33056	397
0,307	0,335934443	837	0,337	0,375272753	417
0,308	0,337218112	855	0,338	0,376614472	437
0,309	0,338503629	874	0,339	0,377958219	458
0,310	0,339791	892	0,340	0,379304	478
0,311	0,341080231	911	0,341	0,380651821	499
0,312	0,342371328	930	0,342	0,382001688	519
0,313	0,343664297	948	0,343	0,383353607	540
0,314	0,344959144	967	0,344	0,384707584	560
0,315	0,346255875	986	0,345	0,386063625	581
0,316	0,347554496	005	0,346	0,387421736	602
0,317	0,348855013	024	0,347	0,388781923	623
0,318	0,350157432	043	0,348	0,390144192	644
0,319	0,351461759	062	0,349	0,391508549	665
0,320	0,352768	082	0,350	0,392875	686
0,321	0,354076161	101	0,351	0,394243551	707
0,322	0,355386248	120	0,352	0,395614208	728
0,323	0,356698267	140	0,353	0,396986977	749
0,324	0,358012224	160	0,354	0,398361864	770
0,325	0,359328125	179	0,355	0,399738875	791
0,326	0,360645976	198	0,356	0,401118016	813
0,327	0,361965783	218	0,357	0,402499293	834
0,328	0,363287552	237	0,358	0,403882712	856
0,329	0,364611289	257	0,359	0,405268279	877
0,330	0,365937		0,360	0,406656	
P	R	D=0,0013	P	R	D=0,0013

Tabelle III.

P	R	$D=0{,}0013$	P	R	$D=0{,}0014$
0,360	0,406656	899	0,390	0,449319	575
0,361	0,408045881	920	0,391	0,450776471	598
0,362	0,409437928	942	0,392	0,452236288	622
0,363	0,410832147	964	0,393	0,453698457	645
0,364	0,412228544	986	0,394	0,455162984	669
0,365	0,413627125	008	0,395	0,456629875	693
0,366	0,415027896	030	0,396	0,458099136	716
0,367	0,416430863	052	0,397	0,459570773	740
0,368	0,417836032	074	0,398	0,461044792	764
0,369	0,419243409	096	0,399	0,462521199	788
0,370	0,420653	118	0,400	0,464	812
0,371	0,422064811	140	0,401	0,465481201	836
0,372	0,423478848	163	0,402	0,466964808	860
0,373	0,424895117	185	0,403	0,468450827	884
0,374	0,426313624	208	0,404	0,469939264	909
0,375	0,427734375	230	0,405	0,471430125	933
0,376	0,429157376	253	0,406	0,472923416	957
0,377	0,430582633	275	0,407	0,474419143	982
0,378	0,432010152	298	0,408	0,475917312	006
0,379	0,433439939	321	0,409	0,477417929	031
0,380	0,434872	343	0,410	0,478921	055
0,381	0,436306341	366	0,411	0,480426531	080
0,382	0,437742968	389	0,412	0,481934528	105
0,383	0,439181887	412	0,413	0,483444997	129
0,384	0,440623104	435	0,414	0,484957944	154
0,385	0,442066625	458	0,415	0,486473375	179
0,386	0,443512456	481	0,416	0,487991296	204
0,387	0,444960603	505	0,417	0,489511713	229
0,388	0,446411072	528	0,418	0,491034632	354
0,389	0,447863869	551	0,419	0,492560059	279
0,390	0,449319		0,420	0,494088	
P	R	$D=0{,}0014$	P	R	$D=0{,}0015$

Tabelle III.

P	R	D = 0,0015	P	R	D = 0,0016
0,420	0,494088	305	0,450	0,541125	089
0,421	0,495618461	330	0,451	0,542733851	116
0,422	0,497151448	355	0,452	0,544345408	143
0,423	0,498686967	381	0,453	0,545959677	170
0,424	0,500225024	406	0,454	0,547576664	197
0,425	0,501765625	432	0,455	0,549196375	224
0,426	0,503308776	457	0,456	0,550818816	252
0,427	0,504854483	483	0,457	0,552443993	279
0,428	0,506402752	508	0,458	0,554071912	307
0,429	0,507953589	534	0,459	0,555702579	334
0,430	0,509507	560	0,460	0,557336	362
0,431	0,511062991	586	0,461	0,558972181	389
0,432	0,512621568	612	0,462	0,560611128	417
0,433	0,514182737	638	0,463	0,562252847	445
0,434	0,515746504	664	0,464	0,563897344	473
0,435	0,517312875	690	0,465	0,565544625	501
0,436	0,518881856	716	0,466	0,567194696	529
0,437	0,520453453	742	0,467	0,568847563	557
0,438	0,522027672	768	0,468	0,570503232	585
0,439	0,523604519	795	0,469	0,572161709	613
0,440	0,525184	821	0,470	0,573823	641
0,441	0,526766121	848	0,471	0,575487111	669
0,442	0,528350888	874	0,472	0,577154048	698
0,443	0,529938307	901	0,473	0,578823817	726
0,444	0,531528384	927	0,474	0,580496424	755
0,445	0,533121125	953	0,475	0,582171875	783
0,446	0,534716536	981	0,476	0,583850176	812
0,447	0,536314623	008	0,477	0,585531333	840
0,448	0,537915392	035	0,478	0,587215352	869
0,449	0,539518849	062	0,479	0,588902239	898
0,450	0,541125		0,480	0,590592	
P	R	D = 0,0016	P	R	D = 0,0016

Tabelle III.

P	R	D = 0,0016	P	R	D = 0,0017
0,480	0,590592	925	0,510	0,642651	818
0,481	0,592284641	955	0,511	0,644432831	849
0,482	0,593980168	984	0,512	0,646217728	880
0,483	0,595678587	013	0,513	0,648005697	910
0,484	0,597379904	042	0,514	0,649796744	941
0,485	0,599084125	071	0,515	0,651590875	972
0,486	0,600791256	100	0,516	0,653388096	003
0,487	0,602501303	130	0,517	0,655188413	034
0,488	0,604214272	159	0,518	0,656991832	065
0,489	0,605930169	188	0,519	0,658798359	096
0,490	0,607649	218	0,520	0,660608	128
0,491	0,609370771	247	0,521	0,662420761	159
0,492	0,611095488	277	0,522	0,664236648	190
0,493	0,612823157	306	0,523	0,666055667	222
0,494	0,614553784	336	0,524	0,667877824	253
0,495	0,616287375	366	0,525	0,669703125	285
0,496	0,618023936	395	0,526	0,671531576	316
0,497	0,619763473	425	0,527	0,673363183	348
0,498	0,621505992	455	0,528	0,675197952	380
0,499	0,623251499	485	0,529	0,677035889	411
0,500	0,625	515	0,530	0,678877	443
0,501	0,626751501	545	0,531	0,680721291	475
0,502	0,628506008	575	0,532	0,682568768	507
0,503	0,630263527	605	0,533	0,684419437	539
0,504	0,632024064	636	0,534	0,686273304	571
0,505	0,633787625	666	0,535	0,688130375	603
0,506	0,635554216	696	0,536	0,689990656	635
0,507	0,637323843	727	0,537	0,691854153	667
0,508	0,639096512	757	0,538	0,693720872	699
0,509	0,640872229	787	0,539	0,695590819	732
0,510	0,642651		0,540	0,697464	
P	R	D = 0,0017	P	R	D = 0,0018

Tabelle III.

P	R	D = 0,0023	P	R	D = 0,0024
0,660	0,947496	088	0,690	1,018509	304
0,661	0,949804781	127	0,691	1,020939371	345
0,662	0,952117528	167	0,692	1,023373888	387
0,663	0,954434247	207	0,693	1,025812557	428
0,664	0,956754944	247	0,694	1,028255384	470
0,665	0,959079625	287	0,695	1,030702375	512
0,666	0,961408296	327	0,696	1,033153536	553
0,667	0,963740963	367	0,697	1,035608873	594
0,668	0,966077632	407	0,698	1,038068392	637
0,669	0,968418309	447	0,699	1,040532099	679
0,670	0,970763	487	0,700	1,043	721
0,671	0,973111711	527	0,701	1,045472101	763
0,672	0,975464448	568	0,702	1,047948408	805
0,673	0,977821217	608	0,703	1,050428927	847
0,674	0,980182024	649	0,704	1,052913664	890
0,675	0,982546875	689	0,705	1,055402625	932
0,676	0,984915776	730	0,706	1,057895816	974
0,677	0,987288733	770	0,707	1,060393243	017
0,678	0,989665752	811	0,708	1,062894912	059
0,679	0,992046839	852	0,709	1,065400829	102
0,680	0,994432	892	0,710	1,067911	144
0,681	0,996821241	933	0,711	1,070425431	187
0,682	0,999214568	974	0,712	1,072944128	230
0,683	1,001611987	015	0,713	1,075467097	272
0,684	1,004013504	056	0,714	1,077994344	315
0,685	1,006419125	097	0,715	1,080525875	358
0,686	1,008828856	138	0,716	1,083061696	401
0,687	1,011242703	180	0,717	1,085601813	444
0,688	1,013660672	221	0,718	1,088146232	487
0,689	1,016082769	262	0,719	1,090694959	530
0,690	1,018509		0,720	1,093248	
P	R	D = 0,0024	P	R	D = 0,0025

Tabelle III.

P	*R*	*D* = 0,0025	*P*	*R*	*D* = 0,002
0,720	1,093248	574	0,750	1,171875	6898
0,721	1,095805361	617	0,751	1,174564751	6943
0,722	1,098367048	660	0,752	1,177259008	6988
0,723	1,100933067	704	0,753	1,179957777	7033
0,724	1,103503424	747	0,754	1,182661064	7078
0,725	1,106078125	791	0,755	1,185368875	7123
0,726	1,108657176	834	0,756	1,188081216	7169
0,727	1,111240583	878	0,757	1,190798093	7214
0,728	1,113828352	921	0,758	1,193519512	7260
0,729	1,116420489	965	0,759	1,196245479	7305
0,730	1,119017	009	0,760	1,198976	7351
0,731	1,121617891	053	0,761	1,201711081	7396
0,732	1,124223168	097	0,762	1,204450728	7442
0,733	1,126832837	141	0,763	1,207194947	7488
0,734	1,129446904	185	0,764	1,209943744	7534
0,735	1,132065375	229	0,765	1,212697125	7580
0,736	1,134688256	273	0,766	1,215455096	7626
0,737	1,137315553	317	0,767	1,218217663	7672
0,738	1,139947272	361	0,768	1,220984832	7718
0,739	1,142583419	406	0,769	1,223756609	7764
0,740	1,145224	450	0,770	1,226533	7810
0,741	1,147869021	495	0,771	1,229314011	7856
0,742	1,150518488	539	0,772	1,232099648	7903
0,743	1,153172407	584	0,773	1,234889917	7949
0,744	1,155830784	628	0,774	1,237684824	7996
0,745	1,158493625	673	0,775	1,240484375	8042
0,746	1,161160936	718	0,776	1,243288576	8089
0,747	1,163832723	763	0,777	1,246097433	8135
0,748	1,166508992	808	0,778	1,248910952	8182
0,749	1,169189749	853	0,779	1,251729139	8229
0,750	1,171875		0,780	1,254552	
P	*R*	*D* = 0,0026	*P*	*R*	*D* = 0,002

Tabelle III.

P	R	D = 0,0028	P	R	D = 0,002
0,780	1,254552	275	0,810	1,341441	9707
0,781	1,257379541	322	0,811	1,344411731	9756
0,782	1,260211768	369	0,812	1,347387328	9805
0,783	1,263048687	416	0,813	1,350367797	9853
0,784	1,265890304	463	0,814	1,353353144	9902
0,785	1,268736625	510	0,815	1,356343375	9951
0,786	1,271587656	557	0,816	1,359338496	0000
0,787	1,274443403	605	0,817	1,362338513	0049
0,788	1,277303872	652	0,818	1,365343432	0098
0,789	1,280169069	699	0,819	1,368353259	0147
0,790	1,283039	747	0,820	1,371368	0197
0,791	1,285913671	794	0,821	1,374387661	0246
0,792	1,288793088	842	0,822	1,377412248	0295
0,793	1,291677257	889	0,823	1,380441767	0345
0,794	1,294566184	937	0,824	1,383476224	0394
0,795	1,297459875	985	0,825	1,386515625	0444
0,796	1,300358336	032	0,826	1,389559976	0493
0,797	1,303261573	080	0,827	1,392609283	0543
0,798	1,306169592	128	0,828	1,395663552	0592
0,799	1,309082399	176	0,829	1,398722789	0642
0,800	1,312	224	0,830	1,401787	0692
0,801	1,314922401	272	0,831	1,404856191	0742
0,802	1,317849608	320	0,832	1,407930368	0792
0,803	1,320781627	368	0,833	1,411009537	0842
0,804	1,323718464	417	0,834	1,414093704	0892
0,805	1,326660125	465	0,835	1,417182875	0942
0,806	1,329606616	513	0,836	1,420277056	0992
0,807	1,332557943	562	0,837	1,423376253	1042
0,808	1,335514112	610	0,838	1,426480472	1092
0,809	1,338475129	659	0,839	1,429589719	1143
0,810	1,341441		0,840	1,432704	
P	R	D = 0,0029	P	R	D = 0,003

Tabelle III.

R	D = 0,0031	P	R	D = 0,003
,432704	193	0,870	1,528503	2733
,435823321	244	0,871	1,531776311	2785
,438947688	294	0,872	1,535054848	2838
,442077107	345	0,873	1,538338617	2890
,445211584	395	0,874	1,541627624	2943
,448351125	446	0,875	1,544921875	2995
,451495736	497	0,876	1,548221376	3048
,454645423	548	0,877	1,551526133	3100
,457800192	599	0,878	1,554836152	3153
,460960049	650	0,879	1,558151439	3206
,464125	701	0,880	1,561472	3258
,467295051	752	0,881	1,564797841	3311
,470470208	803	0,882	1,568128968	3363
,473650477	854	0,883	1,571465387	3417
,476835864	905	0,884	1,574807104	3470
,480026375	956	0,885	1,578154125	3523
,483222016	008	0,886	1,581506456	3576
,486422793	059	0,887	1,584864103	3630
1,489628712	111	0,888	1,588227072	3683
,492839779	162	0,889	1,591595369	3736
,496056	214	0,890	1,594969	3790
,499277381	265	, 891	1,598347971	3843
,502503928	317	0,892	1,601732288	3897
,505735647	369	0,893	1,605121957	3950
,508972544	421	0,894	1,608516984	4004
,512214625	473	0,895	1,611917375	4058
,515461896	525	0,896	1,615323136	4111
,518714363	577	0,897	1,618734273	4165
,521972032	629	0,898	1,622150792	4219
,525234909	681	0,899	1,625572699	4273
,528503		0,900	1,629	
R	D = 0,0032	P	R	D = 0,003

Tabelle III.

P	R	$D = 0,0034$	P	R	$D = 0,003$
0,900	1,629	327	0,930	1,734357	5975
0,901	1,632432701	381	0,931	1,737954491	6031
0,902	1,635870808	435	0,932	1,741557568	6087
0,903	1,639314327	489	0,933	1,745166237	6143
0,904	1,642763264	544	0,934	1,748780504	6199
0,905	1,646217625	598	0,935	1,752400375	6255
0,906	1,649677416	652	0,936	1,756025856	6311
0,907	1,653142643	707	0,937	1,759656953	6367
0,908	1,656613312	761	0,938	1,763293672	6423
0,909	1,660089429	816	0,939	1,766936019	6450
0,910	1,663571	870	0,940	1,770584	6536
0,911	1,667058031	925	0,941	1,774237621	6593
0,912	1,670550528	980	0,942	1,777896888	6649
0,913	1,674048497	034	0,943	1,781561807	6706
0,914	1,677551944	089	0,944	1,785232384	6762
0,915	1,681060875	144	0,945	1,788908625	6819
0,916	1,684575296	199	0,946	1,792590536	6876
0,917	1,688095213	254	0,947	1,796278123	6933
0,918	1,691620632	309	0,948	1,799971392	6990
0,919	1,695151559	364	0,949	1,803670349	7047
0,920	1,698688	420	0,950	1,807375	7104
0,921	1,702229961	475	0,951	1,811085351	7161
0,922	1,705777448	530	0,952	1,814801408	7218
0,923	1,709330467	586	0,953	1,818523177	7275
0,924	1,712889024	641	0,954	1,822250664	7332
0,925	1,716453125	697	0,955	1,825983875	7389
0,926	1,720022776	752	0,956	1,829722816	7447
0,927	1,723597983	808	0,957	1,833467493	7504
0,928	1,727178752	863	0,958	1,837217912	7562
0,929	1,730765089	919	0,959	1,840974079	7619
0,930	1,734357		0,960	1,844736	
P	R	$D = 0,0035$	P	R	$D = 0,003$

Tabelle III.

R	$D = 0{,}0031$	*P*	*R*	$D = 0{,}003$
,432704	193	0,870	1,528503	2733
,435823321	244	0,871	1,531776311	2785
,438947688	294	0,872	1,535054848	2838
,442077107	345	0,873	1,538338617	2890
,445211584	395	0,874	1,541627624	2943
,448351125	446	0,875	1,544921875	2995
,451495736	497	0,876	1,548221376	3048
,454645423	548	0,877	1,551526133	3100
,457800192	599	0,878	1,554836152	3153
,460960049	650	0,879	1,558151439	3206
,464125	701	0,880	1,561472	3258
,467295051	752	0,881	1,564797841	3311
,470470208	803	0,882	1,568128968	3363
,473650477	854	0,883	1,571465387	3417
,476835864	905	0,884	1,574807104	3470
,480026375	956	0,885	1,578154125	3523
,483222016	008	0,886	1,581506456	3576
,486422793	059	0,887	1,584864103	3630
,489628712	111	0,888	1,588227072	3683
,492839779	162	0,889	1,591595369	3736
,496056	214	0,890	1,594969	3790
,499277381	265	, 891	1,598347971	3843
,502503928	317	0,892	1,601732288	3897
,505735647	369	0,893	1,605121957	3950
,508972544	421	0,894	1,608516984	4004
,512214625	473	0,895	1,611917375	4058
,515461896	525	0,896	1,615323136	4111
,518714363	577	0,897	1,618734273	4165
,521972032	629	0,898	1,622150792	4219
,525234909	681	0,899	1,625572699	4273
,528503		0,900	1,629	
R	$D = 0{,}0032$	*P*	*R*	$D = 0{,}003$

Tabelle III.

P	R	D = 0,1	P	R	D = 0,2
2,40	16,224	8352	2,70	22,383	2951
2,41	16,407521	8497	2,71	22,612511	3114
2,42	16,592488	8642	2,72	22,843648	3277
2,43	16,778907	8788	2,73	23,076417	3441
2,44	16,966784	8934	2,74	23,310824	3605
2,45	17,156125	9081	2,75	23,546875	3770
2,46	17,346936	9229	2,76	23,784576	3936
2,47	17,539223	9367	2,77	24,023933	4102
2,48	17,732992	9526	2,78	24,264952	4269
2,49	17,928249	9675	2,79	24,507639	4436
2,50	18,125	9825	2,80	24,752	4604
2,51	18,323251	9975	2,81	24,998041	4773
2,52	18,523008	0127	2,82	25,245768	4942
2,53	18,724277	0279	2,83	25,495187	5112
2,54	18,927064	0431	2,84	25,746304	5282
2,55	19,131375	0584	2,85	25,999125	5453
2,56	19,337216	0738	2,86	26,253656	5624
2,57	19,544593	0892	2,87	26,509903	5797
2,58	19,753512	1049	2,88	26,767872	5970
2,59	19,963979	1202	2,89	27,027569	6143
2,60	20,176	1358	2,90	27,289	6317
2,61	20,389581	1515	2,91	27,552171	6492
2,62	20,604728	1672	2,92	27,817088	6667
2,63	20,821447	1830	2,93	28,083757	6843
2,64	21,039744	1988	2,94	28,352184	7019
2,65	21,259625	2147	2,95	28,622375	7196
2,66	21,481096	2307	2,96	28,894336	7374
2,67	21,704163	2467	2,97	29,168073	7552
2,68	21,928832	2628	2,98	29,443592	7731
2,69	22,155109	2789	2,99	29,720899	7910
2,70	22,383		3,00	30.	
P	R	D = 0,2	P	R	D = 0,2

Tabelle III.

P	R	$D = 0,2$	P	R	$D = 0,3$
3,00	30.	8090	3,30	39,237	3769
3,01	30,280901	8271	3,31	39,574691	3968
3,02	30,563608	8452	3,32	39,914368	4167
3,03	30,848127	8634	3,33	40,256037	4367
3,04	31,134464	8816	3,34	40,599704	4567
3,05	31,422625	8999	3,35	40,945375	4768
3,06	31,712616	9183	3,36	41,293056	4970
3,07	32,004443	9367	3,37	41,642753	5172
3,08	32,298112	9552	3,38	41,994472	5375
3,09	32,593629	9737	3,39	42,348219	5578
3,10	32,891	9923	3,40	42,704	5782
3,11	33,190231	0110	3,41	43,061821	5987
3,12	33,491328	0297	3,42	43,421688	6192
3,13	33,794297	0485	3,43	43,783607	6398
3,14	34,099144	0673	3,44	44,147584	6604
3,15	34,405875	0862	3,45	44,513625	6811
3,16	34,714496	1062	3,46	44,881736	7019
3,17	35,025013	1242	3,47	45,251923	7227
3,18	35,337432	1433	3,48	45,624192	7436
3,19	35,651759	1624	3,49	45,998549	7645
3,20	35,968	1816	3,50	46,375	7855
3,21	36,286161	2009	3,51	46,753551	8066
3,22	36,606248	2202	3,52	47,134208	8277
3,23	36,928267	2396	3,53	47,516977	8489
3,24	37,252224	2590	3,54	47,901864	8701
3,25	37,578125	2785	3,55	48,288875	8914
3,26	37,905976	2981	3,56	48,678016	9128
3,27	38,235783	3177	3,57	49,069293	9342
3,28	38,567552	3374	3,58	49,462712	9557
3,29	38,901289	3571	3,59	49,858279	9772
3,30	39,237		3,60	50,256	
P	R	$D = 0,3$	P	R	$D = 0,3$

Tabelle III.

P	R	$D = 0,3$	P	R	$D = 0,4$
3,60	50,256	9988	3,90	63,219	6747
3,61	50,655881	0205	3,91	63,686471	6982
3,62	51,057928	0422	3,92	64,156288	7217
3,63	51,462147	0640	3,93	64,628457	7453
3,64	51,868544	0858	3,94	65,102984	7689
3,65	52,277125	1077	3,95	65,579875	7926
3,66	52,687896	1297	3,96	66,059136	8164
3,67	53,100863	1517	3,97	66,540773	8402
3,68	53,516032	1738	3,98	67,024792	8641
3,69	53,933409	1959	3,99	67,511199	8880
3,70	54,353	2181	4,00	68.	9120
3,71	54,774811	2404	4,01	68,491201	9361
3,72	55,198848	2627	4,02	68,984808	9602
3,73	55,625117	2851	4,03	69,480827	9844
3,74	56,053624	3075	4,04	69,979264	0086
3,75	56,484375	3300	4,05	70,480125	0329
3,76	56,917376	3526	4,06	70,983416	0573
3,77	57,352633	3752	4,07	71,489143	0817
3,78	57,790152	3979	4,08	71,997312	1062
3,79	58,229939	4206	4,09	72,507929	1307
3,80	58,672	4434	4,10	73,021	1553
3,81	59,116341	4663	4,11	73,536531	1800
3,82	59,562968	4892	4,12	74,054528	2047
3,83	60,011887	5122	4,13	74,574997	2295
3,84	60,463104	5352	4,14	75,097944	2543
3,85	60,916625	5583	4,15	75,623375	2792
3,86	61,372456	5815	4,16	76,151296	3042
3,87	61,830603	6047	4,17	76,681713	3292
3,88	62,291072	6280	4,18	77,214632	3543
3,89	62,753869	6513	4,19	77,750059	3794
3,90	63,219		4,20	78,288	
P	R	$D = 0,4$	P	R	$D = 0,5$

Tabelle III.

P	R	$D=0{,}5$	P	R	$D=0{,}6$
4,20	78,288	4046	4,50	95,625	1885
4,21	78,828461	4299	4,51	96,243851	2156
4,22	79,371448	4552	4,52	96,865408	2427
4,23	79,916967	4806	4,53	97,489677	2699
4,24	80,465024	5060	4,54	98,116664	2971
4,25	81,015625	5315	4,55	98,746375	3244
4,26	81,568776	5571	4,56	99,378816	3518
4,27	82,124483	5827	4,57	100,013993	3792
4,28	82,682752	6084	4,58	100,651912	4067
4,29	83,243589	6341	4,59	101,292579	4342
4,30	83,807	6599	4,60	101,936	4618
4,31	84,372991	6858	4,61	102,582181	4895
4,32	84,941568	7117	4,62	103,231128	5172
4,33	85,512737	7377	4,63	103,882847	5450
4,34	86,086504	7637	4,64	104,537344	5728
4,35	86,662875	7898	4,65	105,194625	6007
4,36	87,241856	8160	4,66	105,854696	6287
4,37	87,823453	8422	4,67	106,517563	6567
4,38	88,407672	8685	4,68	107,183232	6848
4,39	88,994519	8948	4,69	107,851709	7129
4,40	89,584	9212	4,70	108,523	7411
4,41	90,176121	9477	4,71	109,197111	7694
4,42	90,770888	9742	4,72	109,874048	7977
4,43	91,368307	0008	4,73	110,553817	8261
4,44	91,968384	0274	4,74	111,236424	8545
4,45	92,571125	0541	4,75	111,921875	8830
4,46	93,176536	0809	4,76	112,610176	9116
4,47	93,784623	1077	4,77	113,301333	9402
4,48	94,395392	1346	4,78	113,995352	9689
4,49	95,008849	1615	4,79	114,692239	9976
4,50	95,625		4,80	115,392	
P	R	$D=0{,}6$	P	R	$D=0{,}6$

Tabelle III.

P	R	$D=0,7$	P	R	$D=0,7$
4,80	115,392	0264	5,10	137,751	9183
4,81	116,094641	0553	5,11	138,542831	9490
4,82	116,800168	0842	5,12	139,337728	9797
4,83	117,508587	1132	5,13	140,135697	0105
4,84	118,219904	1422	5,14	140,936744	0413
4,85	118,934125	1713	5,15	141,740875	0722
4,86	119,651256	2005	5,16	142,548096	1032
4,87	120,371303	2297	5,17	143,358413	1342
4,88	121,094272	2590	5,18	144,171832	1653
4,89	121,820169	2883	5,19	144,988359	1964
4,90	122,549	3177	5,20	145,808	2276
4,91	123,280771	3472	5,21	146,630761	2589
4,92	124,015488	3767	5,22	147,456648	2902
4,93	124,753157	4063	5,23	148,285667	3216
4,94	125,493784	4359	5,24	149,117824	3530
4,95	126,237375	4656	5,25	149,953125	3845
4,96	126,983936	4954	5,26	150,791576	4161
4,97	127,733473	5252	5,27	151,633183	4477
4,98	128,485992	5551	5,28	152,477952	4794
4,99	129,241499	5850	5,29	153,325889	5111
5,00	130.	6150	5,30	154,177	5429
5,01	130,761501	6451	5,31	155,031291	5748
5,02	131,526008	6752	5,32	155,888768	6067
5,03	132,293527	7054	5,33	156,749437	6387
5,04	133,064064	7356	5,34	157,613304	6707
5,05	133,837625	7659	5,35	158,480375	7028
5,06	134,614216	7963	5,36	159,350656	7350
5,07	135,393843	8267	5,37	160,224153	7672
5,08	136,176512	8572	5,38	161,100872	7995
5,09	136,962229	8877	5,39	161,980819	8318
5,10	137,751		5,40	162,864	
P	R	$D=0,7$	P	R	$D=0,8$

Tabelle III.

P	R	$D=0{,}8$	P	R	$D=0{,}9$
5,40	162,864	8642	5,70	190,893	8641
5,41	163,750421	8967	5,71	191,879411	8984
5,42	164,640088	9292	5,72	192,869248	9327
5,43	165,533007	9618	5,73	193,862517	9671
5,44	166,429184	9944	5,74	194,859224	0015
5,45	167,328625	0271	5,75	195,859375	0360
5,46	168,231336	0599	5,76	196,862976	0706
5,47	169,137323	0927	5,77	197,870033	105
5,48	170,046592	1256	5,78	198,880552	140
5,49	170,959149	1585	5,79	199,894539	175
5,50	171,875	1915	5,80	200,912	209
5,51	172,794151	2246	5,81	201,932941	244
5,52	173,716608	2577	5,82	202,957368	279
5,53	174,642377	2909	5,83	203,985287	314
5,54	175,571464	3221	5,84	205,016704	349
5,55	176,503875	3574	5,85	206,051625	384
5,56	177,439616	3908	5,86	207,090056	419
5,57	178,378693	4242	5,87	208,132003	455
5,58	179,321112	4577	5,88	209,177472	490
5,59	180,266879	4912	5,89	210,226469	525
5,60	181,216	5248	5,90	211,279	561
5,61	182,168481	5585	5,91	212,335071	596
5,62	183,124328	5922	5,92	213,394688	632
5,63	184,083547	6260	5,93	214,457857	667
5,64	185,046144	6598	5,94	215,524584	703
5,65	186,012125	6937	5,95	216,594875	739
5,66	186,981496	7277	5,96	217,668736	774
5,67	187,954263	7617	5,97	218,746173	810
5,68	188,930432	7958	5,98	219,827192	846
5,69	189,910009	8299	5,99	220,911799	882
5,70	190,893		6,00	222.	
P	R	$D=0{,}9$	P	R	$D=1{,}0$

Tabelle III.

P	R	D = 1,0	P	R	D = 1,2
6,00	222.	918	6,30	256,347	026
6,01	223,091801	954	6,31	257,549591	064
6,02	224,187208	990	6,32	258,755968	102
6,03	225,286227	026	6,33	259,966137	140
6,04	226,388864	063	6,34	261,180104	178
6,05	227,495125	099	6,35	262,397875	216
6,06	228,605016	135	6,36	263,619456	254
6,07	229,718543	172	6,37	264,844853	292
6,08	230,835712	208	6,38	266,074072	330
6,09	231,956529	245	6,39	267,307119	369
6,10	233,081	281	6,40	268,544	407
6,11	234,209131	318	6,41	269,784721	446
6,12	235,340928	355	6,42	271,029288	484
6,13	236,476397	391	6,43	272,277707	523
6,14	237,615544	428	6,44	273,529984	561
6,15	238,758375	465	6,45	274,786125	600
6,16	239,904896	502	6,46	276,046136	639
6,17	241,055113	539	6,47	277,310023	678
6,18	242,209032	576	6,48	278,577792	717
6,19	243,366659	613	6,49	279,849449	756
6,20	244,528	651	6,50	281,125	795
6,21	245,693061	688	6,51	282,404451	834
6,22	246,861848	725	6,52	283,687808	873
6,23	248,034367	763	6,53	284,975077	912
6,24	249,210624	800	6,54	286,266264	951
6,25	250,390625	838	6,55	287,561375	990
6,26	251,574376	875	6,56	288,860416	030
6,27	252,761883	913	6,57	290,163393	069
6,28	253,953152	950	6,58	291,470312	109
6,29	255,148189	988	6,59	292,781179	148
6,30	256,347		6,60	294,096	
P	R	D = 1,1	P	R	D = 1,3

Tabelle III.

P	R	$D=1,3$	P	R	$D=1,4$
6,60	294,096	188	6,90	335,409	404
6,61	295,414781	227	6,91	336,849371	445
6,62	296,737528	267	6,92	338,293888	487
6,63	298,064247	307	6,93	339,742557	528
6,64	299,394944	347	6,94	341,195384	570
6,65	300,729625	387	6,95	342,652375	612
6,66	302,068296	427	6,96	344,113536	653
6,67	303,410963	467	6,97	345,578873	695
6,68	304,757632	507	6,98	347,048392	737
6,69	306,108309	547	6,99	348,522099	779
6,70	307,463	587	7,00	350.	821
6,71	308,821711	627	7,01	351,482101	863
6,72	310,184448	668	7,02	352,968408	905
6,73	311,551217	708	7,03	354,458927	947
6,74	312,922024	749	7,04	355,953664	990
6,75	314,296875	789	7,05	357,452625	032
6,76	315,675776	830	7,06	358,955816	074
6,77	317,058733	870	7,07	360,463243	117
6,78	318,445752	911	7,08	361,974912	159
6,79	319,836839	952	7,09	363,490829	202
6,80	321,232	992	7,10	365,011	244
6,81	322,631241	033	7,11	366,535431	287
6,82	324,034568	074	7,12	368,064128	330
6,83	325,441987	115	7,13	369,597097	372
6,84	326,853504	156	7,14	371,134344	415
6,85	328,269125	197	7,15	372,675875	458
6,86	329,688856	238	7,16	374,221696	501
6,87	331,112703	280	7,17	375,771813	544
6,88	332,540672	321	7,18	377,326232	587
6,89	333,972769	362	7,19	378,884959	630
6,90	335,409		7,20	380,448	
P	R	$D=1,4$	P	R	$D=1,5$

Tabelle III.

P	R	D = 1,5	P	R	D = 1,
7,20	380,448	674	7,50	429,375	6998
7,21	382,015361	717	7,51	431,074751	7043
7,22	383,587048	760	7,52	432,779008	7088
7,23	385,163067	804	7,53	434,487777	7133
7,24	386,743424	847	7,54	436,201064	7178
7,25	388,328125	891	7,55	437,918875	7223
7,26	389,917176	934	7,56	439,641216	7269
7,27	391,510583	978	7,57	441,368093	7314
7,28	393,108352	021	7,58	443,099512	7360
7,29	394,710489	065	7,59	444,835479	7405
7,30	396,317	109	7,60	446,576	7451
7,31	397,927891	153	7,61	448,321081	7496
7,32	399,543168	197	7,62	450,070728	7542
7,33	401,162837	241	7,63	451,824947	7588
7,34	402,786904	285	7,64	453,583744	7634
7,35	404,415375	329	7,65	455,347125	7680
7,36	406,048256	373	7,66	457,115096	7726
7,37	407,685553	417	7,67	458,887663	7772
7,38	409,327272	461	7,68	460,664832	7818
7,39	410,973419	506	7,69	462,446609	7864
7,40	412,624	550	7,70	464,233	7910
7,41	414,279021	595	7,71	466,024011	7956
7,42	415,938488	639	7,72	467,819648	8003
7,43	417,602407	684	7,73	469,619917	8049
7,44	419,270784	728	7,74	471,424824	8096
7,45	420,943625	773	7,75	473,234375	8142
7,46	422,620936	818	7,76	475,048576	8189
7,47	424,302723	863	7,77	476,867433	8235
7,48	425,988992	908	7,78	478,690952	8282
7,49	427,679749	953	7,79	480,519139	8329
7,50	429,375		7,80	482,352	
P	R	D = 1,6	P	R	D = 1,

Tabelle III.

P	R	$D = 1,8$	P	R	$D = 1,$
7,80	482,352	375	8,10	539,541	9807
7,81	484,189541	422	8,11	541,521731	9856
7,82	486,031768	469	8,12	543,507328	9905
7,83	487,878687	516	8,13	545,497797	9953
7,84	489,730304	563	8,14	547,493144	0002
7,85	491,586625	610	8,15	549,493375	0051
7,86	493,447656	657	8,16	551,498496	0100
7,87	495,313403	705	8,17	553,508513	0149
7,88	497,183872	752	8,18	555,523432	0198
7,89	499,059069	799	8,19	557,543259	0247
7,90	500,939	847	8,20	559,568	0297
7,91	502,823671	894	8,21	561,597661	0346
7,92	504,713088	942	8,22	563,632248	0395
7,93	506,607257	989	8,23	565,671767	0445
7,94	508,506184	037	8,24	567,716224	0494
7,95	510,409875	085	8,25	569,765625	0544
7,96	512,318336	132	8,26	571,819976	0593
7,97	514,231573	180	8,27	573,879283	0643
7,98	516,149592	228	8,28	575,943552	0692
7,99	518,072399	276	8,29	578,012789	0742
8,00	520,	324	8,30	580,087	0792
8,01	521,932401	372	8,31	582,166191	0842
8,02	523,869608	420	8,32	584,250368	0892
8,03	525,811627	468	8,33	586,339537	0942
8,04	527,758464	517	8,34	588,433704	0992
8,05	529,710125	565	8,35	590,532875	1042
8,06	531,666616	613	8,36	592,637056	1092
8,07	533,627943	662	8,37	594,746253	1142
8,08	535,594112	710	8,38	596,860472	1192
8,09	537,565129	759	8,39	598,979719	1243
8,10	539,541		8,40	601,104	
P	R	$D = 1,9$	P	R	$D = 2,$

Tabelle III.

P	R	D = 2,1	P	R	D = 2,
8,40	601,104	293	8,70	667,203	2833
8,41	603,233321	344	8,71	669,486311	2885
8,42	605,367688	394	8,72	671,774848	2938
8,43	607,507107	445	8,73	674,068617	2990
8,44	609,651584	495	8,74	676,367624	3043
8,45	611,801125	546	8,75	678,671875	3095
8,46	613,955736	597	8,76	680,981376	3148
8,47	616,115423	648	8,77	683,296133	3200
8,48	618,280192	699	8,78	685,616152	3253
8,49	620,450049	750	8,79	687,941439	3306
8,50	622,625	801	8,80	690,272	3358
8,51	624,805051	852	8,81	692,607841	3411
8,52	626,990208	903	8,82	694,948968	3464
8,53	629,180477	954	8,83	697,295387	3517
8,54	631,375864	005	8,84	699,647104	3570
8,55	633,576375	056	8,85	702,004125	3623
8,56	635,782016	108	8,86	704,366456	3676
8,57	637,992793	159	8,87	706,734103	3730
8,58	640,208712	211	8,88	709,107072	3783
8,59	642,429779	262	8,89	711,485369	3836
8,60	644,656	314	8,90	713,869	3890
8,61	646,887381	365	8,91	716,257971	3943
8,62	649,123928	417	8,92	718,652288	3997
8,63	651,365647	469	8,93	721,051957	4050
8,64	653,612544	521	8,94	723,456984	4104
8,65	655,864625	573	8,95	725,867375	4158
8,66	658,121896	625	8,96	728,283136	4211
8,67	660,384363	677	8,97	730,704273	4265
8,68	662,652032	729	8,98	733,130792	4319
8,69	664,924909	781	8,99	735,562699	4373
8,70	667,203		9,00	738.	
P	R	D = 2,2	P	R	D = 2,

Tabelle III.

P	R	D=2,	P	R	D=2,6
9,00	738.	4427	9,30	813,657	075
9,01	740,442701	4481	9,31	816,264491	131
9,02	742,890808	4535	9,32	818,877568	187
9,03	745,344327	4589	9,33	821,496237	243
9,04	747,803264	4644	9,34	824,120504	299
9,05	750,267625	4698	9,35	826,750375	355
9,06	752,737416	4752	9,36	829,385856	411
9,07	755,212643	4807	9,37	832,026953	467
9,08	757,693312	4861	9,38	834,673672	523
9,09	760,179429	4916	9,39	837,326019	580
9,10	762,671	4970	9,40	839,984	636
9,11	765,168031	5025	9,41	842,647621	693
9,12	767,670528	5080	9,42	845,316888	749
9,13	770,178497	5134	9,43	847,991807	806
9,14	772,691944	5189	9,44	850,672384	862
9,15	775,210875	5244	9,45	853,358625	919
9,16	777,735296	5299	9,46	856,050536	976
9,17	780,265213	5354	9,47	858,748123	033
9,18	782,800632	5409	9,48	861,451392	090
9,19	785,341559	5464	9,49	864,160349	147
9,20	787,888	5520	9,50	866,875	204
9,21	790,439961	5575	9,51	869,595351	261
9,22	792,997448	5630	9,52	872,321408	318
9,23	795,560467	5686	9,53	875,053177	375
9,24	798,129024	5741	9,54	877,790664	432
9,25	800,703125	5797	9,55	880,533875	489
9,26	803,282776	5852	9,56	883,282816	547
9,27	805,867983	5908	9,57	886,037493	604
9,28	808,458752	5963	9,58	888,797912	662
9,29	811,055089	6019	9,59	891,564079	719
9,30	813,657		9,60	894,336	
P	R	D=2,	P	R	D=2,7

Tabelle III.

P	*R*	*D* = 2,	*P*	*R*	*D*
9,60	894,336	7777	9,90	980,199	2,9533
9,61	897,113681	7834	9,91	983,152271	2,9592
9,62	899,897128	7892	9,92	986,111488	2,9652
9,63	902,686347	7950	9,93	989,076657	2,9711
9,64	905,481344	8008	9,94	992,047784	2,9771
9,65	908,282125	8066	9,95	995,024875	2,9831
9,66	911,088696	8124	9,96	998,007936	2,9890
9,67	913,901063	8182	9,97	1000,996973	2,9950
9,68	916,719232	8240	9,98	1003,991992	3,0010
9,69	919,543209	8298	9,99	1006,992999	3,0070
9,70	922,373	8356	10,0	1010.	30,401
9,71	925,208611	8414	10,1	1040,401	31,007
9,72	928,050048	8473	10,2	1071,408	31,619
9,73	930,897317	8531	10,3	1103,027	32,237
9,74	933,750424	8590	10,4	1135,264	32,861
9,75	936,609375	8648	10,5	1168,125	33,491
9,76	939,474176	8707	10,6	1201,616	34,127
9,77	942,344833	8765	10,7	1235,743	34,769
9,78	945,221352	8824	10,8	1270,512	35,417
9,79	948,103739	8883	10,9	1305,929	36,071
9,80	950,992	8941	11,0	1342.	36,731
9,81	953,886141	9000	11,1	1378,731	37,397
9,82	956,786168	9059	11,2	1416,128	38,069
9,83	959,692087	9118	11,3	1454,197	38,747
9,84	962,603904	9177	11,4	1492,944	39,431
9,85	965,521625	9236	11,5	1532,375	40,121
9,86	968,445256	9295	11,6	1572,496	40,817
9,87	971,374803	9355	11,7	1613,313	41,519
9,88	974,310272	9414	11,8	1654,832	42,227
9,89	977,251669	9473	11,9	1697,059	42,941
9,90	980,199		12,0	1740.	
P	*R*	*D* = 2,	*P*	*R*	*D*

Tabelle III.

P	R	D	P	R	D
12,0	1740.	43,661	15,0	3390.	68,051
12,1	1783,661	44,387	15,1	3458,051	68,957
12,2	1828,048	45,119	15,2	3527,008	69,869
12,3	1873,167	45,857	15,3	3596,877	70,787
12,4	1919,024	46,601	15,4	3667,664	71,711
12,5	1965,625	47,351	15,5	3739,375	72,641
12,6	2012,976	48,107	15,6	3812,016	73,577
12,7	2061,083	48,869	15,7	3885,593	74,519
12,8	2109,952	49,637	15,8	3960,112	75,467
12,9	2159,589	50,411	15,9	4035,579	76,421
13,0	2210.	51,191	16,0	4112.	77,381
13,1	2261,191	51,977	16,1	4189,381	78,347
13,2	2313,168	52,769	16,2	4267,728	79,319
13,3	2365,937	53,567	16,3	4347,047	80,297
13,4	2419,504	54,371	16,4	4427,344	81,281
13,5	2473,875	55,181	16,5	4508,625	82,271
13,6	2529,056	55,997	16,6	4590,896	83,267
13,7	2585,053	56,819	16,7	4674,163	84,269
13,8	2641,872	57,647	16,8	4758,432	85,277
13,9	2699,519	58,481	16,9	4843,709	86,291
14,0	2758.	59,321	17,0	4930.	87,311
14,1	2817,321	60,167	17,1	5017,311	88,337
14,2	2877,488	61,019	17,2	5105,648	89,369
14,3	2938,507	61,877	17,3	5195,017	90,407
14,4	3000,384	62,741	17,4	5285,424	91,451
14,5	3063,125	63,611	17,5	5376,875	92,501
14,6	3126,736	64,487	17,6	5469,376	93,557
14,7	3191,223	65,379	17,7	5562,933	94,619
14,8	3256,592	66,257	17,8	5657,552	95,687
14,9	3322,849	67,151	17,9	5753,239	96,761
15,0	3390.		18,0	5850.	
P	R	D	P	R	D

Tabelle III.

P	*R*	*D*	*P*	*R*	*D*
18,0	5850.	97,841	21,0	9282.	133,03
18,1	5947,841	98,927	21,1	9415,031	134,30
18,2	6046,768	100,02	21,2	9549,328	135,57
18,3	6146,787	101,12	21,3	9684,897	136,85
18,4	6247,904	102,22	21,4	9821,744	138,13
18,5	6350,125	103,33	21,5	9959,875	139,42
18,6	6453,456	104,45	21,6	10099,296	140,72
18,7	6557,903	105,57	21,7	10240,013	142,02
18,8	6663,472	106,70	21,8	10382,032	143,33
18,9	6770,169	107,83	21,9	10525,359	144,64
19,0	6878.	108,97	22,0	10670.	145,96
19,1	6986,971	110,12	22,1	10815,961	146,29
19,2	7097,088	111,27	22,2	10963,248	148,62
19,3	7208,357	112,43	22,3	11111,867	149,96
19,4	7320,784	113,59	22,4	11261,824	151,30
19,5	7434,375	114,76	22,5	11413,125	152,65
19,6	7549,136	115,94	22,6	11565,776	154,01
19,7	7665,073	117,12	22,7	11719,783	155,37
19,8	7782,192	118,31	22,8	11875,152	156,74
19,9	7900,499	119,50	22,9	12031,889	158,11
20,0	8020.	120,70	23,0	12190.	159,39
20,1	8140,701	121,91	23,1	12349,391	160,98
20,2	8262,608	123,12	23,2	12510,368	162,27
20,3	8385,727	124,34	23,3	12672,637	163,67
20,4	8510,064	125,56	23,4	12836,304	165,07
20,5	8635,625	126,80	23,5	13001,375	166,48
20,6	8762,416	128,03	23,6	13167,856	167,70
20,7	8890,443	129,27	23,7	13335,753	169,32
20,8	9019,712	130,52	23,8	13505,072	170,75
20,9	9150,229	131,77	23,9	13675,819	172,18
21,0	9282.		24,0	13848.	
P	*R*	*D*	*P*	*R*	*D*

Anhang zu Tabelle III.

Q	P	C	Q	P	C	P	C	P	C	Q
	0,000	+		0,005	+	0,019	+	0,097	+	
1.		0,00000010	1. 9.		0,000002		0,000006		0,00003	1. 9.
2.		00000020	2. 8.		000003		000010		00005	2. 8.
3.		00000028	3. 7.		000004		000013		00006	3. 7.
4.		00000034	4. 5. 6.		000004		000015		00008	4. 5. 6.
5.		00000038		0,006	+	0,020	+	0,118	+	
6.		00000039	1. 9.		0,000002		0,000006		0,00004	1. 9.
7.		00000036	2. 8.		000003		000011		00006	2. 8.
8.		00000029	3. 7.		000004		000014		00008	3. 7.
9.		00000018	4. 5. 6.		000005		000016		00009	4. 5. 6.
	0,001	+		0,007	+	0,021	+	0,140	+	
1.		0,0000004	1. 9.		0,000002		0,00000		0,00004	1. 9.
2.		0000007	2. 8.		000004		00001		00007	2. 8.
3.		0000010	3. 7.		000005		00001		00009	3. 7.
4.		0000011	4. 5. 6.		000006		00001		00010	4. 5. 6.
5.		0000012		0,008	+	0,022	+	0,150	+	
6.		0000011	1. 9.		0,000003		0,00001		0,0000	1. 9.
7.		0000010	2. 8.		000005		00002		0000	2. 8.
8.		0000008	3. 7.		000006		00002		0001	3. 7.
9.		0000005	4. 5. 6.		000007		00002		0002	4. 5. 6.
	0,002	+		0,010	+	0,031	+	0,200	+	
1.		0,0000007	1. 9.		0,000003		0,00001		0,0000	1. 9.
2.		0000012	2. 8.		000005		00002		0001	2. 8.
3.		0000016	3. 7.		000007		00002		0001	3. 7.
4.		0000018	4. 5. 6.		000008		00003		0002	4. 5. 6.
5.		0000019		0,011	+	0,034	+	0,250	+	
6.		0000018	1. 9.		0,000004		0,00001		0,0001	1. 9.
7.		0000016	2. 8.		000006		00002		0002	2. 8.
8.		0000013	3. 7.		000008		00003		0002	3. 7.
9.		0000008	4. 5. 6.		000009		00003		0002	4. 5. 6.
	0,003	+		0,012	+	0,042	+	1,00	+	
1.		0,0000010	1. 9.		0,000004		0,00002		0,0007	1. 9.
2.		0000017	2. 8.		000007		00002		0012	2. 8.
3.		0000022	3. 7.		000008		00003		0016	3. 7.
4.		0000025	4. 5. 6.		000010		00004		0018	4. 5. 6.
5.		0000027		0,013	+	0,056	+	1,10	+	
6.		0000026	1. 9.		0,000004		0,00002		0,0007	1. 9.
7.		0000023	2. 8.		000007		00003		0012	2. 8.
8.		0000018	3. 7.		000010		00004		0015	3. 7.
9.		0000010	4. 5. 6.		000011		00005		0017	4. 5. 6.
	0,004	+		0,016	+	0,070	+	1,20	+	
1.		0,0000012	1. 9.		0,000005		0,00002		0,0007	1. 9.
2.		0000021	2. 8.		000008		00004		0011	2. 8.
3.		0000028	3. 7.		000011		00005		0015	3. 7.
4.		0000033	4. 5. 6.		000013		00006		0017	4. 5. 6.
5.		0000034		0,018	+	0,083	+	1,30	+	
6.		0000033	1. 9.		0,000005		0,00003		0,0006	1. 9.
7.		0000029	2. 8.		000009		00004		0011	2. 8.
8.		0000022	3. 7.		000012		00006		0014	3. 7.
9.		0000013	4. 5. 6.		000014		00007		0016	4. 5. 6.
	0,005			0,019		0,097		1,40		

Anhang zu Tabelle III.

Q	P	C	P	C	Q	P	C	P	C	Q
	1,40	+	2,80	+		8,00	+	11,0	+	
1. 9.		0,0006		0,0003	1. 9.		0,0002		0,0009	1. 9.
2. 8.		0010		0006	2. 8.		0002		0015	2. 8.
3. 7.		0013		0008	3. 7.		0003		0019	3. 7.
4.5.6.		0015		0009	4. 6.		0003		0022	4. 6.
	1,50	+	3,00	+	5.		0003		0023	5.
1. 9.		0,0006		0,0003		9,00	+	11,2	+	
2. 8.		0010		0006	1. 9.		0,0001		0,0008	1. 9.
3. 7.		0013		0007	2. 8.		0002		0015	2. 8.
4.5.6.		0014		0008	3. 7.		0003		0019	3. 7.
	1,60	+	3,20	+	4. 6.		0003		0022	4. 6.
1. 9.		0,0005		0,0003	5.		0003		0023	5.
2. 8.		0009		0005		10,0	+	11,3	+	
3. 7.		0012		0007	1. 9.		0,0009		0,0008	1. 9.
4.5.6.		0014		0008	2. 8.		0016		0015	2. 8.
	1,70	+	3,40	+	3. 7.		0021		0019	3. 7.
1. 9.		0,0005		0,0003	4. 6.		0024		0022	4. 6.
2. 8.		0009		0005	5.		0027		0022	5.
3. 7.		0012		0006		10,1	+	11,4	+	
4.5.6.		0013		0007	1. 9.		0,0009		0,0008	1. 9.
	1,80	+	4,00	+	2. 8.		0016		0014	2. 8.
1. 9.		0,0005		0,0003	3. 7.		0021		0019	3. 7.
2. 8.		0009		0004	4. 6.		0024		0021	4. 6.
3. 7.		0011		0006	5.		0025		0022	5.
4.5.6.		0013		0006		10,4	+	11,6	+	
	1,90	+	4,50	+	1. 9.		0,0009		0,0008	1. 9.
1. 9.		0,0005		0,0002	2. 8.		0016		0014	2. 8.
2. 8.		0008		0004	3. 7.		0020		0018	3. 7.
3. 7.		0011		0005	4. 6.		0023		0021	4. 6.
4.5.6.		0012		0006	5.		0024		0022	5.
	2,00	+	5,00	+		10,5	+	11,9	+	
1. 9.		0,0005		0,0002	1. 9.		0,0009		0,0008	1. 9.
2. 8.		0008		0004	2. 8.		0015		0014	2. 8.
3. 7.		0010		0005	3. 7.		0020		0018	3. 7.
4.5.6.		0012		0005	4. 6.		0023		0020	4. 6.
	2,20	+	5,50	+	5.		0024		0021	5.
1. 9.		0,0004		0,0002		10,8	+	12,1	+	
2. 8.		0007		0003	1. 9.		0,0009		0,0008	1. 9.
3. 7.		0009		0004	2. 8.		0015		0014	2. 8.
4.5.6.		0011		0005	3. 7.		0020		0018	3. 7.
	2,40	+	6,00	+	4. 6.		0023		0020	4. 6.
1. 9.		0,0004		0,0002	5.		0023		0020	5.
2. 8.		0007		0003		10,9	+	12,4	+	
3. 7.		0009		0004	1. 9.		0,0009		0,0008	1. 9.
4.5.6.		0010		0004	2. 8.		0015		0013	2. 8.
	2,60	+	7,00	+	3. 7.		0020		0017	3. 7.
1. 9.		0,0004		0,0002	4. 6.		0022		0020	4. 6.
2. 8.		0006		0003	5.		0023		0020	5.
3. 7.		0008		0003		11,0		12,6		
4.5.6.		0009		0004						
	2,80		8,00							

Anhang zu Tabelle III.

Q	P	C	P	C	P	C	P	C	P	C	Q
	12,6	+	14,0	+	16,0	+	17,9		21,8	+	
1. 9.		0,0008		0,0007		0,0006		0,0005		0,0005	1. 9.
2. 8.		0013		0012		0010		0009		0008	2. 8.
3. 7.		0017		0015		0014		0012		0010	3. 7.
4.5.6.		0019		0018		0015		0014		0011	4.5.6.
	12,8	+	14,1	+	16,1	+	18,3	+	22,5	+	
1. 9.		0,0007		0,0007		0,0006		0,0005		0,0004	1. 9.
2. 8.		0013		0012		0010		0009		0008	2. 8.
3. 7.		0017		0015		0013		0012		0010	3. 7.
4.5.6.		0019		0017		0015		0013		0011	4.5.6.
	13,1	+	14,5	+	17,1	+	19,1	+	22,8	+	
1. 9.		0,0007		0,0007		0,0006		0,0005		0,0004	1. 9.
2. 8.		0013		0011		0010		0009		0007	2. 8.
3. 7.		0016		0015		0013		0011		0010	3. 7.
4.5.6.		0019		0017		0014		0013		0011	4.5.6.
	15,2	+	14,9	+	17,5	+	20,0	+	23,3	+	
1. 9.		0,0007		0,0006		0,0006		0,0005		0,0004	1. 9.
2. 8.		0012		0011		0010		0008		0007	2. 8.
3. 7.		0016		0015		0012		0011		0009	3. 7.
4.5.6.		0019		0017		0014		0012		0011	4.5.6.
	13,3	+	15,0	+	17,7	+	21,0	+	23,8	+	
1. 9.		0,0007		0,0006		0,0006		0,0005		0,0004	1. 9.
2. 8.		0012		0011		0009		0008		0007	2. 8.
3. 7.		0016		0014		0012		0010		0009	3. 7.
4.5.6.		0018		0016		0014		0012		0010	4.5.6.
	14,0		16,0		17,9		21,8		24,0		

97.

Wenden wir das bisher Abgehandelte auf einige Zahlenbeispiele an. Es sei die reelle Wurzel der Gleichung

$$0 = +\underset{a}{174} + \underset{b}{5}y + \underset{c}{2}y^2 + y^3$$

so genau zu bestimmen, als dies die Einrichtung der Tabelle III. zulässt. Der Vorzeichen der Glieder wegen ist nach [94.] aufzulösen. Man erhält:

$$(9b - 3c^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{33} = 5{,}7445626 \text{ und } (9b - 3c^2)^{\frac{3}{2}} = 189{,}5705673.$$

$+27a = 4698$ | also $+a > +q$, daher Fall 2) vorliegend.
$+27q = 74$ | Nun ergiebt sich:

$$27(a-q) = \begin{cases} 4624 \\ 27r, \end{cases} \text{ daher } R = 4624 : 189{,}5705673 = 24{,}391972$$

$$\text{also } R' = 24{,}264952$$

$$P' = 2{,}78 \text{ und } \frac{R - R'}{D} = \frac{0{,}127020}{0{,}24269} = 0{,}5234$$

$$C = 0{,}0009$$

$$0{,}5243$$

$$P' = 2{,}78$$

$$P = 2{,}785243.$$

$$P \,.\, 5{,}7445626 = p = 16{,}000002$$

$$(3y) = -2 - 16{,}000002 = -18{,}000002$$

$$y = -\ 6{,}000000.$$

In Wirklichkeit ist -6 die wahre reelle Wurzel der gegebenen Gleichung.

98.

Es sei:

$$0 = -\underset{a}{2} + \underset{b}{7}y - \underset{c}{}y^2 + y^3.$$

Der Vorzeichen der Glieder wegen ist nach [95.] aufzulösen und man erhält:

$(9b-3c^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{60} = 7{,}74596669$ und $(9b-3c^2)^{\frac{3}{2}} = 464{,}75800154,$

$-27a = -54$ | also: $-a > -q$, daher Fall 1) vorliegend.
$-27q = -61$ | Es ergiebt sich:

$$27(q-a) = \begin{cases} 7 \\ 27r, \end{cases} \text{ daher } R = 7 : 464{,}75800154 = 0{,}015061602$$

$$R' = 0{,}015003375$$

$P' = 0{,}015$:

$$\frac{R-R'}{D} = \frac{0{,}000058227}{0{,}001000721}$$

$$= 0{,}058185$$

$$C = 0{,}000000$$

$$0{,}058185$$

$$P' = 0{,}015$$

$$P = 0{,}015058185$$

$$P.\,7{,}74596669 = p = 0{,}11664021.$$

$$(3y) = +1 - 0{,}11664021 = 0{,}88335979$$

$$y = 0{,}29445326.$$

99.

Wäre aber in dem vorhergehenden Beispiele c positiv, also die gegebene Gleichung:

$$0 = -\underset{a}{2} + \underset{b}{7}y + \underset{c}{}y^2 + y^3$$

so ist, der Vorzeichen wegen, nach [94.] aufzulösen und es ergiebt sich:

$-27a = -54$ | also $-a < +q$, daher Fall 1) vorliegend.
$+27q = +61$ | Es ergiebt sich weiter:

$$27(q+a) = \begin{cases} 115 \\ 27r, \end{cases} \text{ daher } R = 115 : 464{,}75800154 = 0{,}247440602$$

$$R' = 0{,}246812904$$

$P' = 0{,}234$;

$$\frac{R-R'}{D} = \frac{0{,}000627698}{0{,}001165}$$

$$= 0{,}5387$$

$$C = 0{,}0002$$

$$0{,}5389$$

$$P' = 0{,}234$$

$$P = 0{,}2345389.$$

$$P.7{,}74596669 = p = 1{,}8167305.$$

$$(3y) = -1 + 1{,}8167305 = +0{,}8167305$$
$$y = 0{,}2722435.$$

100.

Es sei:

$$0 = -\underset{a}{17} + \underset{b}{16}y - \underset{c}{6}y^2 + y^3.$$

Der Vorzeichen der Glieder wegen ist nach [95.] aufzulösen und man erhält:

$$(9b - 3c^2)^{\frac{1}{2}} = 6 \text{ und } (9b - 3c^2)^{\frac{3}{2}} = 216.$$

$$-27a = -459 \quad | \quad \text{also: } -a < -q\text{, daher Fall 2) vorliegend.}$$
$$-27q = -432 \quad | \quad \text{Es ergiebt sich:}$$

$$27(a-q) = \begin{cases} 27 \\ 27r, \end{cases} \text{daher } R = 27:216 = 0{,}125$$

$$R' = 0{,}124860867$$

$$P' = 0{,}123; \qquad \frac{R - R'}{D} = \frac{0{,}000139133}{0{,}00104576}$$

$$= 0{,}13304$$
$$C = 0{,}00004$$
$$\overline{0{,}13308}$$
$$P' = 0{,}123$$
$$P = \overline{0{,}12313308.}$$

$$P.6 = p = 0{,}73879848.$$

$$(3y) = +6 + 0{,}73879848 = 6{,}73879848$$
$$y = 2{,}24626616.$$

101.

Es sei die gegebene Gleichung:

$$0 = +\underset{a}{10} + \underset{b}{9}y - \underset{c}{5}y^2 + y^3.$$

Der Vorzeichen der Glieder wegen ist nach [95.] aufzulösen.

Man erhält:

$(9b-3c^2)^{\frac{1}{2}} = 2{,}4494897\ldots$ und $(9b-3c^2)^{\frac{3}{2}} = 14{,}6969384\ldots$

$$\left.\begin{array}{r} +27a = +270 \\ -27q = -155 \end{array}\right|$$ also ist Fall 1) vorliegend. Man erhält:

$$27(q+a) = \begin{cases} +425 \\ 27r, \end{cases}$$ daher $R = 425 : 14{,}6969384\ldots = 28{,}9175872\ldots$

$P' = 2{,}96$ und $R' = 28{,}894336$

$$\frac{R-R'}{D} = \frac{0{,}0232512}{0{,}27374}$$

$= 0{,}0849.$

Da dieser Werth nahe 0,1 ist, so ist $C = 0{,}0003$

$0{,}0852$

$P' = 2{,}96$

$P = 2{,}960852$

$P . 2{,}4494897\ldots = p = 7{,}252576$

$(3y) = +5 - 7{,}252576 = -2{,}252576$

$y = -0{,}750858.$

102.

Fehlt in einer gegebenen cubischen Gleichung das quadratische Glied, oder ist dasselbe durch Transformation hinweggeschafft, so kann bezüglich der Vorzeichen ihrer Glieder nur einer von nachstehenden vier Fällen stattfinden.

1)	$0 = +a + by + y^3$
2)	$-\quad+\quad+$
3)	$+\quad-\quad+$
4)	$-\quad-\quad+$

Es folgt wegen $0 < +b$ und $0 > -b$, alsbald [aus 41.], dass für die Fälle 1) und 2) die vorgelegte Gleichung stets nur e i n e reelle Wurzel habe, für die Fälle 3) und 4) aber die Möglichkeit dreier reeller Wurzeln vorliege.

Aus [94. 95. 49. und 52.] ergeben sich für diese vier Fälle zur annähernden Bestimmung der reellen Wurzeln leicht die bezüglichen Formeln.

Ebenso ergeben sich bezüglich der Vorzeichen vier verschiedene Fälle, wenn in einer cubischen Gleichung das Glied der ersten Potenz fehlt, und lassen sich die hierher gehörigen Formeln leicht aus [48. 49. 51. und 52.] ableiten.

Sämmtliche Formeln zur annähernden Bestimmung der reellen Wurzeln einer vorgelegten unvollständigen cubischen Gleichung sollen nachstehend zusammengestellt werden.

103.

$0 = \pm a + by + y^3.$

$R = \frac{a}{b^{3/2}}$ — Tab. III. — $y = \mp P . b^{1/2}.$

104.

$0 = \pm a - by + y^3.$

$27q = 6b(3b)^{1/2}$ — $R = \frac{27r}{(3b)^{3/2}}.$

1) $\pm a \lessgtr \pm q$	$q - a = r$	Tab. I.	$y = \pm \frac{1}{3}(3b)^{1/2}(P - 2).$
2) $\pm a \gtrless \pm q$	$a - q = r$	„ II.	$y = \mp \frac{1}{3}(3b)^{1/2}(P + 2).$

105.

$0 = \pm a \pm cy^2 + y^3.$

$R = \frac{27a}{c^3}.$ — Tab. II. — $y = \mp \frac{c}{3}(P + 3).$

106.

$0 = \pm a \mp cy^2 + y^3.$

$27q = 4c^3$ — $R = \frac{27r}{c^3}$

1) $\pm a \gtrless \pm q$	$a - q = r$	Tab. II.	$y = \mp \frac{c}{3}(P + 1).$
2) $\pm a \lessgtr \pm q$	$q - a = r$	„ I.	$y = \pm \frac{c}{3}(P - 1).$

107.

Es sei die reelle Wurzel der Gleichung

$$0 = -\underset{a}{5} + \underset{b}{2}y + y^3$$

so genau zu bestimmen, als dies die Einrichtung der Tabelle zulässt. Der Vorzeichen der Glieder wegen ist nach [103.] aufzulösen, und sind die unteren Vorzeichen zu berücksichtigen.

Man erhält:

$$b^{\frac{1}{2}} = 1{,}414213562\ldots\ ;\ b^{\frac{3}{2}} = 2{,}828427124\ldots$$

$$\begin{array}{llr} & R = 5:2{,}828427124 = & 1{,}767766953 \\ P' = 0{,}939 \quad \text{und} & R' = & 1{,}766936019 \\ \hline & \frac{R-R'}{D} = & \frac{0{,}000830934}{0{,}003645} \\ & = & 0{,}2279 \\ & C = & +0{,}0002 \\ \hline & & 0{,}2281 \\ & P' = & 0{,}939 \\ \hline & P = & 0{,}9392281 \\ & y = & +1{,}328269. \end{array}$$

Ist die gegebene Gleichung

$$0 = +\underset{a}{5} + \underset{b}{2}y + y^3,$$

so kommen die oberen Vorzeichen [103.] in Berücksichtigung und man erhält auf dieselbe Weise:

$$y = -1{,}328269.$$

108.

Es seien die Wurzeln der Gleichung

$$0 = -\underset{a}{5} - \underset{b}{2}y + y^3$$

so genau zu bestimmen, als dies die Einrichtung der Tabellen gestattet. Der Vorzeichen der Glieder wegen ist nach [104.] aufzulösen, und es sind die unteren zu berücksichtigen. Man erhält:

$$(3b)^{\frac{1}{2}} = 2{,}4494897\ldots;\quad (3b)^{\frac{3}{2}} = 14{,}6969384\ldots$$

$$-27\,a = -135$$

$$-27\,q = -29{,}3938769\ldots,$$

daher ist $-a < -q$ und Fall 2) vorliegend, nach welchem die vorgelegte Gleichung nur eine reelle Wurzel hat. Man erhält weiter:

$$27\,(a-q) = \begin{cases} 105{,}6061230 \\ 27r, \end{cases}$$

$$\text{also } R = \frac{105{,}6061230}{14{,}6969384} = 7{,}1855865.$$

Daher ist nach Tab. II: $P' = 0{,}56$ und $R' = 7{,}097216$

$$\frac{R-R'}{D} = \frac{0{,}0883705}{0{,}1674}$$

$$= 0{,}527$$

$$C = +\underline{0{,}002}$$

$$0{,}529$$

$$P' = \underline{0{,}56}$$

$$P = 0{,}56529$$

$$P+2 = 2{,}56529$$

$$(3b^{\frac{1}{2}})(P+2) = 6{,}28365$$

$$y = +2{,}09455.$$

Ist die gegebene Gleichung

$$0 = +5-2y+y^3,$$

so sind die oberen Vorzeichen zu berücksichtigen, und man erhält auf dieselbe Weise:

$$y = -2{,}09455.$$

109.

Es sei die reelle Wurzel der Gleichung

$$0 = +\underset{a}{5} + \underset{c}{2}y^2 + y^3$$

so genau zu bestimmen, als dies die Einrichtung der Tabelle zulässt. Der Vorzeichen der Glieder wegen ist nach [105.] aufzulösen. Man erhält:

$$c = 2; \qquad c^3 = 8.$$

$$R = 135:8 = 16{,}875$$

$$P' = 1{,}03 \text{ und } R' = \underline{16{,}728127}$$

$$\frac{R-R'}{D} = \frac{0{,}146873}{0{,}2463} = 0{,}596$$

$$C = +\underline{0{,}001}$$

$$0{,}597$$

$$P' = +\underline{1{,}03}$$

$$P = 1{,}03597$$

$$P+3 = 4{,}03597$$

$$y = -\tfrac{2}{3}(P+3) = -2{,}69064.$$

Ist die gegebene Gleichung

$$0 = -5 - 2y^2 + y^3,$$

so ergiebt sich auf dieselbe Weise:

$$y = +2,69064.$$

110.

Es seien die reellen Wurzeln der Gleichung

$$0 = +\underset{a}{5} - \underset{c}{2}y^2 + y^3$$

so genau zu bestimmen, als dies die Einrichtung der Tabellen gestattet. Der Vorzeichen der Glieder wegen ist nach [106.] aufzulösen und es sind die oberen Vorzeichen zu berücksichtigen. Man erhält:

$$c = 2; \qquad c^3 = 8;$$

$+27a = 135$ | daher ist $+a > +q$ und Fall 1) vorliegend, nach
$+27q = 32$ | welchem die gegebene Gleichung nur eine reelle Wurzel hat. Man erhält weiter:

$$27(a-q) = \begin{cases} 103 \\ 27r, \text{ also ist } R = \dfrac{103}{8} = 12,875. \end{cases}$$

Nach Tab. II. ist: $P' = 0,86$ und $R' = 12,813656$

$$\frac{R-R'}{D} = \frac{0,061344}{0,2162}$$

$$= 0,283$$

$$C = +0,001$$

$$0,284$$

$$P' = 0,86$$

$$P = 0,86284$$

$$P+1 = 1,86284$$

$$y = -\tfrac{1}{3}c(P+1) = -1,24189.$$

Ist die gegebene Gleichung

$$0 = -5 + 2y^2 + y^3,$$

so sind diе unteren Vorzeichen [106. 1)] zu berücksichtigen, und man erhält die Wurzel ganz in vorstehender Weise, nur in positiver Bedeutung.

(Die vierte Abtheilung dieser Abhandlung folgt im nächsten Hefte.)

II.

Théorie des équations réciproques

par

Monsieur Dr. *Ad. Vogt*
à Olpe en Westphalie.

Notions préliminaires.

1. De tout temps, les analystes se sont vivement occupés du problème de la résolution générale des équations algébriques d'un degré quelconque. Mais quelques efforts qu'ils aient faits, ils n'ont réussi jusqu' ici qu'à résoudre les équations des quatre premiers degrés; et il est fort douteux si jamais ils parviendront à la résolution de celles d'un degré supérieur au quatrième. Cependant les recherches qu'ils ont faites dans ce but, n'ont pas été tout-à-fait infructueuses; car il en a résulté, qu'il y a toujours certaines classes d'équations de degré supérieur qu'on peut résoudre complétement, ou du moins ramener à des équations de degré moindre.

Parmi ces équations celles qu'on appelle réciproques, se distinguent autant par la singularité de leur forme, que par l'élégance de la méthode de leur résolution. L'honneur de les avoir fait connaître et résolues le premier, est dû à Moivre, célèbre analyste français. Il en a publié des recherches fort ingénieuses dans ses „Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis", qui ont paru en 1730. Plus tard Euler, cet illustre mathématicien allemand, en a completé la théorie, avec son adresse et sa finesse ordinaires, dans les „Commentaires de l'académie de Pétersbourg", imprimés en 1738. C'est encore lui qui leur a donné le nom de réciproques, qui est depuis d'un usage général.

Définition et propriétés générales.

2. Ordinairement on comprend sous ce titre toutes les équations qui, si elles sont satisfaites par $x=\alpha$, le sont aussi par $x=\frac{1}{\alpha}$, valeur dite réciproque de α. Mais, pour plus de généralité, nous étendrons ici le sens de cette dénomination, et dirons réciproque toute équation qui, si elle est vérifiée par $x=\alpha$, se vérifie également par $x=\frac{r}{\alpha}$, supposé que r soit une quantité algébrique ou numérique quelconque. Ainsi, par exemple, toute équation du second degré, c'est-à-dire de la forme $x^2+px+q=0$ doit être regardée comme réciproque, puisque les deux racines en sont égales à α et $\frac{r}{\alpha}$, si α en est une quelconque et que l'on suppose r égal au dernier terme q de cette équation, lequel représente toujours, comme on sait, le produit de ses deux racines.

3. En admettant cette définition, on peut en déduire des conséquences fort curieuses et propres à nous éclaircir encore davantage sur la nature des équations réciproques.

Commençons par observer que, α étant toujours différent de $\frac{r}{\alpha}$, à moins qu'il ne soit égal à $\pm\sqrt{r}$, toute équation réciproque doit avoir en général un nombre pair de racines, et qu'elle ne peut en avoir un nombre impair, sans qu'il y en ait qui soient égales à $\sqrt{r}$ positive ou négative. Par conséquent, une telle équation ne peut jamais être de degré impair, à moins d'être satisfaite par la valeur $+\sqrt{r}$ ou $-\sqrt{r}$ de x. D'ailleurs, ces racines particulières peuvent satisfaire aussi aux équations réciproques de degré pair. Mais il faut absolument pour cela, qu'elles s'y trouvent plusieurs fois et toujours en nombre pair, puisque les autres racines qui sont différentes de $\pm\sqrt{r}$, ne peuvent s'y trouver non plus qu'en nombre pair. Ainsi donc, il sera possible que l'une ou l'autre de ces deux racines y soit toute seule deux fois, ou quatre fois, ou généralement $2n$ fois; et de plus qu'elles y soient toutes deux ensemble, à condition que l'une s'y trouve, par exemple, p fois et l'autre $(2n-p)$ fois. Il se pourrait même que l'équation n'eût pas d'autres racines que celles-ci.

4. Remarquons aussi, en second lieu, que les racines d'une équation de degré pair sont toujours conjuguées entre elles, et qu'elles forment, deux à deux, des produits de valeur constante. En effet, on reconnait facilement que ces racines peuvent être combinées deux à deux de sorte que le produit en soit égal à r.

Car, si l'équation n'a que des racines différentes de $\pm\sqrt{r}$, il faut seulement, pour cela, en réunir chacune à sa réciproque, savoir α à $\frac{r}{\alpha}$, β à $\frac{r}{\beta}$, γ à $\frac{r}{\gamma}$.... etc.; mais lorsqu'elle a des racines égales à $\pm\sqrt{r}$, il suffit d'en combiner successivement deux quelconques de même signe. Il n'y a qu'un seul cas qui fasse exception: c'est celui où, dans l'équation donnée, les racines $+\sqrt{r}$ et $-\sqrt{r}$ se trouvent chacune en nombre impair, et dans lequel on est obligé, par conséquent, de réunir au moins une fois $+\sqrt{r}$ à $-\sqrt{r}$, et d'admettre ainsi une combinaison égale à $-r$, produit de ces deux valeurs de signe contraire. Mais ce cas particulier n'infirme en rien l'exactitude de la proposition que nous venons d'avancer. Or, celle-ci étant juste, il s'ensuit encore que toute équation réciproque de degré pair est décomposable en autant de facteurs du second degré, qu'il y a d'unités dans la moitié de son degré; et que dans chacun de ces facteurs le dernier terme est toujours constant et généralement égal à r positif. Aussi voit-on que les racines d'une telle équation ont toujours la même forme que celles d'une équation du second degré, et qu'elles sont donc, deux à deux, ou réelles ou imaginaires.

5. Enfin, il nous reste encore à constater en dernier lieu, qu'en vertu de la relation établie entre les racines d'une équation réciproque, celle-ci ne peut subir aucun changement, lorsqu'on y remplace x par $\frac{r}{x}$. En effet, si l'on suppose que α, β, γ.... et par conséquent encore $\frac{r}{\alpha}$, $\frac{r}{\beta}$, $\frac{r}{\gamma}$.... soient les racines de l'équation donnée, celles de l'équation nouvelle, qui provient de la substitution indiquée seront nécessairement $\frac{r}{\alpha}$, $\frac{r}{\beta}$, $\frac{r}{\gamma}$.... et α, β, γ...., c'est-à-dire les mêmes qui satisfont à la première. Ainsi donc, celle-ci n'a changé par cette substitution ni de la réciprocité, ni de la valeur de ses racines, ni non plus par conséquent de sa forme. Cette particularité est d'une grande conséquence, et mérite bien d'être regardée, suivant l'opinion d'Euler, comme le caractère le plus distinctif des équations réciproques. Aussi est-elle on ne peut plus propre à nous servir de moyen pour en déterminer la forme générale, comme nous allons voir dans ce qui va suivre.

Forme des équations réciproques.

6. De même que les équations réciproques se distinguent des autres par la relation singulière qui existe entre leurs racines,

de même et encore plus elles se font reconnaître aussi par leur forme. Il sera donc important pour nous d'en prendre connaissance.

Remarquons d'abord, que toute équation du degré m, cette lettre désignant un nombre entier et positif, peut être mise sous la forme

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} \dots + A_k x^{m-k} \dots$$
$$\dots + A_{m-k} x^k \dots + A_{m-2} x^2 + A_{m-1} x + A_m = 0$$

dans laquelle $A_1, A_2, A_3, \dots A_k, \dots A_{m-k} \dots A_{m-2}, A_{m-1}, A_m$ sont des coefficients pris dans le sens algébrique le plus général. Supposé maintenant que cette équation représente une équation réciproque, il faut nécessairement, d'après ce qu'on vient de dire ci-dessus (n°. 5), qu'elle reste la même lorsqu'on y change x en $\frac{r}{x}$. En effectuant cette substitution, on obtiendra:

$$\frac{r^m}{x^m} + \frac{r^{m-1} A_1}{x^{m-1}} + \frac{r^{m-2} A_2}{x^{m-2}} \dots + \frac{r^{m-k} A_k}{x^{m-k}} \dots$$
$$\dots + \frac{r^k A_{m-k}}{x^k} \dots + \frac{r^2 A_{m-2}}{x^2} + \frac{r A_{m-1}}{x} + A_m = 0$$

ou bien, après avoir multiplié par x^m, divisé par A_m, et renversé l'ordre des termes,

$$x^m + \frac{r A_{m-1}}{A_m} x^{m-1} + \frac{r^2 A_{m-2}}{A_m} x^{m-2} \dots + \frac{r_k A_{m-k}}{A_m} x^{m-k} \dots$$
$$\dots + \frac{r^{m-k} A_k}{A_m} x^k \dots + \frac{r^{m-2} A_2}{A_m} x^2 + \frac{r^{m-1} A_1}{A_m} x + \frac{r^m}{A_m} = 0.$$

Pour que cette nouvelle équation s'accorde avec la proposée, il faut et il suffit que les termes affectés d'une même puissance de x soient égaux entre eux. On parviendra donc aux relations suivantes entre les coefficients de ces deux équations, savoir:

$$A_m = \frac{r^m}{A_m}, \text{ ou bien } A_m = \pm\sqrt{r^m} = \pm r^{\frac{m}{2}},$$
$$A_{m-1} = \frac{r^{m-1} A_1}{A_m} = \pm r^{\frac{m}{2}-1} A_1,$$
$$A_{m-2} = \frac{r^{m-2} A_2}{A_m} = \pm r^{\frac{m}{2}-2} A_2,$$

. . . .

$$A_{m-k} = \frac{r^{m-k} A_k}{A_m} = \pm r^{\frac{m}{2}-k} A_k,$$

. . . .

Remontant maintenant à l'équation primitive, on reconnaît qu'elle se réduit à

$$(\odot)\quad x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} \ldots. + A_k x^{m-k} \ldots.$$

$$\ldots. \pm r^{\frac{m}{2}-k} A_k x^k \ldots. \pm r^{\frac{m}{2}-2} A_2 x^2 \pm r^{\frac{m}{2}-1} A_1 x \pm r^{\frac{m}{2}} = 0.$$

Telle est donc la forme la plus générale sous laquelle une équation réciproque doit se présenter.

7. Ainsi on voit qu'une équation est réciproque, si les termes également distants des deux extrêmes sont tous ou de même signe ou de signe contraire, suivant que le dernier terme est pris positif ou négatif; et que les coefficients de ces termes ne diffèrent entre eux que d'un facteur égal à une puissance de r dont l'exposant est moindre que $\frac{m}{2}$ d'autant d'unités qu'il y a de termes après le dernier ou avant le premier des termes conjugués.

Ces deux conditions sont rigoureusement nécessaires, et se rapportent aux équations réciproques de tous les degrés. Quant à la première, il se peut pourtant qu'elle semble être en défaut. Car il existe des équations réciproques dans lesquelles les termes affectés d'une puissance de degré pair de r ont le même signe que ceux qui leur correspondent, tandis que les autres termes conjugués sont de signe contraire; et réciproquement. Mais il est aisé de voir que ces irrégularités proviennent de ce que r est lui-même de valeur négative, et que par conséquent les puissances de degré pair en sont positives, tandis que celles de degré impair sont négatives. Donc, elles ne sont qu'apparentes et nullement incompatibles avec la condition que nous avons adoptée. De même, les valeurs imaginaires de r pourraient donner naissance à certaines anomalies de signes, sans que cette condition en fût infirmée. Il ne sera pas difficile, au besoin, de s'en rendre compte.

8. Cependant toutes justes que sont ces conditions, elles ne suffisent pas tout-à-fait pour les équations réciproques de degré pair, puisqu'elles ne font pas reconnaître spécialement à quoi s'en tenir relativement au terme du milieu de ces équations. C'est pourquoi il sera nécessaire, afin de ne rien laisser à désirer, d'examiner à quelles conditions particulières ce terme doit être soumis.

Observons que le premier membre de toute équation complète du degré m contient en général $m+1$ termes. Donc, si

dans l'équation proposée m est supposé pair, le nombre total de ses termes sera impair, et il y aura un terme de milieu qui est précédé et suivi de $\frac{m}{2}$ autres termes, et qui doit par conséquent être désigné, d'après la notation convenue, par $A_{\frac{m}{2}} x^{\frac{m}{2}}$. De même, le terme correspondant de l'équation qui résulte de la substitution de $\frac{r}{x}$ au lieu de x dans l'équation proposée, sera $\frac{r^{\frac{m}{2}} A_{\frac{m}{2}}}{A_m} x^{\frac{m}{2}}$. Or, comme les coefficients de ces termes, conformément à ce que nous en avons déjà dit, doivent être égaux entre eux, il faut qu'on ait la relation

$$A_{\frac{m}{2}} = \frac{r^{\frac{m}{2}} A_{\frac{m}{2}}}{A_m}$$

d'où, en y substituant successivement les valeurs de A_m, qu'on vient d'obtenir plus haut, savoir

$$A_m = r^{\frac{m}{2}} \quad \text{et} \quad A_m = -r^{\frac{m}{2}}$$

l'on déduit les égalites suivantes:

$$1)\ A_{\frac{m}{2}} = A_{\frac{m}{2}} \quad \text{et} \quad 2)\ A_{\frac{m}{2}} = -A_{\frac{m}{2}}.$$

La première en est du nombre de celles qu'on nomme identiques; et il est donc absolument indifférent de quel coefficient le terme du milieu est affecté, pourvu que le dernier terme — abstraction faite de la valeur de r — soit positif. Mais la dernière renferme une absurdité à moins qu'on ne suppose $A_{\frac{m}{2}} = 0$. Il s'ensuit que dans toute équation de degré pair dont le dernier terme est négatif, le terme du milieu doit manquer. Cependant, ce terme peut toujours subsister, si la valeur négative du dernier terme provient de ce que r lui-même est négatif; de même qu'il n'y en aura pas si, malgré la valeur négative de r, le dernier terme de l'équation est positif.

9. En résumant enfin ce que nous avons dit jusqu'ici de la forme des équations réciproques, on reconnaîtra facilement qu'elles ne peuvent se présenter que sous une quelconque des quatre formes suivantes:

$$(A)\quad x^{2n}+A_1x^{2n-1}+A_2x^{2n-2}\ldots\ldots+A_kx^{2n-k}\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+A_{n-1}x^{n+1}+A_nx^n+rA_{n-1}x^{n-1}\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+r^{n-k}A_kx^k\ldots\ldots+r^{n-2}A_2x^2+r^{n-1}A_1x+r^n=0,$$

$$(B)\quad x^{2n}+A_1x^{2n-1}+A_2x^{2n-2}\ldots\ldots+A_kx^{2n-k}\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+A_{n-1}x^{n+1}-rA_{n-1}x^{n-1}\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots-r^{n-k}A_kx^k\ldots\ldots-r^{n-2}A_2x^2-r^{n-1}A_1x-r^n=0,$$

$$(C)\quad x^{2n+1}+A_1x^{2n}+A_2x^{2n-1}\ldots\ldots+A_kx^{2n-k+1}\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+A_{n-1}x^{n+2}+A_nx^{n+1}+\sqrt{r}A_nx^n+\sqrt{r^3}A_{n-1}x^{n-1}\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+r^{n-k}\sqrt{r}A_kx^k\ldots\ldots+r^{n-2}\sqrt{r}A_2x^2+r^{n-1}\sqrt{r}A_1x+r^n\sqrt{r}=0,$$

$$(D)\quad x^{2n+1}+A_1x^{2n}+A_2x^{2n-1}\ldots\ldots+A_kx^{2n-k+1}\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+A_{n-1}x^{n+2}+A_nx^{n+1}-\sqrt{r}A_nx^n-\sqrt{r^3}A_{n-1}x^{n-1}\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots-r^{n-k}\sqrt{r}A_kx^k\ldots\ldots-r^{n-2}\sqrt{r}A_2x^2-r^{n-1}\sqrt{r}A_1x-r^n\sqrt{r}=0,$$

dont les deux premières se rapportent aux équations de degré pair, et les dernières à celles de degré impair. Ainsi une équation quelconque étant donnée, on pourra aisément s'assurer, si elle est réciproque ou non, en faisant comparaison entre elle et celle de ces quatre formes qui est du même degré.

Pour faciliter encore cet examen, nous signalerons finalement quelques formes particulières dont les équations réciproques sont susceptibles, mais en nous restreignant, pour abréger, aux équations de degré pair, qui, comme nous allons voir plus bas, méritent le plus d'attention. Remarquons donc que, si r est supposé négatif, ces équations apparaîtront sous une quelconque des formes que voici:

$$(a)\quad x^{4n}+A_1x^{4n-1}+A_2x^{4n-2}+A_3x^{4n-3}+A_4x^{4n-4}\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+A_{2n-1}x^{2n+1}+\frac{1\pm1}{2}A_{2n}x^{2n}\mp rA_{2n-1}x^{2n-1}\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\pm r^{2n-4}A_4x^4\mp r^{2n-3}A_3x^3\pm r^{2n-2}A_2x^2\mp r^{2n-1}A_1x\pm r^{2n}=0,$$

$$(b)\quad x^{4n+2}+A_1x^{4n+1}+A_2x^{4n}+A_3x^{4n-1}+A_4x^{4n-2}\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+A_{2n}x^{2n+2}+\frac{1\pm1}{2}A_{2n+1}x^{2n+1}\mp rA_{2n}x^{2n}\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\mp r^{2n-3}A_4x^4\pm r^{2n-2}A_3x^3\mp r^{2n-1}A_2x^2\pm r^{2n}A_1x\mp r^{2n+1}=0.$$

Nous avons ajouté, dans ces formules, ainsi que dans celle qui va encore suivre, le facteur $\frac{1 \pm 1}{2}$ au terme du milieu pour indiquer que ce terme existe ou disparaît, suivant que l'on admet les signes supérieurs ou inférieurs dans les derniers termes.

Enfin si r est égal à l'unité, d'après la définition des équations réciproques laquelle nous avons désignée comme ordinairement adoptée, elles seront de la forme suivante:

$$(c) \quad x^{2n} + A_1 x^{2n-1} + A_2 x^{2n-2} \ldots + A_k x^{2n-k} \ldots$$
$$\ldots + A_{n-1} x^{n+1} + \frac{1 \pm 1}{2} A_n x^n \pm A_{n-1} x^{n-1} \ldots$$
$$\ldots \pm A_k x^k \ldots \pm A_2 x^2 \pm A_1 x \pm 1 = 0,$$

dans laquelle il faut surtout remarquer que les coefficients des termes à égale distance des deux extrêmes sont égaux entre eux, tandis qu'ils sont communément différents. Du reste, on peut ramener toujours toute équation réciproque à une forme pareille, en y substituant $x\sqrt{r}$ au lieu de x, et en la divisant ensuite par son dernier terme.

Principe fondamental de la résolution des équations réciproques.

10. Après avoir fait connaître la forme des équations réciproques, il convient d'exposer la méthode au moyen de laquelle on peut en déterminer les racines. Or, comme toute équation de degré impair se vérifie au moins une fois par la valeur $\pm\sqrt{r}$ de x, d'après ce que nous avons dit plus haut (n°. 3), et qu'elle est donc divisible par $x \mp \sqrt{r}$ en vertu de certains principes analytiques; il ne s'agit que de trouver les moyens pour résoudre les équations réciproques de degré pair. Mais on sait déjà (voy. no. 4) que dans toute équation de ce degré les racines vont par couples et forment deux à deux des produits d'une valeur constante et connue. Supposons, par exemple, que α, $\frac{r}{\alpha}$; β, $\frac{r}{\beta}$; γ, $\frac{r}{\gamma}$;.... etc. soient les racines de l'équation proposée, on connaît déjà d'avance les produits $\alpha \times \frac{r}{\alpha}$, $\beta \times \frac{r}{\beta}$, $\gamma \times \frac{r}{\gamma}$, etc. Donc il suffira, pour obtenir les valeurs mêmes de ces racines, d'en connaître encore les sommes $\alpha + \frac{r}{\alpha}$, $\beta + \frac{r}{\beta}$, $\gamma + \frac{r}{\gamma}$...., ou ce qui revient au même,

les valeurs de la fonction algébrique $x+\frac{r}{x}$. Car, le produit et la somme de deux racines étant connus, la détermination n'en dépend plus que de la résolution d'une équation du second degré.

C'est pourquoi nous sommes conduits à supposer dans toute équation réciproque de degré pair

$$x+\frac{r}{x}=y$$

et à essayer de déterminer dans l'équation qui résulte de cette substitution, les valeurs de y. Celles-ci étant trouvées, il sera facile de calculer les racines de l'équation proposée à l'aide de la formule

$$(♁) \qquad x=\tfrac{1}{2}(y\pm\sqrt{y^2-4r}),$$

qui se déduit de l'hypothèse qu'on vient de faire tout à l'heure. Il suit de la nature de cette relation qu'à chaque valeur de y doivent correspondre deux valeurs de x; circonstance qui est très-importante à retenir dans le cas où l'équation en y est satisfaite par $y=\pm 2\sqrt{r}$, puisqu'alors on doit admettre, dans l'équation primitive, deux racines égales à $+\sqrt{r}$ ou à $-\sqrt{r}$. Ainsi, le nombre des racines de l'équation proposée sera nécessairement le double de celui des racines de l'équation dérivée.

Formule de substitution.

11. Pour faciliter l'introduction de y au lieu de $x+\frac{r}{x}$ dans une équation réciproque quelconque, nous ferons auparavant connaître une formule qui nous servira à exprimer les sommes des puissances semblables de x et de $\frac{r}{x}$ par des puissances de y; c'est-à-dire nous allons développer l'expression $x^n+\frac{r^n}{x^n}$ en une série qui procède suivant les puissances décroissantes de y.

D'après la formule dite du binôme, on a toujours

$$\left(x+\frac{r}{x}\right)^n = x^n+n_1rx^{n-2}+n_2r^2x^{n-4}+n_3r^3x^{n-6}\dots+n_kr^kx^{n-2k}\dots$$
$$\dots+n_k\frac{r^{n-k}}{x^{n-2k}}\dots+n_3\frac{r^{n-3}}{x^{n-6}}+n_2\frac{r^{n-2}}{x^{n-4}}+n_1\frac{r^{n-1}}{x^{n-2}}+\frac{r^n}{x^n}.$$

n étant un nombre entier positif, et n_1, n_2, n_3, ... n_k etc. dési-

gnant les coefficients dits du binôme, savoir les quotients $\frac{n}{1}$, $\frac{n(n-1)}{1.2}$, $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$, ... $\frac{n(n-1)....(n-k+1)}{1.2....k}$ .... etc. Réunissant les termes affectés de mêmes coefficients, et remplaçant $x+\frac{r}{x}$ par y on aura donc

$$y^n=(x^n+\frac{r^n}{x^n})+n_1r(x^{n-2}+\frac{r^{n-2}}{x^{n-2}})+n_2r^2(x^{n-4}+\frac{r^{n-4}}{x^{n-4}})$$
$$+n_3r^3(x^{n-6}+\frac{r^{n-6}}{x^{n-6}})....+n_kr^k(x^{n-2k}+\frac{r^{n-2k}}{x^{n-2k}})....\text{ etc.},$$

d'où l'on tire

$$(1)\quad x^n+\frac{r^n}{x^n}=y^n-n_1r(x^{n-2}+\frac{r^{n-2}}{x^{n-2}})-n_2r^2(x^{n-4}+\frac{r^{n-4}}{x^{n-4}})$$
$$....-n_kr^k(x^{n-2k}+\frac{r^{n-2k}}{x^{n-2k}})\text{ etc.}.$$

On peut en conclure que la somme $x^n+\frac{r^n}{x^n}$ est susceptible d'être développée en une série de la forme

$$x^n+\frac{r^n}{x^n}=y^n+ay^{n-2}+by^{n-4}+cy^{n-6}+dy^{n-8}+...$$

dans laquelle a, b, c, d.... désignent des coefficients fonctions de n, mais indépendants de x et par conséquent aussi de y; coefficients qu'il s'agit d'ailleurs de déterminer encore. Pour y parvenir, observons que l'on peut déduire de l'identité (1) ci-dessus, n étant un nombre arbitraire, encore les identités suivantes :

$$(2)\quad x^{n-2}+\frac{r^{n-2}}{x^{n-2}}=y^{n-2}-(n-2)_1r[x^{n-4}+\frac{r^{n-4}}{x^{n-4}}]$$
$$-(n-2)_2r^2[x^{n-6}+\frac{r^{n-6}}{x^{n-6}}]-(n-2)_3r^3[x^{n-8}+\frac{r^{n-8}}{x^{n-8}}]-\text{etc.},$$

$$(3)\quad x^{n-4}+\frac{r^{n-4}}{x^{n-4}}=y^{n-4}-(n-4)_1r[x^{n-6}+\frac{r^{n-6}}{x^{n-6}}]$$
$$-(n-4)_2r^2[x^{n-8}+\frac{r^{n-8}}{x^{n-8}}]-(n-4)_3r^3[x^{n-10}+\frac{r^{n-10}}{x^{n-10}}]-\text{etc.},$$

$$(4)\quad x^{n-6}+\frac{r^{n-6}}{x^{n-6}}=y^{n-6}-(n-6)_1r[x^{n-8}+\frac{r^{n-8}}{x^{n-8}}]$$
$$-(n-6)_2r^2[x^{n-10}+\frac{r^{n-10}}{x^{n-10}}]-\text{etc.},$$

$$(5)\quad x^{n-8}+\frac{r^{n-8}}{x^{n-8}}=y^{n-8}-(n-8)_1 r\left[x^{n-10}+\frac{r^{n-10}}{x^{n-10}}\right]$$
$$-(n-8)_2 r^2\left[x^{n-12}+\frac{r^{n-12}}{x^{n-12}}\right]-\text{etc.}$$

. . . .

et ainsi de suite.

En additionnant maintenant toutes ces égalités, à partir de la première, après avoir multiplié auparavant la deuxième par a, la troisième par b, la quatrième par c,.... l'on trouve

$$\left(x^n+\frac{r^n}{x^n}\right)+a\left(x^{n-2}+\frac{r^{n-2}}{x^{n-2}}\right)+b\left(x^{n-4}+\frac{r^{n-4}}{x^{n-4}}\right)+c\left(x^{n-6}+\frac{r^{n-6}}{x^{n-6}}\right)+\text{etc.}$$
$$=y^n+ay^{n-2}+by^{n-4}+cy^{n-6}+dy^{n-8}+\text{etc.}$$
$$-n_1 r\left[x^{n-2}+\frac{r^{n-2}}{x^{n-2}}\right]-\left[n_2 r^2+a(n-2)_1 r\right]\left[x^{n-4}+\frac{r^{n-4}}{x^{n-4}}\right]$$
$$-\left[n_3 r^3+a(n-2)_2 r^2+b(n-4)_1 r\right]\left[x^{n-6}+\frac{r^{n-6}}{x^{n-6}}\right]$$
$$-\left[n_4 r^4+a(n-2)_3 r^3+b(n-4)_2 r^2+c(n-6)_1 r\right]\left[x^{n-8}+\frac{r^{n-8}}{x^{n-8}}\right]$$
$$-\left[n_5 r^5+a(n-2)_4 r^4+b(n-4)_3 r^3+c(n-6)_2 r^2+d(n-8)_1 r\right]\left[x^{n-10}+\frac{r^{n-10}}{x^{n-10}}\right]$$
$$-\text{etc.}\ldots\ldots$$

Or, nous avons déjà supposé

$$x^n+\frac{r^n}{x^n}=y^n+ay^{n-2}+by^{n-4}+cy^{n-6}+\text{etc.}\ \ldots.$$

donc il faut, pour que l'équation nouvellement obtenue puisse subsister, qu'on ait les relations

$$a=-n_1 r,$$
$$b=-\left[n_2 r^2+a(n-2)_1 r\right],$$
$$c=-\left[n_3 r^3+a(n-2)_2 r^2+b(n-4)_1 r\right],$$
$$d=-\left[n_4 r^4+a(n-2)_3 r^3+b(n-4)_2 r^2+c(n-6)_1 r\right],$$
$$e=-\left[n_5 r^5+a(n-2)_4 r^4+b(n-4)_3 r^3+c(n-6)_2 r^2+d(n-8)_1 r\right],$$

. . . .

et ainsi de suite; d'où l'on déduit, tout calcul fait,

$$a = -nr,$$

$$b = \frac{n(n-3)}{1.2}r^2 = \frac{(n-3)_1 n}{2}r^2,$$

$$c = -\frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}r^3 = -\frac{(n-4)_2 n}{3}r^3,$$

$$d = \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1.2.3.4}r^4 = \frac{(n-5)_3 n}{4}r^4,$$

$$e = -\frac{n(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{1.2.3.4.5}r^5 = -\frac{(n-6)_4 n}{5}r^5.$$

. . . .

Ainsi, l'on obtient pour la série demandée

$$(\delta)\quad x^n + \frac{r^n}{x^n} = y^n - nry^{n-2} + \frac{(n-3)n}{2}r^2y^{n-4} - \frac{(n-4)_2 n}{3}r^3y^{n-6}$$

$$+ \frac{(n-5)_3 n}{4}r^4y^{n-8} - \frac{(n-6)_4 n}{5}r^5y^{n-10} + \frac{(n-7)_5 n}{6}r^6y^{n-12}\ldots$$

$$+ (-1)^k\frac{(n-k-1)_{k-1}n}{k}r^ky^{n-2k}\ldots\text{ etc.},$$

et continuant jusqu'à ce qu'on arrive à des puissances négatives de y.

12. On pourrait encore parvenir au même résultat de la manière suivante, qui est analogue à celle que Lagrange, ce grand analyste français, a suivie dans les „Mémoires de l'académie de Berlin“ pour l'année 1768, pour trouver la somme des puissances d'un degré quelconque de toutes les racines d'une équation donnée.

D'abord on sait par la théorie générale des équations, qu'en admettant x et $\frac{r}{x}$ comme racines d'une équation du second degré, et supposant $x + \frac{r}{x} = y$, d'après l'hypothèse que nous avons faite ci-dessus, on aura nécessairement

$$r - yz + z^2 = 0, \quad \text{ou bien} \quad r\left(1 - \frac{z}{x}\right)\left(1 - \frac{xz}{r}\right) = 0.$$

Donc, si l'on égale ces deux expressions identiques, et qu'on en divise encore chacune par r, on obtiendra

$$1 - \frac{yz}{r} + \frac{z^2}{r} = \left(1 - \frac{z}{x}\right)\left(1 - \frac{xz}{r}\right),$$

d'où l'on tire, en prenant les logarithmes de part et d'autre

$$(1) \qquad l\left(1-\frac{yz}{r}+\frac{z^2}{r}\right)=l\left(1-\frac{z}{x}\right)+l\left(1-\frac{xz}{r}\right).$$

Or, on a en général dans le système népérien

$$l(1\pm u)=\pm u-\frac{u^2}{2}\pm\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}\pm\frac{u^5}{5}-\dots \text{ etc.}$$

Le dernier membre de l'équation précédente (1) deviendra donc égal à

$$-z\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{r}\right)-\frac{z^2}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{x^2}{r^2}\right)-\frac{z^3}{3}\left(\frac{1}{x^3}+\frac{x^3}{r^3}\right)\dots-\frac{z^n}{n}\left(\frac{1}{x^n}+\frac{x^n}{r^n}\right)-\text{etc.}$$

ou bien égal à

$$(2)$$

$$-\left(x+\frac{r}{x}\right)\frac{z}{r}-\left(x^2+\frac{r^2}{x^2}\right)\frac{z^2}{2r^2}-\left(x^3+\frac{r^3}{x^3}\right)\frac{z^3}{3r^3}\dots-\left(x^n+\frac{r^n}{x^n}\right)\frac{z^n}{nr^n}-\text{ etc.}$$

Quant à son premier membre, il peut être transformé en

$$l\left\{\left(1-\frac{yz}{r}\right)\left(1+\frac{z^2}{r\left(1-\frac{yz}{r}\right)}\right)\right\}$$

ou en

$$l\left(1-\frac{yz}{r}\right)+l\left(1+\frac{z^2}{r-yz}\right)$$

et sera donc égal à

$$-\frac{yz}{r}-\frac{y^2z^2}{2r^2}-\frac{y^3z^3}{3r^3}-\frac{y^4z^4}{4r^4}\dots-\frac{y^nz^n}{nr^n}-\text{ etc.}\dots$$

$$+\frac{z^2}{r-yz}-\frac{z^4}{2(r-yz)^2}+\frac{z^6}{3(r-yz)^3}-\frac{z^8}{4(r-yz)^4}+\frac{z^{10}}{5(r-yz)^5}-\text{etc.}$$

Or, il est facile de développer les derniers quotients de cette expression en séries récurrentes, et l'on trouvera

$$\frac{z^2}{r-yz}=\frac{z^2}{r}+\frac{yz^3}{r^2}+\frac{y^2z^4}{r^3}+\frac{y^3z^5}{r^4}+\frac{y^4z^6}{r^5}\dots+\frac{y^{n-2}z^n}{r^{n-1}}+\text{ etc.},$$

$$\frac{z^4}{2(r-yz)^2}=\frac{1}{2}\left[\frac{z^4}{r^2}+\frac{2yz^5}{r^3}+\frac{3y^2z^6}{r^4}+\frac{4y^3z^7}{r^5}\dots+\frac{(n-3)y^{n-4}z^n}{r^{n-2}}+\text{etc.}\right],$$

$$\frac{z^6}{3(r-yz)^3}=\frac{1}{3}\left[\frac{z^6}{r^3}+\frac{3yz^7}{r^4}+\frac{6y^2z^8}{r^5}+\frac{10y^3z^9}{r^6}\dots+\frac{(n-4)_2y^{n-6}z^n}{r^{n-3}}+\text{etc.}\right],$$

$$\frac{z^8}{4(r-yz)^4}=\frac{1}{4}\left[\frac{z^8}{r^4}+\frac{4yz^9}{r^5}+\frac{10y^2z^{10}}{r^6}+\frac{20y^3z^{11}}{r^7}\ldots+\frac{(n-5)_3y^{n-8}z^n}{r^{n-4}}+\text{etc.}\right],$$

$$\frac{z^{10}}{5(r-yz)^5}=\frac{1}{5}\left[\frac{z^{10}}{r^5}+\frac{5yz^{11}}{r^6}+\frac{15y^2z^{12}}{r^7}+\frac{35y^3z^{13}}{r^8}\ldots+\frac{(n-6)_4y^{n-10}z^n}{r^{n-5}}+\text{etc.}\right].$$

. . . .

et ainsi de suite. Substituant donc ces séries dans l'expression précédente, et réunissant les termes affectés des mêmes puissances de z, on aura

$$-\frac{y}{r}z-\left(\frac{y^2}{2r^2}-\frac{1}{r}\right)z^2-\left(\frac{y^3}{3r^3}-\frac{y}{r^2}\right)z^3-\left(\frac{y^4}{4r^4}-\frac{y^2}{r^3}+\frac{1}{2r^2}\right)z^4$$

$$-\left(\frac{y^5}{5r^5}-\frac{y^3}{r^4}+\frac{y}{r^3}\right)z^5-\left(\frac{y^6}{6r^6}-\frac{y^4}{r^5}+\frac{3y^2}{2r^4}-\frac{1}{3r^3}\right)z^6\ldots$$

$$\ldots-\left(\frac{y^n}{nr^n}-\frac{y^{n-2}}{r^{n-1}}+\frac{(n-3)y^{n-4}}{2r^{n-2}}-\frac{(n-4)_2y^{n-6}}{3r^{n-3}}+\frac{(n-5)_3y^{n-8}}{4r^{n-4}}\right.$$

$$\left.-\frac{(n-6)_4y^{n-10}}{5r^{n-5}}+\text{etc.}\right)z^n-\text{etc.},$$

ou bien aussi

(3)

$$-y\cdot\frac{z}{r}-(y^2-2r)\frac{z^2}{2r^2}-(y^3-3ry)\frac{z^3}{3r^3}-(y^4-4ry^2+2r^2)\frac{z^4}{4r^4}$$

$$-(y^5-5ry^3+5r^2y)\frac{z^5}{5r^5}-(y^6-6ry^4+9r^2y^2-2r^3)\frac{z^6}{6r^6}$$

$$-(y^7-7ry^5+14r^2y^3-7r^3y)\frac{z^7}{7r^7}-\cdot$$

$$\ldots-\left(y^n-nry^{n-2}+\frac{(n-3)n}{2}r^2y^{n-4}-\frac{(n-4)_2n}{3}r^3y^{n-6}\right.$$

$$\left.+\frac{(n-5)_3n}{4}r^4y^{n-8}-\text{etc.}\right)\frac{z}{nr^n}-\text{etc.}$$

Mais pour que cette expression puisse s'accorder avec la série (2) ci-dessus, il faut admettre les équations suivantes:

$$x+\frac{r}{x}=y,$$

$$x^2+\frac{r^2}{x^2}=y^2-2r,$$

$$x^3+\frac{r^3}{x^3}=y^3-3ry,$$

$$x^4+\frac{r^4}{x^4}=y^4-4ry^2+2r^2,$$

$$x^5+\frac{r^5}{x^5}=y^5-5ry^3+5r^2y,$$

$$x^6+\frac{r^6}{x^6}=y^6-6ry^4+9r^2y^2-2r^3,$$

$$x^7+\frac{r^7}{x^7}=y^7-7ry^5+14r^2y^3-7r^3y,$$

. . . .

$$x^n+\frac{r^n}{x^n}=y^n-nry^{n-2}+\frac{(n-3)n}{2}r^2y^{n-4}-\frac{(n-4)_2n}{3}r^3y^{n-6}$$
$$+\frac{(n-5)_3n}{4}r^4y^{n-8}-\text{etc.},$$

dont la dernière n'est évidemment autre chose que la série que nous avons déjà trouvée plus haut (n°. 11) par le secours de la formule du binôme. Quant aux premières, ce ne sont que des formes particulières de cette série qui correspondent à des valeurs particulières de n. Nous verrons plus bas quel en sera l'usage dans les équations réciproques.

13. Il existe d'ailleurs encore une autre relation entre x et y qui peut remplacer jusqu'à un certain point la série générale ci-dessus. Telle est la relation

$$x^{n+1}+\frac{r^{n+1}}{x^{n+1}}=(x^n+\frac{r^n}{x^n})y-r(x^{n-1}+\frac{r^{n-1}}{x^{n-1}})$$

qu'il est facile d'établir, et qui sert à exprimer la somme des mêmes puissances de x et de $\frac{r}{x}$ au moyen de celles de degrés immédiatement inférieurs. En effet, en faisant successivement $n=1, 2, 3, 4,$ etc., on trouve

$$x^2+\frac{r^2}{x^2}=(x+\frac{r}{x})y-r(x^0+\frac{r^0}{x^0})=y^2-2r,$$

$$x^3+\frac{r^3}{x^3}=(x^2+\frac{r^2}{x^2})y-r(x+\frac{r}{x})=y^3-3ry,$$

$$x^4+\frac{r^4}{x^4}=(x^3+\frac{r^3}{x^3})y-r(x^2+\frac{r^2}{x^2})=y^4-4ry^2+2r^2,$$

$$x^5+\frac{r^5}{x^5}=(x^4+\frac{r^4}{x^4})y-r(x^3+\frac{r^3}{x^3})=y^5-5ry^3+5r^2y,$$

. . . .

et ainsi de suite à l'infini. Cette relation nous fournit donc les mêmes résultats que la série (δ) ci-dessus. Mais celle-ci a l'avantage d'être bien plus expéditive et plus commode que la dernière formule, puisqu'elle se rapporte à telle valeur de n que l'on voudra, sans avoir recours, comme l'autre, aux valeurs précédentes de ce nombre.

---

14. Voici, en dernier lieu, encore quelques formes particulières de cette série, qu'il est bon de connaître pour avoir plus de facilité dans ses applications, et qui se rapportent à certaines valeurs de r. Si l'on suppose, par exemple, que r soit négatif, le premier membre de cette série devient égal à $x^n + \frac{r^n}{x^n}$ ou à $x^n - \frac{r^n}{x^n}$, suivant que n est pair ou impair, et l'on aura

$$x^n \pm \frac{r^n}{x^n} = y^n + nry^{n-2} + \frac{(n-3)n}{2} r^2 y^{n-4} + \frac{(n-4)_2 n}{3} r^3 y^{n-6} + \frac{(n-5)_3 n}{4} r^4 y^{n-8} + \text{etc.}$$

Enfin, si l'on fait $r = 1$, cette série se réduit à

$$x^n + \frac{1}{x^n} = y^n - ny^{n-2} + \frac{(n-3)n}{2} y^{n-4} - \frac{(n-4)_2 n}{3} y^{n-6} + \frac{(n-5)_3 n}{4} y^{n-8} - \frac{(n-6)_4 n}{5} y^{n-10} + \text{etc.}$$

Sous cette dernière forme elle s'applique donc aux équations qui sont appelées réciproques dans le sens le plus restreint, mais le plus usité de ce mot.

Résolution des équations réciproques de degré pair.

15. En reprenant actuellement les recherches relatives à la résolution des équations réciproques, nous tâcherons en premier lieu de faire savoir, comment on parvient à la résolution de celles de degré pair, qui sont de la forme suivante:

$$\text{(A)} \quad x^{2n} + A_1 x^{2n-1} + A_2 x^{2n-2} \ldots + A_k x^{2n-k} \ldots \ldots + A_{n-1} x^{n+1} + A_n x^n + r A_{n-1} x^{n-1} \ldots \ldots + r^{n-k} A_k x^k \ldots + r^{n-2} A_2 x^2 + r^{n-1} A_1 x + r^n = 0.$$

Observons donc que, si l'on divise cette équation par x^n et qu'on rassemble les termes à égale distance des deux extrêmes, on obtient la transformée:

$$(x^n + \frac{r^n}{x^n}) + A_1 (x^{n-1} + \frac{r^{n-1}}{x^{n-1}}) + A_2 (x^{n-2} + \frac{r^{n-2}}{x^{n-2}}) \ldots \ldots + A_k (x^{n-k} + \frac{r^{n-k}}{x^{n-k}}) \ldots + A_{n-2} (x^2 + \frac{r^2}{x^2}) + A_{n-1} (x + \frac{r}{x}) + A_n = 0.$$

Remplaçant maintenant les sommes mises en parenthèses par leurs valeurs en y, qui résultent de la série ($\mathfrak{z}$) du chapitre précédent, l'on trouve

$$y^n - nry^{n-2} + \frac{(n-3)n}{2}r^2y^{n-4} - \frac{(n-4)_2 n}{3}r^3y^{n-6} + \frac{(n-5)_3 n}{4}r^4y^{n-8} - \text{etc.} \ldots$$

$$+ A_1[y^{n-1} - (n-1)ry^{n-3} + \frac{(n-4)(n-1)}{2}r^2y^{n-5}$$
$$- \frac{(n-5)_2(n-1)}{3}r^3y^{n-7} + \frac{(n-6)_3(n-1)}{4}r^4y^{n-9} \ldots]$$

$$+ A_2[y^{n-2} - (n-2)ry^{n-4} + \frac{(n-5)(n-2)}{2}r^2y^{n-6}$$
$$- \frac{(n-6)_2(n-2)}{3}r^3y^{n-8} + \frac{(n-7)_3(n-2)}{4}r^4y^{n-10} \ldots]$$

$$+ A_3[y^{n-3} - (n-3)ry^{n-5} + \frac{(n-6)(n-3)}{2}r^2y^{n-7}$$
$$- \frac{(n-7)_2(n-3)}{3}r^3y^{n-9} + \frac{(n-8)_3(n-3)}{4}r^4y^{n-11} \ldots]$$

. . . .

$$+ A_k[y^{n-k} - (n-k)ry^{n-k-2} + \frac{(n-k-3)(n-k)}{2}r^2y^{n-k-4}$$
$$- \frac{(n-k-4)_2(n-k)}{3}r^3y^{n-k-6} + \text{etc.} \ldots]$$

. . . .

$$+ A_{n-3}[y^3 - 3ry] + A_{n-2}[y^2 - 2r] + A_{n-1}y + A_n = 0,$$

ou bien, ordonnant et réunissant les mêmes puissances de y,

$$(1) \quad y^n + A_1y^{n-1} + [A_2 - nr]y^{n-2} + [A_3 - (n-1)rA_1]y^{n-3}$$
$$+ [A_4 - (n-2)rA_2 + \frac{(n-3)n}{2}r^2]y^{n-4}$$
$$+ [A_5 - (n-3)rA_3 + \frac{(n-4)(n-1)}{2}r^2A_1]y^{n-5}$$
$$+ [A_6 - (n-4)rA_4 + \frac{(n-5)(n-2)}{2}r^2A_2 - \frac{(n-4)_2 n}{3}r^3]y^{n-6}$$

. . . .

$$+ [A_k - (n-k+2)rA_{k-2} + \frac{(n-k+1)(n-k+4)}{2}r^2A_{k-4}$$
$$- \frac{(n-k+2)_2(n-k+6)}{3}r^3A_{k-6}$$
$$+ \frac{(n-k+3)_3(n-k+8)}{4}r^4A_{k-8} - \text{etc.}]y^{n-k}$$

. . . .

$$+ [A_{n-2} - 4rA_{n-4} + 9r^2A_{n-6} - 16r^3A_{n-8} \ldots]y^2$$
$$+ [A_{n-1} - 3rA_{n-3} + 5r^2A_{n-5} - 7r^3A_{n-7} \ldots]y$$
$$+ [A_n - 2rA_{n-2} + 2r^2A_{n-4} - 2r^3A_{n-6} + 2r^4A_{n-8} \ldots] = 0.$$

Telle est donc l'équation qu'il nous reste encore à résoudre. Notons bien qu'elle est du degré n, tandis que l'équation proposée est du degré $2n$.

Il s'ensuit que pour parvenir à la résolution d'une équation réciproque de degré pair et de la forme (A) du nº. 9, il suffit de résoudre une équation de degré sous-double, qu'on obtient par la substitution de y à la place de $x+\frac{r}{x}$ dans l'équation donnée. Ayant déterminé les valeurs de y, on aura celles de x à l'aide de la formule (♁) du nº. 10.

16. Soit, par exemple, à résoudre l'équation:

$$x^8-3{,}5x^7-42x^6+284x^5-776x^4+1136x^3-672x^2-224x+256=0$$

qui provient de la formule (A) du nº. 9, si l'on y suppose

$$\begin{array}{r|r|r} 2n=8 & A_1=-3{,}5 & A_3=\;\;284 \\ r=4 & A_2=-42 & A_4=-776. \end{array}$$

En faisant application de la méthode que nous venons d'exposer, on réduira cette équation à la suivante:

$$y^4-3{,}5y^3-58y^2+326y-408=0$$

qui étant résolue d'après les règles analytiques relatives à la résolution des équations du quatrième degré, donne

$$y=2;\quad y=4;\quad y=6;\quad y=-8{,}5.$$

Portant chacune de ces valeurs dans la relation (♁) du nº. 10 on trouve huit valeurs de x, savoir:

$$1\pm\sqrt{-3};\quad 2,\ 2;\quad 3\pm\sqrt{5};\quad -8,\ -0{,}5.$$

Ce sont donc les huit racines de l'équation proposée.

17. Discutons, en second lieu, les moyens de résoudre une équation réciproque de la forme:

$$\begin{aligned}(\mathrm{B})\quad & x^{2n}+A_1x^{2n-1}+A_2x^{2n-2}\ldots\ldots+A_kx^{2n-k}\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots+A_{n-1}x^{n+1}-rA_{n-1}x^{n-1}\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots-r^{n-k}A_kx^k\ldots\ldots-r^{n-2}A_2x^2-r^{n-1}A_1x-r^n=0.\end{aligned}$$

On reconnait d'abord facilement que cette équation se vérifie par les deux valeurs $+\sqrt{r}$ et $-\sqrt{r}$ de x. Car, comme le dernier terme de toute équation représente toujours le produit de toutes ses racines, et que dans une équation réciproque de degré pair,

d'après ce que nous avons vu au n°. 4, les racines peuvent toujours être combinées deux à deux de sorte qu'elles ne forment que des produits égaux à $+r$, à moins que les deux racines $+\sqrt{r}$ et $-\sqrt{r}$ ne s'y trouvent chacune en nombre impair; il est évident que le dernier terme d'une telle équation ne peut être négatif (abstraction faite de la valeur de r), que dans ce même cas exceptionnel. Donc, chacune de ces deux racines particulières doit se trouver au moins une fois dans l'équation proposée. On pourra, du reste, s'en convaincre encore davantage, si l'on y substitue $\pm\sqrt{r}$ au lieu de x; car elle deviendra identique de cette manière.

Il en résulte nécessairement que cette équation est divisible par le produit $(x+\sqrt{r})(x-\sqrt{r})$, ou, ce qui revient au même, par x^2-r. En effectuant cette division, on obtiendra donc pour quotient une équation du degré $2n-2$ et de la forme suivante:

$$\text{(Bb)} \quad x^{2n-2}+B_1 x^{2n-3}+B_2 x^{2n-4}\ldots\ldots+B_k x^{2n-k-2}\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+B_{n-2}x^n+B_{n-1}x^{n-1}+B_n x^{n-2}\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+B_{2n-k-2}x^k\ldots\ldots+B_{2n-4}x^2+B_{2n-3}x+B_{2n-2}=0.$$

Afin de déterminer les coefficients B_1, B_2, $B_3\ldots\ldots$ etc. encore inconnus, multiplions l'équation même par x^2-r; ce qui donne:

$$x^{2n}+B_1 x^{2n-1}+(B_2-r)x^{2n-2}+(B_3-rB_1)x^{2n-3}\ldots+(B_k-rB_{k-2})x^{2n-k}\ldots$$
$$\ldots\ldots+(B_{n-2}-rB_{n-4})x^{n+2}+(B_{n-1}-rB_{n-3})x^{n+1}$$
$$+(B_n-rB_{n-2})x^n+(B_{n+1}-rB_{n-1})x^{n-1}\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+(B_{2n-k}-rB_{2n-k-2})x^k\ldots\ldots+(B_{2n-3}-rB_{2n-5})x^3$$
$$+(B_{2n-2}-rB_{2n-4})x^2-rB_{2n-3}x-rB_{2n-2}=0.$$

Comme ce produit doit être identique avec l'équation (B) ci-dessus, on est obligé de supposer:

$A_1=B_1$	. . . .	$r^{n-k}A_k=rB_{2n-k-2}-B_{2n-k}$
$A_2=B_2-r$	$A_{n-2}=B_{n-2}-rB_{n-4}$	. . . .
$A_3=B_3-rB_1$	$A_{n-1}=B_{n-1}-rB_{n-3}$	$r^{n-3}A_3=rB_{2n-5}-B_{2n-3}$
$A_4=B_4-rB_2$	$A_n=B_n-rB_{n-2}=0$	$r^{n-2}A_2=rB_{2n-4}-B_{2n-2}$
. . . .	$rA_{n-1}=rB_{n-1}-B_{n+1}$	$r^{n-1}A_1=rB_{2n-3}$
$A_k=B_k-rB_{k-2}$	. . . .	$r^n=rB_{2n-2}$

d'où l'on déduit successivement

$$B_1 = A_1$$
$$B_2 = A_2 + r$$
$$B_3 = A_3 + rA_1$$
$$B_4 = A_4 + rA_2 + r^2$$
. . . .
$$B_k = A_k + rA_{k-2} + r^2A_{k-4} + \text{etc.}$$

. . . .
$$B_{n-2} = A_{n-2} + rA_{n-4} + r^2A_{n-6} + \text{etc.}$$
$$B_{n-1} = A_{n-1} + rA_{n-3} + r^2A_{n-5} + \text{etc.}$$
$$B_n \quad = rB_{n-2}$$
$$B_{n+1} = r(B_{n-1} - A_{n-1}) = r^2B_{n-3}$$
. . . .

$$B_{2n-k-2} = r^{n-k-1}(A_k + rA_{k-2} + r^2A_{k-4} + \text{etc.})$$
. . . .
$$B_{2n-5} = r^{n-4}(A_3 + rA_1)$$
$$B_{2n-4} = r^{n-3}(A_2 + r)$$
$$B_{2n-3} = r^{n-2}A_1,$$
$$B_{2n-2} = r^{n-1}.$$

Par la substitution de ces valeurs, l'équation (Bb) ci-dessus devient

$$x^{2n-2} + A_1x^{2n-3} + (A_2+r)x^{2n-4} \ldots + (A_k + rA_{k-2} + r^2A_{k-4} + \text{etc.})x^{2n-k-2}$$
$$\ldots + (A_{n-2} + rA_{n-4} + \text{etc.})x^n + (A_{n-1} + rA_{n-3} + \text{etc.})x^{n-1}$$
$$+ r(A_{n-2} + rA_{n-4} + \text{etc.})x^{n-2} \ldots + r^{n-k-1}(A_k + rA_{k-2} + \text{etc.})x^k \ldots$$
$$\ldots + r^{n-3}(A_2 + r)x^2 + r^{n-2}A_1x + r^{n-1} = 0,$$

d'où l'on voit qu'elle est de même forme qu'une équation réciproque de la forme (A) du n°. 9, que nous avons déjà appris à résoudre au numéro précédent.

En y appliquant donc la formule (I) de ce numéro, laquelle représente l'équation résultant de la proposée par l'introduction de y au lieu de $x + \frac{r}{x}$, on obtiendra pour réduite

$$y^{n-1} + B_1y^{n-2} + [B_2 - (n-1)r]y^{n-3} + [B_3 - (n-2)rB_1]y^{n-4}$$
$$+ [B_4 - (n-3)rB_2 + \frac{(n-4)(n-1)}{2}r^2]y^{n-5}$$
$$+ [B_5 - (n-4)rB_3 + \frac{(n-5)(n-2)}{2}r^2B_1]y^{n-6}$$
$$+ [B_6 - (n-5)rB_4 + \frac{(n-6)(n-3)}{2}r^2B_2 - \frac{(n-5)_2(n-1)}{3}r^3]y^{n-7} \ldots$$
. . . .
$$+ [B_k - (n-k+1)rB_{k-2} + \frac{(n-k)(n-k+3)}{2}r^2B_{k-4}$$
$$- \frac{(n-k+1)_2(n-k+5)}{3}r^3B_{k-6} + \text{etc.}]y^{n-k-1} \ldots = 0.$$

Mais comme on a, tout calcul fait,

$$B_1 = A_1,$$
$$B_2 - (n-1)r = A_2 - (n-2)r,$$
$$B_3 - (n-2)rB_1 = A_3 - (n-3)rA_1,$$
$$B_4 - (n-3)rB_2 + \frac{(n-4)(n-1)}{2}r^2 = A_4 - (n-4)rA_2 + (n-3)_2 r^2,$$
$$B_5 - (n-4)rB_3 + \frac{(n-5)(n-2)}{2}r^2 B_1 = A_5 - (n-5)rA_3 + (n-4)_2 r^2 A_1,$$
$$B_6 - (n-5)rB_4 + \frac{(n-6)(n-3)}{2}r^2 B_2 - \frac{(n-5)_2(n-1)}{3}r^3$$
$$= A_6 - (n-6)rA_4 + (n-5)_2 r^2 A_2 - (n-4)_3 r^3,$$

. . . .

$$B_k - (n-k+1)rB_{k-2} + \frac{(n-k)(n-k+3)}{2}r^2 B_{k-4}$$
$$- \frac{(n-k+1)_2(n-k+5)}{3}r^3 B_{k-6} + \frac{(n-k+2)_3(n-k+7)}{4}r^4 B_{k-8} - \text{etc.}$$
$$= A_k - (n-k)rA_{k-2} + (n-k+1)_2 r^2 A_{k-4} - (n-k+2)_3 r^3 A_{k-6} + \text{etc.}$$

. . . .

on trouvera finalement

$$\text{(II)} \quad y^{n-1} + A_1 y^{n-2} + [A_2 - (n-2)r]y^{n-3} + [A_3 - (n-3)rA_1]y^{n-4}$$
$$+ [A_4 - (n-4)rA_2 + (n-3)_2 r^2]y^{n-5}$$
$$+ [A_5 - (n-5)rA_3 + (n-4)_2 r^2 A_1]y^{n-6}$$
$$+ [A_6 - (n-6)rA_4 + (n-5)_2 r^2 A_2 - (n-4)_3 r^3]y^{n-7} \ldots.$$
$$+ [A_k - (n-k)rA_{k-2} + (n-k+1)_2 r^2 A_{k-4}$$
$$+ (n-k+2)_3 r^3 A_{k-6} - \text{etc.}]\, y^{n-k-1} + \text{etc.}$$
$$= 0.$$

C'est donc l'équation dont il faut encore déterminer les racines, pour obtenir, à l'aide de la formule ($\updownarrow$) du n°. 10 celles de l'équation proposée (B).

18. Supposons, par exemple, qu'on ait à résoudre l'équation suivante:

$$x^{10} + 8x^9 - 7x^8 - 58x^7 + 196x^6 - 784x^4 + 928x^3 + 448x^2 - 2048x - 1024$$
$$= 0,$$

qui résulte de l'équation (B) ci-dessus, si l'on y fait

$$\begin{array}{c|c|c} n=5 & A_1=\ \ 8 & A_3=-\ 58 \\ r=4 & A_2=-7 & A_4=\ \ 196. \end{array}$$

Suivant les principes qu'on vient d'établir, on voit qu'elle est satisfaite par $x=\pm 2$, et qu'elle peut être réduite à une équation du quatrième degré, par l'application de la formule (II) ci-dessus. Or, on a dans cette formule

$$\begin{array}{r|l|l} n-1=4 & A_2-(n-2)r \quad =-\ 19 & \\ A_1=8 & A_3-(n-3)rA_1=-122 & A_4-(n-4)rA_2+(n-3)_2r^2=240. \end{array}$$

On obtiendra donc pour équation résultante

$$y^4+8y^3-19y^2-122y+240=0,$$

qui se vérifie, comme il est facile de prouver, par

$$y=5;\ \ y=8;\ \ y=-2;\ \ y=-3.$$

Si l'on substitue chacune de ces valeurs dans l'équation ($\frac{+}{0}$) du n°. 10, on trouvera les valeurs de x correspondantes, savoir:

$$-4,\ -1;\ \ 2(-2\pm\sqrt{3});\ \ 1\pm\sqrt{-3};\ \ \tfrac{1}{2}(3\pm\sqrt{-7}).$$

Or, en y ajoutant encore les deux valeurs $+2$ et -2 qu'on vient de signaler ci-dessus comme racines, on aura dix valeurs de x qui satisfont à la proposée; elle se trouve donc complétement résolue.

Résolution des équations réciproques de degré impair.

19. Maintenant nous allons nous occuper des équations réciproques de degré impair, et nous commencerons par exposer les moyens pour résoudre celles qui sont de la forme suivante:

$$\begin{aligned} \text{(C)}\quad & x^{2n+1}+A_1x^{2n}+A_2x^{2n-1}\ldots\ +A_kx^{2n-k+1}\ldots \\ & \ldots+A_{n-1}x^{n+2}+A_nx^{n+1}+\sqrt{r}A_nx^n+\sqrt{r^3}A_{n-1}x^{n-1}\ldots \\ & \ldots+r^{n-k}\sqrt{r}A_kx^k\ldots+r^{n-2}\sqrt{r}A_2x^2+r^{n-1}\sqrt{r}A_1x+r^n\sqrt{r} \\ & =0. \end{aligned}$$

En se rappelant que, d'après ce qui a été dit plus haut (n°. 3 et n°. 10), toute équation réciproque de degré impair doit avoir la racine $+\sqrt{r}$ ou $-\sqrt{r}$, on reconnaîtra facilement, que cette équation-ci est satisfaite par $x=-\sqrt{r}$, et par conséquent divisible par $x+\sqrt{r}$. Cette division étant effectuée d'une manière

analogue à celle que nous avons suivie au numéro précédent, on aura pour quotient:

$$x^{2n}+(A_1-\sqrt{r})x^{2n-1}+(A_2-\sqrt{r}A_1+r)x^{2n-2}\ldots.$$
$$\ldots.+(A_k-\sqrt{r}A_{k-1}+rA_{k-2}-(\sqrt{r})^3A_{k-3}+r^2A_{k-4}-\text{etc.})x^{2n-k}\ldots$$
$$\ldots.+(A_{n-1}-\sqrt{r}A_{n-2}+rA_{n-3}-\text{etc.})x^{n+1}$$
$$+(A_n-\sqrt{r}A_{n-1}+rA_{n-2}-\text{etc.})x^n$$
$$+r(A_{n-1}-\sqrt{r}A_{n-2}+rA_{n-3}-\text{etc.})x^{n-1}\ldots.$$
$$\ldots.+r^{n-k}(A_k-\sqrt{r}A_{k-1}+\text{etc.})x^k\ldots.$$
$$\ldots.+r^{n-2}(A_2-\sqrt{r}A_1+r)x^2+r^{n-1}(A_1-\sqrt{r})x+r^n=0.$$

Evidemment, il n'est autre chose qu'une équation réciproque de degré pair et de même forme que celle du n^0. 15, et pourra donc être traité aussi de la même manière.

Représentons-le, pour abréger, par

$$x^{2n}+C_1x^{2n-1}+C_2x^{2n-2}\ldots.+r^{n-2}C_2x^2+r^{n-1}C_1x+r^n=0$$

et appliquons-y maintenant la formule (I) du n^0. 15, pour y substituer y au lieu de $x+\frac{r}{x}$; il en résultera l'équation suivante:

$$y^n+C_1y^{n-1}+[C_2-nr]y^{n-2}+[C_3-(n-1)rC_1]y^{n-3}$$
$$+[C_4-(n-2)rC_2+\frac{(n-3)n}{2}r^2]y^{n-4}$$
$$+[C_5-(n-3)rC_3+\frac{(n-4)(n-1)}{2}r^2C_1]y^{n-5}$$
$$+[C_6-(n-4)rC_4+\frac{(n-5)(n-2)}{2}r^2C_2-\frac{(n-4)_2n}{3}r^3]y^{n-6}\ldots$$

. . . .

$$+[C_k-(n-k+2)rC_{k-2}+\frac{(n-k+1)(n-k+4)}{2}r^2C_{k-4}$$
$$+\frac{(n-k+2)_2(n-k+6)}{3}r^3C_{k-6}-\text{etc.}]y^{n-k}$$
$$+\text{etc.}=0.$$

Or on a, toute réduction faite,

$$C_1=A_1-\sqrt{r},$$
$$C_2-nr=(A_2-\sqrt{r}A_1)-(n-1)r,$$
$$C_3-(n-1)rC_1=(A_3-\sqrt{r}A_2)-(n-2)r(A_1-\sqrt{r}),$$

$$C_4 - (n-2) r C_2 + \frac{(n-3)n}{2} r^2$$
$$= (A_4 - \sqrt{r} A_3) - (n-3) r (A_2 - \sqrt{r} A_1) + (n-2)_2 r^2,$$

$$C_5 - (n-3) r C_3 + \frac{(n-4)(n-1)}{2} r^2 C_1$$
$$= (A_5 - \sqrt{r} A_4) - (n-4) r (A_3 - \sqrt{r} A_2) + (n-3)_2 r^2 (A_1 - \sqrt{r}),$$

$$C_6 - (n-4) r C_4 + \frac{(n-5)(n-2)}{2} r^2 C_2 - \frac{(n-4)_2 n}{3} r^3$$
$$= (A_6 - \sqrt{r} A_5) - (n-5) r (A_4 - \sqrt{r} A_3) + (n-4)_2 r^2 (A_2 - \sqrt{r} A_1) - (n-3)_3 r^3,$$

. . . .

$$C_k - (n-k+2) r C_{k-2} + \frac{(n-k+1)(n-k+4)}{2} r^2 C_{k-4}$$
$$+ \frac{(n-k+2)_2 (n-k+6)}{3} r^3 C_{k-6} - \frac{(n-k+3)_3 (n-k+8)}{4} r^4 C_{k-8} + \text{etc.}$$
$$= (A_k - \sqrt{r} A_{k-1}) - (n-k+1) r (A_{k-2} - \sqrt{r} A_{k-3})$$
$$+ (n-k+2)_2 r^2 (A_{k-4} - \sqrt{r} A_{k-5}) - (n-k+3)_3 r^3 (A_{k-6} - \sqrt{r} A_{k-7})$$
$$+ \text{etc.}$$

. . . .

Introduisons ces valeurs dans l'équation ci-dessus; elle se changera en

$$\text{(III)} \quad y^n + [A_1 - \sqrt{r}] y^{n-1} + [(A_2 - \sqrt{r} A_1) - (n-1) r] y^{n-2}$$
$$+ [(A_3 - \sqrt{r} A_2) - (n-2) r (A_1 - \sqrt{r})] y^{n-3}$$
$$+ [(A_4 - \sqrt{r} A_3) - (n-3) r (A_2 - \sqrt{r} A_1) + (n-2)_2 r^2] y^{n-4}$$
$$+ [(A_5 - \sqrt{r} A_4) - (n-4) r (A_3 - \sqrt{r} A_2) + (n-3)_2 r^2 (A_1 - \sqrt{r})] y^{n-5}$$
$$+ [(A_6 - \sqrt{r} A_5) - (n-5) r (A_4 - \sqrt{r} A_3) + (n-4)_2 r^2 (A_2 - \sqrt{r} A_1)$$
$$- (n-3)_3 r^3] y^{n-6}$$

. . . .

$$+ [(A_k - \sqrt{r} A_{k-1}) - (n-k+1) r (A_{k-2} - \sqrt{r} A_{k-3})$$
$$+ (n-k+2)_2 r^2 (A_{k-4} - \sqrt{r} A_{k-5}) - \text{etc.}] y^{n-k} \ldots.$$
$$= 0.$$

Telle sera donc l'équation qu'il faut encore résoudre pour parvenir à la résolution de l'équation proposée (C).

20. Soit, par exemple, donnée l'équation

$$x^9 - 1\tfrac{5}{6}x^8 - 8x^7 + 11\tfrac{1}{3}x^6 + 4\tfrac{1}{6}x^5 + 4\tfrac{1}{6}x^4 + 11\tfrac{1}{3}x^3 - 8x^2 - 1\tfrac{5}{6}x + 1 = 0$$

que l'on peut déduire de la forme générale (C) du n⁰. 9, en y faisant

$$\begin{array}{c|c|c} n = 4 & A_1 = -1\tfrac{5}{6} & A_3 = 11\tfrac{1}{3} \\ r = 1 & A_2 = -8 & A_4 = 4\tfrac{1}{6}. \end{array}$$

Conformément aux déductions faites ci-dessus, elle a la racine -1, et doit être réductible à une équation du quatrième degré. Pour y parvenir, il faut observer que l'on a dans la formule (III) ci-dessus

$$\begin{array}{c|l} n = 4 & A_1 - \sqrt{r} = -2\tfrac{5}{6} \\ r = 1 & (A_2 - \sqrt{r}A_1) - (n-1)r = -9\tfrac{1}{6}, \end{array}$$

$$(A_3 - \sqrt{r}A_2) - (n-2)r(A_1 - \sqrt{r}) = 25,$$

$$(A_4 - \sqrt{r}A_3) - (n-3)r(A_2 - \sqrt{r}A_1) + (n-2)_2 r^2 = 0,$$

ce qui donne pour la réduite cherchée

$$y^4 - 2\tfrac{5}{6}y^3 - 9\tfrac{1}{6}y^2 + 25y = 0,$$

qui est satisfaite par

$$y = 0,\ \ 2\tfrac{1}{2},\ \ -3,\ \ 3\tfrac{1}{3}.$$

Or, ces quatre valeurs de y, substituées dans la formule (♅) du n⁰. 10, donnent huit valeurs de x, savoir

$$x = \pm\sqrt{-1};\ \ 2,\ \tfrac{1}{2};\ \ \tfrac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{5});\ \ 3,\ \tfrac{1}{3},$$

qui satisfont à la proposée. Donc, en y ajoutant encore la valeur -1, qu'on a reconnue tout d'abord être racine de cette équation, on a déterminé toutes les racines qu'il fallait avoir.

21. Il nous reste encore finalement à examiner le cas où l'équation donnée est de degré impair et de la forme suivante:

$$\text{(D)}\quad x^{2n+1} + A_1 x^{2n} + A_2 x^{2n-1} \ldots\ldots + A_k x^{2n-k+1} \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + A_{n-1}x^{n+2} + A_n x^{n+1} - \sqrt{r}A_n x^n - \sqrt{r^3}A_{n-1}x^{n-1} \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots - r^{n-k}\sqrt{r}A_k x^k \ldots\ldots - r^{n-2}\sqrt{r}A_2 x^2 - r^{n-1}\sqrt{r}A_1 x - r^n\sqrt{r}$$
$$= 0.$$

On reconnaît, au premier abord, qu'on peut y satisfaire en mettant $x = \sqrt{r}$, et que par conséquent on peut aussi la diviser exactement par $x - \sqrt{r}$. Essayant cette division, on obtiendra, de la même manière que tout à l'heure, pour quotient

$$x^{2n}+(A_1+\sqrt{r})x^{2n-1}+(A_2+\sqrt{r}A_1+r)x^{2n-2}$$
$$+(A_3+\sqrt{r}A_2+rA_1+\sqrt{r^3})x^{2n-3}\ldots$$
$$\ldots+(A_k+\sqrt{r}A_{k-1}+rA_{k-2}+\sqrt{r^3}A_{k-3}+r^2A_{k-4}+\text{etc.})y^{2n-k}\ldots$$
$$\ldots+(A_{n-1}+\sqrt{r}A_{n-2}+rA_{n-3}+\text{etc.})x^{n+1}$$
$$+(A_n+\sqrt{r}A_{n-1}+rA_{n-2}+\text{etc.})x^n$$
$$+r(A_{n-1}+\sqrt{r}A_{n-2}+rA_{n-3}+\text{etc.})x^{n-1}\ldots$$
$$\ldots+r^{n-k}(A_k+\sqrt{r}A_{k-1}+rA_{k-2}+\text{etc.})x^k\ldots$$
$$\ldots+r^{n-2}(A_2+\sqrt{r}A_1+r)x^2+r^{n-1}(A_1+\sqrt{r})x+r^n=0.$$

Il s'ensuit que la résolution de l'équation donnée dépend encore de celle d'une équation réciproque de degré pair et de la forme (A) du n°. 9, dont nous avons déjà fait connaître la méthode de résolution.

Opérant donc suivant cette méthode, on parviendra d'une manière analogue à celle du numéro précédent, à l'équation suivante:

$$\text{(IV)}\quad y^n+[A_1+\sqrt{r}]y^{n-1}+[(A_2+\sqrt{r}A_1)-(n-1)r]y^{n-2}$$
$$+[(A_3+\sqrt{r}A_2)-(n-2)r(A_1+\sqrt{r})]y^{n-3}$$
$$+[(A_4+\sqrt{r}A_3)-(n-3)r(A_2+\sqrt{r}A_1)+(n-2)_2r^2]y^{n-4}$$
$$+[(A_5+\sqrt{r}A_4)-(n-4)r(A_3+\sqrt{r}A_2)$$
$$+(n-3)_2r^2(A_1+\sqrt{r})]y^{n-5}$$
$$+[(A_6+\sqrt{r}A_5)-(n-5)r(A_4+\sqrt{r}A_3)$$
$$+(n-4)_2r^2(A_2+\sqrt{r}A_1)-(n-3)_3r^3]y^{n-6}\ldots$$

. . . .

$$+[(A_k+\sqrt{r}A_{k-1})-(n-k+1)r(A_{k-2}+\sqrt{r}A_{k-3})$$
$$+(n-k+2)_2r^2(A_{k-4}+\sqrt{r}A_{k-5})-\text{etc.}]y^{n-k}$$
$$+\text{ etc. }=0,$$

qui représente celle à laquelle on réduit la proposée par la substitution de y à la place de $x+\frac{r}{x}$, après l'avoir divisée auparavant par $x-\sqrt{r}$. Il ne s'agit donc plus que de résoudre cette équation pour parvenir à la résolution de l'équation proposée (D).

22. Ainsi, par exemple, l'équation réciproque

$$x^9-6x^8-25x^7-15x^6-63x^5+189x^4+405x^3+6075x^2+13122x-6561$$
$$=0,$$

qui comparée avec l'équation (D) ci-dessus donne

$$n=4 \quad \Big| \quad A_1=-6 \quad \Big| \quad A_3=-15$$
$$r=9 \quad \Big| \quad A_2=-25 \quad \Big| \quad A_4=-63$$

et dans laquelle on a par conséquent

$$A_1+\sqrt{r}=-3,$$
$$(A_2+\sqrt{r}A_1)-(n-1)r=-70,$$
$$(A_3+\sqrt{r}A_2)-(n-2)r(A_1+\sqrt{r})=-36,$$
$$(A_4+\sqrt{r}A_3)-(n-3)r(A_2+\sqrt{r}A_1)+(n-2)_2r^2=360,$$

se réduit à l'équation suivante

$$y^4-3y^3-70y^2-36y+360=0.$$

Or, celle-ci est satisfaite par quatre valeurs différentes de y, savoir

$$y=2,\quad y=-3,\quad y=-6,\quad y=10.$$

Donc, l'équation proposée se vérifie par les huit valeurs suivantes de x,

$$x=1\pm\sqrt{-8};\quad \tfrac{1}{2}(-1\pm\sqrt{-3});\quad -3,\ -3;\quad 9,\ 1;$$

et en outre encore par $x=3$ d'après les principes déjà établis plus haut. Elle est donc complétement résolue.

Scolie général et résolution des équations réciproques à deux termes.

23. Récapitulant briévement tout ce qui vient d'être dit sur la résolution des équations réciproques, on voit bien que, par des procédés assez simples, toute équation réciproque du degré $2n$ ou $2n+1$, et parfois même du degré $2n+2$ (voy. n°. 16) peut être ramenée à une équation du degré n. Par conséquent, toutes les fois qu'il est possible de résoudre cette équation résultante, on parviendra aussi à la résolution de l'équation réciproque donnée. Or, on connaît des méthodes générales pour résoudre toutes les équations qui ne surpassent pas le quatrième degré; donc, on pourra aussi résoudre généralement toutes les équations réciproques des neuf premiers degrés, quelquefois encore celles du dixième.

24. Mais, dans la pratique, il se peut même qu'on réussisse à résoudre les équations réciproques d'un degré encore

supérieur au neuvième. C'est ce qui arrive souvent, par exemple, dans les équations réciproques à deux termes ou binômes, c'est-à-dire de la forme:

$$x^m \pm A_m = 0$$

qu'on peut déduire de la forme générale (⊙) des équations réciproques (voy. n⁰. 6), en y annulant tous les termes à l'exception des deux extrêmes. Examinons un peu plus près ce cas qui mérite toute notre attention.

Or, il est facile de prouver, qu'on peut résoudre ces équations binômes toutes les fois que leur exposant est un nombre décomposable en facteurs premiers plus petits que 11. Car dans ces cas la résolution d'une telle équation peut toujours être ramenée, soit par l'introduction d'inconnues auxiliaires, soit par la décomposition de l'équation en facteurs binômes, à celle d'équations réciproques d'un degré inférieur au dixième.

Ainsi, pour fixer les idées par un exemple, la résolution de l'équation binôme

$$x^{280} + 1 = 0,$$

dans laquelle on a

$$m = 2^3.5.7 \quad \text{et} \quad A_m = 1,$$

ne dépend que de celle des équations binômes suivantes:

$$(1)\ \ y^8 + 1 = 0; \qquad (2)\ \ z^5 - 1 = 0; \qquad (3)\ \ u^7 - 1 = 0;$$

qu'il est facile de résoudre, puisque leur degré est moindre que 9, et dont la première résulte de la proposée même, si l'on y fait

$$x^{35} = y$$

la deuxième de l'équation

$$x^{35} - y = 0, \quad \text{si l'on y suppose } x^7 = z\sqrt[5]{y},$$

et la troisième enfin de l'équation

$$x^7 - z\sqrt[5]{y} = 0, \quad \text{si l'on y fait } x = u\sqrt[7]{z\sqrt[5]{y}}.$$

Cette dernière hypothèse donne les valeurs de x lui-même, après qu'on a déterminé les valeurs de y, z et u.

De même, pour parvenir à la résolution de l'équation binôme

$$x^{144} - 10 = 0$$

dans laquelle on a

$$x^4+14x^3+45x^2-4x-28=0$$

il faudrait d'abord déterminer une valeur de p qui satisfait à l'équation

$$192p^3+160p^2-3200p-5504=0$$

résultant de l'équation (2) du n°. précédent, si l'on y fait

$$A=14;\quad B=45;\quad C=-4;\quad D=-28.$$

Comme on trouvera, entre autres, la valeur $p=-2$, l'équation proposée se transformera par la substitution de $x=z-2$, d'après la formule (1) ci-dessus en:

$$z^4+6z^3-15z^2-48z+64=0,$$

qui est conforme à la formule (A) des équations réciproques, et se résout donc de la même manière (voy. n°. 15). Ainsi, l'on aura

$$z=\tfrac{1}{2}(-3\pm2\sqrt{2}\pm\sqrt{49\pm12\sqrt{2}})$$

et par conséquent

$$x=\tfrac{1}{2}(-7\pm2\sqrt{2}\pm\sqrt{49\pm12\sqrt{2}})$$

pour les quatre valeurs de x dans l'équation donnée.

27. Il existe d'ailleurs encore un autre moyen fort élégant pour opérer cette transformation dont il est question, lequel repose sur les relations connues qu'on a établies entre les racines d'une équation quelconque et les coefficients de ses termes. Voici en quoi il consiste *):

On sait d'abord que, si l'on désigne par $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les quatre racines de l'équation proposée,

$$(1)\qquad x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$$

il faut qu'on ait

$$\begin{aligned} A &= -(\alpha+\beta+\gamma+\delta), \\ B &= \alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta, \\ C &= -(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta), \\ D &= \alpha\beta\gamma\delta. \end{aligned}$$

Supposant donc

$$\alpha\beta=a;\quad \alpha\gamma=b;\quad \alpha\delta=c$$

---

*) Voy. Grunert's Archiv Bd. XXXI.

on aura

$$\gamma\delta=\frac{D}{a};\quad \beta\delta=\frac{D}{b};\quad \beta\gamma=\frac{D}{c}.$$

Mais ces dernières valeurs forment évidemment les racines d'une équation réciproque du sixième degré et de la forme

$$(2)\qquad y^6+Py^5+Qy^4+Ry^3+DQy^2+D^2Py+D^3=0$$

dans laquelle il faut supposer:

$$P=-(a+b+c+\frac{D}{a}+\frac{D}{b}+\frac{D}{c}),$$

$$Q=ab+ac+D+\frac{aD}{b}+\frac{aD}{c}+bc+\frac{bD}{a}+D+\frac{bD}{c}$$
$$+\frac{cD}{a}+\frac{cD}{b}+D+\frac{D^2}{ab}+\frac{D^2}{ac}+\frac{D^2}{bc},$$

$$R=-[abc+bD+aD+\frac{abD}{c}+cD+\frac{acD}{b}+aD+\frac{D^2}{b}+\frac{D^2}{c}$$
$$+\frac{aD^2}{bc}+\frac{bcD}{a}+cD+bD+\frac{D^2}{a}+\frac{bD^2}{ac}+\frac{D^2}{c}+\frac{cD^2}{ab}+\frac{D^2}{a}$$
$$+\frac{D^2}{b}+\frac{D^3}{abc}].$$

Or, exprimant a, b, c.... par α, β, γ...., on trouve, toute réduction faite,

$$P=-(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\gamma\delta+\beta\delta+\beta\gamma)=-B,$$

$$Q=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)-\alpha\beta\gamma\delta=AC-D,$$

$$R=-[\alpha\beta\gamma\delta\{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2-2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta)\}$$
$$+(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)^2]$$
$$=-[D(A^2-2B)+C^2].$$

Donc l'équation (2) ci-dessus se réduit à

$$(3)\qquad y^6-By^5+(AC-D)y^4-(A^2D-2BD+C^2)y^3$$
$$+(AC-D)Dy^2-BD^2y+D^3=0$$

et elle se changera par la substitution de $z=y+\frac{D}{y}$, effectuée à l'aide de la formule (1) du n°. 15, en

$$(4)\qquad z^3-Bz^2+(AC-4D)z+(4BD-A^2D-C^2)=0$$

qui fournit trois valeurs de z et par conséquent six valeurs de y qui conviennent à l'équation (3) ci-dessus. Celles-ci étant trouvées, donnent les racines de la proposée, en vertu des relations établies plus haut. Ainsi, comme on a supposé

$$\alpha\beta = a; \quad \alpha\gamma = b; \quad \alpha\delta = c$$

et par conséquent aussi

$$\alpha^2\beta\gamma\delta = \alpha^2 D = abc$$

on obtiendra

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= \sqrt{\frac{abc}{D}} = \frac{abc}{\sqrt{abc.D}}, \\ \beta &= \frac{a}{\alpha} = \frac{aD}{\sqrt{abc.D}}, \\ \gamma &= \frac{b}{\alpha} = \frac{bD}{\sqrt{abc.D}}, \\ \delta &= \frac{c}{\alpha} = \frac{cD}{\sqrt{abc.D}}. \end{aligned} \right.$$

Mais, puisqu'il faut choisir a, b, c entre six valeurs de y, et qu'on pourrait par conséquent les confondre surtout avec leurs réciproques; il est nécessaire, avant d'admettre les racines ci-dessus, de s'assurer si l'on a pris les valeurs convenables et propres à donner les vraies racines de l'équation proposée. Il suffit pour cela, qu'on les ait choisies telles qu'elles conviennent à l'équation

$$(6) \qquad abc + (a+b+c)D = -A\sqrt{abc.D},$$

qui résulte de la relation

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = -A$$

si l'on y substitue les valeurs de α, β, γ, δ ci-dessus. S'il en est ainsi, il n'y aura plus de doute qu'on ait trouvé les véritables racines qu'on demandait.

28. Soit, par exemple,

$$x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 8x - 7 = 0$$

l'équation à résoudre. On en déduira, à l'aide des formules (3) et (4) ci-dessus, les équations suivantes:

$$(3) \qquad y^6 - 18y^5 + 71y^4 + 132y^3 - 497y^2 - 882y - 343 = 0,$$

(4) $$z^3 - 18z^2 + 92z - 120 = 0,$$

dont la dernière se vérifie par

$$z = 10,\ 2,\ 6$$

de sorte qu'on a dans l'équation précédente, suivant la formule $(\frac{+}{5})$ du no. 10,

$$y = 5 \pm 4\sqrt{2};\ 1 \pm 2\sqrt{2};\ 7,\ -1.$$

Comme maintenant, parmi ces dernières valeurs, les trois suivantes satisfont à la condition (6) ci-dessus, savoir

$$a = 5 + 4\sqrt{2};\quad b = 1 + 2\sqrt{2};\quad c = -1;$$

ce qu'il est facile de prouver; on obtiendra donc, suivant les formules (5) ci-dessus

$$\alpha = \sqrt{\frac{-21 - 14\sqrt{2}}{-7}} = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2},$$

$$\beta = \frac{5 + 4\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = 3 + \sqrt{2},$$

$$\gamma = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = 3 - \sqrt{2},$$

$$\delta = \frac{-1}{1 + \sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2},$$

pour racines de l'équation proposée, qui se trouve par conséquent complétement résolue.

29. On voit, par ce qui précède, de quelle manière on peut tirer parti des équations réciproques pour résoudre les équations du quatrième degré. Quant aux autres équations non-réciproques, il n'existe pas, que je sache, des moyens de les rendre réciproques. Du moins, les méthodes que nous venons de suivre dans les équations du quatrième degré, ne s'appliquent plus à celles d'un degré supérieur, ni même à celles du troisième degré; soit parce que le nombre des équations de condition auxquelles on est conduit, est plus grand que celui des inconnues auxiliaires qu'il faut déterminer, soit que leur degré est le même ou encore plus haut que celui des équations primitives. Il faudra donc, je crois, renoncer à faire application de la théorie des équations réciproques dans la résolution des équations qui surpassent le quatrième degré.

III.

Ueber die Quadratur des Zirkels.

Von

Herrn Doctor *Hermann Scheffler,*
in Braunschweig.

Da so eben in Frankfurt am Main die Quadratur des Zirkels erfunden ist, so wird eine Unterhaltung über die Unmöglichkeit dieser Operation zur Verherrlichung jener Erfindung beitragen.

1) Die Quadratur und die Rektifikation des Kreises nehmen hinsichtlich der geometrischen Konstruirbarkeit, so wie auch hinsichtlich der arithmetischen Berechenbarkeit gleichen Rang ein. Die Erstere verlangt die Bestimmung der Fläche ABC (Taf. II. Fig. 1.), welche der Vektorradius AB beschreibt, indem er aus der gegebenen Lage AB in die gegebene Lage AC übergeht; die Letztere verlangt die Bestimmung der Linie BC, welche der Endpunkt des Radius bei dieser Bewegung beschreibt. Beide kommen auf die Bestimmung der Ludolph'schen Zahl π heraus.

Die Aufgabe, aus dem Radius den Umfang des Kreises zu bestimmen, scheint eindeutig, ist aber in Wahrheit unendlich vieldeutig. Der Kreis ist nach seiner Entstehung und wahren Bedeutung keine begrenzte Linie, sondern eine unendliche Spirale, deren Windungen aufeinander fallen. Die Aufgabe verlangt also die Bestimmung des Weges, welchen der Endpunkt b des Radius ab (Taf. II. Fig. 2.) beschrieben hat, wenn seine Richtung wiederum mit der ursprünglichen zusammenfällt. Von andern Prämissen als diesen geht die Aufgabe nicht a s; dieselben sind ausreichend und nothwendig, um das Problem zu definiren.

Es leuchtet ein, dass sowohl die Windung *bec*, als auch die Doppelwindung *becfd* und überhaupt jede vielfache Windung der Aufgabe genügt, dass also die Auflösung alle diese Werthe ergeben muss. Die Anzahl der möglichen Auflösungen ist unendlich gross und demzufolge ist es nothwendig, dass sich die Auflösung arithmetisch durch eine Gleichung von unendlich hohem Grade oder durch eine Rechnung von unendlichen Operationen und geometrisch durch eine Konstruktion von unendlichen Operationen darstelle. Weder eine endliche Gleichung, noch eine endliche Rechnung, noch eine endliche Konstruktion kann das Problem lösen.

Behuf näherer Erläuterung der letzteren Behauptungen wird die Bemerkung vorangeschickt, dass das Verfahren, in welchem die gesuchte Auflösung liegen soll, mit gleicher Leichtigkeit das Einfache, das Doppelte, das Dreifache und überhaupt jedes beliebige Vielfache des Umfanges und zwar sowohl als rechts sich windende, wie als links sich windende Linie, d. h. als positive und als negative Grösse ergeben muss, dass dasselbe aber auch nur diese Vielfachen und keine anderen Grössen ergeben darf, dass also die Gleichung, welche zu dieser Auflösung dienen soll, die Wurzeln $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi \ldots.$ und keine andere enthalten muss. Diese Gleichung ist:

$$x[(x-2\pi)(x-4\pi)(x-6\pi)\ldots.][(x+2\pi)(x+4\pi)(x+6\pi)\ldots.]=0,$$

oder:

$$x(x^2-4\pi^2)x^2-16\pi^2)(x^2-36\pi^2)\ldots.(x^2-4n^2\pi^2)\ldots.=0.$$

Diese Gleichung lässt sich in mannichfacher Weise umformen: so lässt sich dieselbe in folgende Form bringen:

$$x\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{36\pi^2}\right)\ldots.=0. \quad \ldots\ldots (1)$$

Durch Entwicklung ergiebt sich hieraus, wenn man die eine Auflösung $x=0$ unterdrückt,

$$\left.\begin{aligned}1&-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots.+\frac{1}{m^2}+\ldots.\right)\frac{x^2}{4\pi^2}\\&+\left(\frac{1}{1.4}+\frac{1}{1.9}+\frac{1}{4.9}+\ldots.+\frac{1}{m_1{}^2m_2{}^2}+\ldots.\right)\frac{x^4}{16\pi^4}\\&-\left(\frac{1}{1.4.9}+\ldots.+\frac{1}{m_1{}^2m_2{}^2m_3{}^2}+\ldots.\right)\frac{x^6}{64\pi^6}\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&=0.\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

2) Wenn ein Verfahren unendlich viele Werthe ergeben soll; so muss dasselbe, um irgend einen dieser Werthe zu erzeugen, nothwendig in unendlich vielen Operationen bestehen, welche an den gegebenen Grössen (hier dem Radius oder der Einheit) zu vollziehen sind. Denn zur Erfüllung der Aufgabe hat jede ihrer Auflösungen gleiche Berechtigung. Das Auflösungsverfahren, da es alle Werthe treffen soll, muss ein allgemeines oder für sämmtliche Werthe gemeinschaftliches sein, dasselbe muss nach denselben Prinzipien so gut auf den einen wie auf den andern Werth führen. Die Wege, welche von den gegebenen Grössen aus auf die einzelnen Werthe der Auflösungen führen, unterscheiden sich nicht durch die Art und Zahl der vorzunehmenden Operationen, sondern lediglich durch die verschiedenen Einzelwerthe, welche die beim Auflösungsverfahren sich darbietenden Grössen haben, oder durch die Vieldeutigkeit der nach der Vorschrift des Auflösungsverfahrens verlangten Operationen, so dass man zu verschiedenen Endwerthen gelangt, jenachdem man im Verlaufe der Auflösung an irgend einer Stelle des Verfahrens den einen oder den anderen Einzelwerth der betreffenden Grösse annimmt.

Wird z. B. an irgend einer Stelle des Auflösungsverfahrens die Ausziehung einer Kubikwurzel verlangt; so steht man auf einer Schwelle, von wo aus das allgemeine Verfahren wegen der Dreideutigkeit jeder Kubikwurzel sich in drei Spezialwege spaltet, welche zu drei Endwerthen führen, ohne dass das allgemeine Verfahren, d. h. die Art und Anzahl der Operationen sich irgend wie änderte. Wird in ähnlicher Weise bei der geometrischen Konstruktion an irgend einer Stelle des Auflösungsverfahrens der Durchschnitt eines Kreises mit einer Geraden oder mit einem anderen Kreise verlangt; so befindet man sich auf dem Punkte, von wo aus das allgemeine Verfahren wegen der Zweideutigkeit eines solchen Durchschnittes sich in zwei Spezialwege trennt, welche zu zwei Endwerthen führen, ohne das Auflösungsverfahren selbst zu alteriren.

(Alle Vieldeutigkeit der arithmetischen Funktionen und der geometrischen Konstruktionen entspringt, wie ich glaube in dem Artikel über die Vieldeutigkeit der Funktionen in Grunert's Archiv Thl. 28. und im Situationskalkul gezeigt zu haben, aus der Vieldeutigkeit, welche jede Grösse dadurch hat, dass nur ihre Quantität und Richtung, nicht aber die Zahl der ganzen Umdrehungen um den Nullpunkt, welche ihr beigelegt werden können, gegeben ist. Die Vielfacheit der Wurzeln

einer Gleichung ist eines der vielfachen Ergebnisse jener Vieldeutigkeit der Grösse).

Da die Vieldeutigkeit einer endlichen Funktion, z. B. einer Wurzel von endlichem Grade, stets endlich ist oder da eine solche Funktion nur eine endliche Menge der Quantität und Richtung nach verschiedene Werthe hat; so kann ein endliches Auflösungsverfahren, d. h. ein Verfahren, welches nur eine endliche Menge endlicher Operationen fordert, nur eine endliche Menge von Auflösungen liefern. Ein Verfahren mithin, welches eine unendliche Menge von Auflösungen liefern soll, muss nothwendig ein unendliches sein, d. h. es muss aus einer unendlichen Menge von einfachen Operationen bestehen. Unter den einfachen Operationen sind lediglich die Grundoperationen der Mathematik verstanden: dieselben sind in arithmetischer Beziehung Addition, Multiplikation und Potenzirung (worunter Subtraktion, Division und Wurzelausziehung mit begriffen sind) und in geometrischer Beziehung Fortschritt und Drehung, indem die niedere Geometrie die der Potenzirung entsprechende Bewegung nicht als Konstruktionsmittel gebrauchen will.

Da die Herstellung des Kreisumfanges aus dem Radius unendlich viel Auflösungen gestattet; so kann dieselbe weder arithmethisch, noch geometrisch durch ein endliches Verfahren geschehen, ist also in Beziehung auf die Zeit der Ausführung unmöglich.

Die Zahl der Operationen oder die Zeit der Ausführung bedingt durchaus keine innere Unmöglichkeit. Im Gegentheil, wenn das zum Ziele führende Verfahren seinem Wesen nach ein bestimmtes und in seinen einzelnen Operationen ausführbares ist, muss die mathematische Auflösung als erbracht angesehen und die Unendlichkeit des Verfahrens ebenso sehr als etwas Unwesentliches betrachtet werden, wie der Grad der Gleichung oder die Vielheit der geometrischen Schritte bei irgend einem endlichen Verfahren für gleichgültig gehalten wird.

Unter dem letzteren Gesichtspunkte erscheint die Rektifikation des Kreises nach den bekannten Verfahren sowohl arithmetisch wie geometrisch gelös't, jedoch immer nur mittelst unendlicher Operationen*).

---

*) Ein sehr einfaches geometrisches Näherungsverfahren habe ich im 13. Theile dieses Archivs angegeben.

3) Dass die Zahl π irrational sein müsse, folgt aus Vorstehendem nicht. Ihre faktische Irrationalität lässt sich übrigens leicht und streng auf bekannte Weise durch die Entwicklung in unendliche konvergente Kettenbrüche beweisen (vergl. Schlömilch's algebraische Analysis Kap. XX.) Die Irrationalität von π ist auch nicht der Grund ihrer Unkonstruirbarkeit; denn es lassen sich sehr wohl Irrationalgrössen, z. B. Quadratwurzeln konstruiren. Diese Irrationalität ist auch in arithmetischer Hinsicht nicht der Makel, welcher jener Zahl anhaftet; denn fast alle Wurzelgrössen sind irrational, ohne dass man dieselben perhorreszirt. Die Zahl π ist nicht bloss eine irrationale, sondern eine transzendentale, d. h. eine nicht durch eine endliche Zahl von Grundoperationen darstellbare, oder nicht algebraische Zahl, und hiervon liegt der Grund in den obigen Beziehungen. Man erkennt, dass jede Wurzel einer unendlichen Gleichung im Allgemeinen transzendental sein muss.

In besonderen Fällen ist es möglich, dass die Wurzel einer unendlichen Gleichung, welche ihrer allgemeinen Natur nach transzendental ist, algebraisch, d. h. durch eine endliche Menge von Grundoperationen darstellbar, ja sogar, dass sie rational wird. Ebenso kann eine Wurzel einer endlichen Gleichung vom zweiten oder höheren Grade, welche im Allgemeinen irrational ist, unter Umständen rational werden. Der Uebergang einer transzendentalen in eine algebraische Grösse findet statt, wenn sich in dem unendlichen Verfahren, welches die transzendentale Grösse verlangt, eine unendliche Menge von Potenzirungen nachweislich in das Resultat einer endlichen Menge von Operationen zusammenfassen lässt. Der Uebergang einer irrationalen Grösse in eine rationale findet statt, wenn sich die im Allgemeinen unendliche Menge von Multiplikationen, welche die Erstere erfordert, auf eine endliche Menge reduzirt.

Eine solche Zusammenziehung einer unendlichen Menge von Operationen in eine endliche Anzahl kann selbstredend nur in besonderen Fällen, d. h. nur dann stattfinden, wenn das Verfahren auf eine Grösse führt, welche von den allgemeinen Eigenschaften der Grössen eigenthümliche Partikularwerthe, z. B. den Nullwerth besitzt. Wenn dieser Fall eintritt, und demzufolge eine unendliche Reihe von Operationen sich auf ein einziges Resultat reduzirt; so ist klar, dass mit jener Abkürzung eine unendliche Menge von Vieldeutigkeiten, also eine unendliche Menge von Verschiedenheiten ver-

nichtet werden. Dieser Fall kann also nur unter ganz besonderen Umständen eintreten und muss wegen der erwähnten Vernichtung gewisser Verschiedenheiten immer zur Folge haben, dass sich die Wurzeln in Gruppen vertheilen, deren Einzelngliedern ein gemeinschaftlicher Gruppencharakter zukömmt, während die Gruppen selbst sich durch spezifische Eigenthümlichkeiten unterscheiden.

Nun besitzt aber die obige Gleichung unendlich viel verschiedene Wurzeln $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi$ u. s. w., welche die sukzessiven Vielfachen derselben Grösse 2π darstellen. Nach der Einfachheit und Gleichartigkeit der Beziehung, in welcher diese Werthe zu einander stehen, können sie nur als eine einzige Gruppe (höchstens als zwei Gruppen resp. von positiven und negativen Grössen, deren Zahl aber immer unendlich bliebe) oder als die einzigen Glieder ebenso viel verschiedener Gruppen angesehen werden. Im ersteren Falle läge überhaupt keine Vereinfachung vor, die Zahl π könnte also nur durch eine unendliche Menge von Operationen dargestellt werden, wäre mithin keine algebraische und noch weniger eine rationale Zahl, oder der Kreisumfang wäre nicht durch ein endliches Verfahren konstruirbar. Im letzteren Falle dagegen müsste die gegebene Gleichung in lauter Faktoren vom ersten Grade zerfallen, welche sich aus den Koeffizienten der Gleichung durch endliche Operationen darstellen liessen. Sieht man aber auch ganz ab von dem Umfange der Gruppen, welche die Wurzeln jener Gleichung etwa bilden könnten; so ist so viel klar, dass die Lösbarkeit der Gleichung mindestens ein Zerfallen in Gruppen von *endlicher* Gliederzahl, also die Möglichkeit der Absonderung eines Faktors von endlichem Grade voraussetzt.

In dieser allgemeinen Betrachtung liegt der Gedankengang, welchen wir bei der nachstehenden Beweisführung verfolgen werden. Zu diesem Ende bedarf es zunächst der Darstellung der Koeffizienten der Gleichung (2).

4) Wenn man die Aufgabe in trigonometrischen Zeichen formuliren will, so muss man schreiben:

$$\sin \tfrac{1}{2}x = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Diese Gleichung enthält alle und keine anderen, als die gesuchten Auflösungen. Demzufolge kann sie sich von der Gleichung (1) nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden, man muss also haben:

$$\sin \tfrac{1}{2}x = ax\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{36\pi^2}\right)\ldots\ldots$$

oder auch:

$$\frac{1}{2a}\cdot\frac{\sin x}{x} = \left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\ldots\ldots$$

Da für $x = 0$, $\frac{\sin x}{x} = 1$ und auch die rechte Seite $= 1$ ist, so muss $a = \frac{1}{2}$ sein. Diess giebt die bekannte Formel:

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\ldots\ldots, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

oder auch:

$$\frac{\sin z\pi}{z\pi} = (1-z^2)\left(1-\frac{z^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{3^2}\right)\ldots\ldots$$

Setzt man für die linke Seite $\frac{\sin x}{x}$ ihre trigonometrische Reihe und entwickelt das Produkt auf der rechten Seite; so ergeben sich durch Gleichsetzung der Koeffizienten der gleich hohen Glieder die Beziehungen:

$$\pi^2 = 1.2.3\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots\ldots+\frac{1}{m^2}+\ldots\ldots\right),$$

$$\pi^4 = 1.2.3.4.5\left(\frac{1}{1.4}+\frac{1}{1.9}+\frac{1}{4.9}+\ldots\ldots+\frac{1}{m_1^2 m_2^2}+\ldots\ldots\right),$$

$$\pi^6 = 1.2.3.4.5.6.7\left(\frac{1}{1.4.9}+\ldots\ldots+\frac{1}{m_1^2 m_2^2 m_3^2}+\ldots\ldots\right)$$

allgemein:

$$\pi^{2n} = 1.2.3\ldots\ldots(2n+1)\left(\frac{1}{1^2.2^2.3^2\ldots\ldots n^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{m_1^2 m_2^2\ldots\ldots m_n^2}+\ldots\ldots\right).$$

Ich weiss nicht, ob diese Beziehungen bekannt sind. Bekannt ist folgende Formel, worin B_{2n-1} die $(2n-1)$ste Bernoulli'sche Zahl bezeichnet,

$$\pi^{2n} = \frac{2.1.2.3\ldots\ldots 2n}{(2^{2n}-1)B_{2n-1}}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\ldots\ldots\right).$$

Eine Vergleichung dieses mit dem vorhergehenden Ausdrucke giebt:

$$B_{2n-1}=\frac{2}{(2n+1)(2^{2n}-1)}\cdot\frac{\frac{1}{1}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\ldots}{\frac{1}{1.2^2.3^2\ldots.n^2}+\ldots+\frac{1}{m_1{}^2m_2{}^2\ldots.m_n{}^2}+\ldots}.$$

Vorstehendes ist ein Ausdruck für die Bernoulli'schen Zahlen. Da diese Zahlen sämmtlich rational sind; so folgt, dass die beiden Werthe

$$\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\ldots\right]$$

und

$$\left[\frac{1}{1.2^2.3^2\ldots.n^2}+\ldots+\frac{1}{m_1{}^2m_2{}^2\ldots.m_n{}^2}+\ldots\right]$$

in einem rationalen Verhältnisse zu einander stehen.

Schliesslich ist klar, dass statt der obigen unendlichen Gleichung (1), deren Auflösung für x die unendlich vielen Werthe $0,\ \pm 2\pi,\ \pm 4\pi,\ \pm 6\pi\ldots.$ ergeben würde, auch die Gleichung $\sin\frac{1}{2}x=0$, also die Gleichung

(5)

$$x-\frac{x^3}{1.2.3.2^2}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5.2^4}-\frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7.2^6}+\ldots.=0$$

genommen werden kann und dass die Koeffizienten derselben mit denen der obigen Gleichung ganz identisch sind. Setzt man $2x$ für x an die Stelle; so leuchtet ein, dass die Gleichung

(6)

$$x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7}+\ldots.=0$$

die Wurzeln $0,\ \pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \pm 3\pi\ldots.$ und sonst keine hat.

Lässt man die Wurzel $x=0$ ausser Acht und ersetzt x^2 durch x; so erhält man die Gleichung

(7)

$$1+\frac{x}{1.2.3}+\frac{x^2}{1.2.3.4.5}+\frac{x^3}{1.2.3.4.5.6.7}+\ldots.=0,$$

welche nur positive Wurzeln, nämlich die Wurzeln π^2, $4\pi^2$, $9\pi^2\ldots.$ besitzt.

Es leuchtet ein, dass die Lösbarkeit und die Unlösbarkeit

der einen der beiden Gleichungen (6) und (7) die entsprechende Eigenschaft der anderen einschliesst. Wir werden nun die letztere Gleichung (7) zum Ausgangspunkte nehmen.

Um die Natur dieser Gleichung zu diskutiren, schicken wir folgende Sätze voran.

5) Da jede Gleichung mit positiven ganzen Potenzen von x wie

$$A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \ldots + A_0 = 0,$$

ein spezieller Fall einer höheren Gleichung von jedem beliebigen Grade m ist, indem darin nur die Koeffizienten der oberen Glieder den Spezialwerth Null haben; so muss das Auflösungsverfahren jeder unteren Gleichung in dem Auflösungsverfahren jeder höheren enthalten sein.

Das Auflösungsverfahren der quadratischen Gleichungen muss also das der Gleichungen ersten Grades und das Auflösungsverfahren der kubischen Gleichungen muss das der Gleichungen zweiten und ersten Grades mit einschliessen (was es auch thut).

6) Die Auflösung der Gleichungen besteht hiernach in einem allgemeinen Verfahren, in welchem der Grad n eine willkürliche ganze Zahl ist.

Wegen dieser Willkürlichkeit oder Unbestimmtheit von n und weil die höhere Gleichung die niedrigere einschliesst; muss das Auflösungsverfahren dasjenige sein, welches für einen unendlich hohen Werth von n Anwendung findet. Jede Gleichung ist daher nur durch ein unendliches Verfahren aufzulösen.

7) Hieraus sollte man schliessen, dass jede Gleichung unendlich viel Wurzeln hätte. So ist es auch. Beispielsweise sind die unendlich vielen Wurzeln der Gleichung ersten Grades $x - a = 0$ folgende $x = ae^{2n\pi\sqrt{-1}}$, worin n jeden beliebigen ganzen Werth annehmen kann.

8) Die unendlich vielen Wurzeln einer Gleichung haben zum Theil gleiche Quantität und Richtung, d. h. sie unterscheiden sich nur durch die Zahl von ganzen Umdrehungen, durch welche sie aus der Grundeinheit entstanden gedacht werden müssen. Diese Wurzeln decken sich also in geometrischem Sinne gruppenweise, und wenn man nur die sich nicht deckenden als verschiedene Wurzeln ansehen will, reduzirt sich die Anzahl der Wurzeln einer Gleichung auf die Zahl n ihres Grades, d. h. des Exponenten des höchsten Gliedes, dessen Exponent einen von Null verschiedenen Werth hat.

Dieser Satz ist streng bewiesen, unter Anderem von mir in Grunert's Archiv Thl. 15.

9) Die Auflösung der Gleichungen besteht in einer gesetzlichen Verknüpfung der Koeffizienten. Diese Koeffizienten können ganz beliebige Werthe haben: sie sind nur an die Bedingung geknüpft, Grössen darzustellen, welche gewisse konstante Grössen geometrisch decken, also Grössen von konstanter Quantität und konstanter Richtung, sonst aber von beliebiger Umdrehungszahl.

Es kann nach Vorstehendem für alle Gleichungen (alle Grade) nur ein einziges Auflösungsgesetz geben und dieses Gesetz ist auch für alle Wurzeln einer Gleichung dasselbe und ein unendliches. Die Verschiedenheit des Resultates oder die Verschiedenheit der Wurzeln entspringt nur aus der Vieldeutigkeit oder Vielwerthigkeit der in dieses Gesetz verflochtenen und im Laufe seiner Anwendung daraus entspringenden Grössen *).

10) Eine Abkürzung dieses Auflösungsverfahrens, d. h. eine Verminderung der darin vorgeschriebenen Operationen kann nur eintreten, wenn die Koeffizienten der Gleichung gewissen speziellen Bedingungen genügen.

Namentlich bewirkt der Nullwerth wesentliche Vereinfachungen, weil alle Multiplikationen und Potenzirungen dieser Grösse denselben Nullwerth behalten, also geometrisch sich nicht davon unterscheiden. Der erste wichtige Einfluss des Nullwerthes macht sich geltend, wenn gewisse Koeffizienten der Gleichung Null sind. Haben die höchsten Koeffizienten den Nullwerth; so bewirkt diess die unterNr.8) erwähnte Verminderung der Zahl der ungleichen Wurzeln und eine namhafte Vereinfachung des Auflösungsverfahrens. Nur die Annullirung der obersten Koeffizienten bedingt die grössere Einfachheit, welche die Auflösung einer Gleichung ersten Grades vor der einer Gleichung zweiten und diese vor der Auflösung einer Gleichung dritten Grades voraus hat.

Durch Annullirung einer unendlichen Menge von oberen Koef-

---

*) Ich erlaube mir bei dieser Gelegenheit auf das allgemeine und direkte Näherungsverfahren zur Auflösung jeder Gleichung ohne alle Versuchsrechnungen, welches ich in Nr. 10. meiner Schrift über die „Auflösung der algebraischen und transzendenten Gleichungen" entwickelt habe, aufmerksam zu machen.

fizienten kann das Verfahren sogar auf eine endliche Menge von Operationen reduzirt werden, wie es für die Gleichungen ersten bis vierten Grades bereits bekannt ist.

Aber auch im Verlaufe des Auflösungsverfahrens kann sich durch die Verknüpfung der gegebenen Grössen der Nullwerth einstellen und eine Abkürzung bewirken. Dieser Nullwerth kann bald die Quantität betreffen, wie in $0e^{\varphi\sqrt{-1}}$, bald die Drehung, wie in $ae^{0\sqrt{-1}}$: die vornehmlichsten Abkürzungen entspringen aus der Annullirung der Quantität.

Aehnliche Wirkungen wie der Nullwerth, kann auch mancher andere Spezialwerth hervorbringen, insbesondere wenn dadurch die Irrationalität, welche die allgemeine Eigenschaft der Grössen ist*), aufgehoben wird und in Rationalität übergeht, indem hiermit eine Unendlichkeit gewisser Operationen in eine endliche Menge verwandelt wird.

Auf diese Weise kann es also geschehen, dass selbst eine Gleichung von unendlich hohem Grade Wurzeln hat, welche sich durch ein endliches Verfahren darstellen lassen, indem nämlich durch Spezialwerthe der Koeffizienten unendliche Reihen von Operationen auf endliche zusammenschrumpfen.

Als ein interressantes Beispiel dieser Art bietet sich die Gleichung

$$x - \frac{\pi^2}{1.2.3}x^3 + \frac{\pi^4}{1.2.3.4.5}x^5 - \frac{\pi^6}{1.2.3.4.5.6.7}x^7 + \ldots = 0 \tag{8}$$

dar, welche man aus Gleichung (6) erhält, wenn man darin $x\pi$ an die Stelle von x setzt. Diese Gleichung hat nämlich nur ganze Zahlen zu Wurzeln und ist gleichbedeutend mit der Gleichung

$$x[(x-1)(x-2)\ldots.][(x+1)(x+2)\ldots.] = 0$$

oder mit

*) Dass in der That die Irrationalität die allgemeine, die Rationalität dagegen eine spezielle Eigenschaft der Grössen ist, geht daraus hervor, dass es zwischen je zwei Grenzwerthen nur eine endliche Menge rationaler Werthe geben kann (indem rational nur derjenige Werth ist, welcher eine endliche Menge von Theilungen und Vervielfältigungen der Einheit erfordert), dass es dagegen zwischen jenen Grenzen unendlich viel Werthe überhaupt, folglich unendlich mal mehr irrationale als rationale Zahlen gibt.

$$x(1-x^2)(1-\frac{x^2}{4})(1-\frac{x^2}{9})\ldots = 0. \quad \ldots \ldots (9)$$

Ausserdem besitzt die Gleichung (6) ebenfalls eine rationale und leicht darstellbare Wurzel, nämlich die Wurzel $x = 0$.

11) Da das allgemeine Auflösungsgesetz das Auflösungsverfahren für die Gleichungen aller Grade als vereinfachte Spezialfälle enthält, die letzteren Verfahren also zu der Kategorie der eben beschriebenen Abkürzungen gehören; so ist es nützlich, bei jenen Abkürzungen diejenigen, welche eine Herabdrückung des allgemeinen Gesetzes auf ein niedrigeres Spezialgesetz bewirken, von denjenigen zu unterscheiden, welche nur Abkürzungen innerhalb des Bereiches eines solchen Gesetzes hervorbringen.

Nur durch Abkürzungen der ersteren Art ist es möglich, dass das Auflösungsverfahren einer Gleichung von unendlich hohem Grade für die eine oder andere Wurzel auf ein endliches Verfahren herabgedrückt werden kann, während Abkürzungen der letzteren Art, selbst wenn sie das Verfahren im Bereiche der sukzessiv niedrigeren Spezialgesetze noch so sehr, nämlich nur auf eine einzige Operation reduziren, doch immer n oder unendlich viel Operationen übrig lässt.

Die höchste Vereinfachung der letzteren Art würde offenbar dann eintreten, wenn sich die ganze Operation auf eine einzige Wurzelausziehung vom Grade n reduzirte, wo also die Gleichung sich in die Form

$$(x-a)^n = b \quad \text{oder} \quad x = a + \sqrt[n]{b}$$

bringen liesse. Aber selbst dieser einfachste Fall würde, wie man sieht, eine unendliche Operation nöthig machen, da n nach der Voraussetzung unendlich ist. Nur dann, wenn zugleich $b = 0$ wäre, also die Gleichung gleiche Wurzeln a hätte, würde sich für diese Wurzeln das Verfahren auf eine endliche Operation beschränken: allein dieser Fall liegt uns nicht vor, da die gegebene Gleichung (7) lauter verschiedene Wurzeln hat.

12) Wenn in Folge der Spezialwerthe der Koeffizienten einer Gleichung vom Grade n sich eine Wurzel nach dem Spezialgesetze eines niedrigeren Grades m berechnen lässt; so heisst diess mit anderen Worten, dass sie zugleich die Wurzel einer Gleichung vom Grade m sei.

Da ausserdem jedes Spezialgesetz wie dieses vom Grade m

vermöge der den Grössen zukommenden Vielwerthigkeit ganz von selbst auf so viel besondere Resultate führt, als seinem Grade m entspricht; so leuchtet ein, dass wenn die Berechnung der Wurzeln der Gleichung vom Grade n für irgend eine auf das einfachere Spezialgesetz des Grades m führt, diess nothwendig für m Wurzeln der Fall sein muss, weil sich aus der Anwendung des allgemeinen Gesetzes, indem sich dasselbe auf das Spezialgesetz vom Grade m reduzirt, ganz von selbst m besondere Wurzeln ergeben.

Demnach befinden sich unter den n Wurzeln der gegebenen Gleichung entweder gar keine oder überhaupt m Wurzeln, welche sich nach dem Spezialgesetze des Grades m berechnen lassen, aber auch nicht mehr.

13) Die Reduktion des Auflösungsverfahrens für gewisse Wurzeln einer Gleichung vom Grade n auf das Verfahren vom Grade m ist durchaus nichts Anderes, als die Absonderung eines Faktors vom Grade m aus der linken Seite der gegebenen Gleichung, wie denn die Reduktion jenes Verfahrens auf das Verfahren vom ersten Grade eben dasselbe sagt, wie die Absonderung eines Faktors $(x-a)$ vom ersten Grade oder wie die vollständige Auflösung der Gleichung.

Da das allgemeine Auflösungsverfahren alle Grade und überhaupt das Verfahren für irgend einen Grad n das Verfahren für jeden niedrigeren Grad m umfasst; so muss das Verfahren für irgend einen Grad n implizite die Verfahren für alle niedrigeren Grade enthalten oder es muss darin die sukzessive Absonderung von Faktoren der Grade $n-1$, $n-2$, $n-3$, ...1 liegen.

Wenn nun aber die allgemeine Auflösung einer Gleichung vom Grade n die Absonderung von Faktoren irgend eines niedrigeren Grades m stets mit sich bringt, wodurch unterscheidet sich der vorerwähnte spezielle Fall der Absonderung eines solchen Faktors von diesem allgemeinen Falle? Lediglich durch die erwähnte Abkürzung der Operationen, welche die höhere Komplikation des Verfahrens vom Grade n ganz beseitigt und dafür das einfachere Verfahren vom Grade m eintreten lässt. Dieses Resultat drückt sich analytisch folgendermaassen aus.

Wenn eine Gleichung vom Grade n durch das allgemeine

Verfahren in zwei Faktoren vom Grade m und $m-n=r$ zerlegt wird, so dass man

$$x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$
$$= (x^m + B_{m-1}x^{m-1} + \ldots + B_0)(x^r + C_{r-1}x^{r-1} + \ldots + C_0)$$

erhält; so ist es unerlässlich, dass die Koeffizienten B und C vielfache Werthe annehmen, weil sich die n Wurzeln in $\frac{1.2.3\ldots n}{1.2\ldots m.1.2\ldots r} = s$ verschiedener Weise so gruppiren lassen, dass m Wurzeln in den ersten und r Wurzeln in den zweiten Faktor fallen.

Soll der erste Faktor vom ersten Grade sein; so erhält man $s = \frac{1.2.3\ldots n}{1.1.2\ldots(n-1)} = n$ verschiedene Gruppirungen, d. h. in diesem Faktor, welcher die Form $(x-B)$ hat, kann B überhaupt n verschiedene Werthe annehmen, welche den n Wurzeln der Gleichung entsprechen. In jedem anderen Falle, wenn also der erste Faktor von einem höheren, als dem ersten Grade ist, wird die Zahl der Gruppirungen nicht kleiner, sondern grösser als n.

Der mehrerwähnte Spezialfall unterscheidet sich nun von diesem generellen dadurch, dass die Koeffizienten B und C nicht vielwerthig, sondern einwerthig ausfallen. Jene Vielwerthigkeit entspringt aber lediglich aus Wurzelausziehungen: sollen dieselben also unzweideutig werden, so müssen sich dieselben aus den Koeffizienten A der gegebenen Gleichung ohne Wurzelausziehungen oder auf rationalem Wege ergeben, d. h. sie müssen rationale Funktionen der Koeffizienten A sein.

Ob Letzteres der Fall ist, ergiebt sich, wenn man die Multiplikation der beiden Faktoren vom Grade m und r ausführt, die gleich hohen Koeffizienten der linken und rechten Seite einander gleich setzt und aus den sich ergebenden n Gleichungen die Werthe aller B und C bestimmt.

Ein Beispiel dieser Art ist folgende kubische Gleichung:

$$x^3 - 4x^2 - 3x + 12 = 0.$$

Setzt man dieselbe gleich

$$(x+a)(x^2+bx+c) = x^3 + (a+b)x^2 + (ab+c)x + ac,$$

so erhält man die drei Gleichungen:

$$a+b=-4,$$
$$ab+c=-3,$$
$$ac=\quad 12.$$

Hieraus ergiebt sich leicht $b(b^2+8b+13)=0$. Dem hieraus folgenden und als zulässig sich erweisenden Werthe $b=0$ entsprechen die Werthe $a=-4$ und $c=-3$, welche sich sämmtlich auf rationalem Wege, also unzweideutig ergeben, so dass sich die gegebene Gleichung nur in der Form $(x-4)(x^2-3)$ und in keiner anderen Form in einen Faktor ersten und zweiten Grades zerlegen lässt.

Die Rationalität der gesuchten Koeffizienten ist nicht das worauf es ankömmt, sondern die rationale Beziehung derselben zu den Koeffizienten der gegebenen Gleichung. So würde sich beispielsweise, wenn π die Ludolph'sche Zahl und ε die Basis des natürlichen Logarithmensystems bezeichnet, die kubische Gleichung $x^3-\pi x^2-\varepsilon x+\varepsilon\pi=0$ ganz ebenso wie die vorhergehende in die Form $(x-\pi)(x^2-\varepsilon)=0$ zerlegen, worin die Koeffizienten π und ε irrational sind, aber zu den Koeffizienten der gegebenen Gleichung in rationaler Beziehung stehen.

14) Der Unterschied zwischen dem generellen Verfahren behuf Absonderung eines Faktors $m$ten Grades aus der Funktion $n$ten Grades von dem vorstehenden speziellen Falle lässt sich auch dahin angeben, dass bei dem generellen Verfahren sich jede mögliche Gruppe von m Wurzeln in den fraglichen Faktor stellt, in dem letzteren speziellen Falle dagegen nur eine einzige bestimmte Gruppe.

Demzufolge erhält man durch das generelle Verfahren so viel verschiedene Gruppen von Werthen für die Koeffizienten B (und auch für die Koeffizienten C), als es verschiedene Gruppen von m Elementen aus n Elementen giebt, nämlich s. In dem bezeichneten speziellen Falle ergiebt sich jedoch nur eine einzige bestimmte Gruppe von Koeffizienten B und C.

Nur wenn sich aus der gegebenen Gleichung ein Faktor vom Grade m in mehrfacher Weise durch ein rationales Verfahren absondern lässt, erhält man eben so viel verschiedene Gruppen von Koeffizienten B und C.

15) Dass es sich bei dem in Rede stehenden speziellen Falle nicht bloss darum handelt, dass die Koeffizienten B und C mittelst eines endlichen, sondern auch darum, dass sie mittelst eines rationalen Verfahrens aus den Koeffizienten A der ge-

gebenen Gleichung gewonnen seien, ist zwar nach Vorstehendem an sich klar; zur Aufklärung der Sache dient aber noch die Bemerkung, dass wenn sich ein Faktor durch ein endliches, aber irrationales Verfahren absondern liesse, wenn also die Koeffizienten B und C irrationale Wurzelgrössen enthielten, sich dieser Fall sofort auf den vorhergehenden zurückführen lässt, indem man den Faktor $x^m + B_{m-1}x^{m-1} + \ldots = 0$ so umformt, dass aus seinen Koeffizienten alle Wurzelgrössen verschwinden, was nach meinem Artikel über das Rationalmachen der Funktionen in Grunert's Archiv Thl. 13. stets durch ein endliches Verfahren geschehen kann. Hierdurch erhält man eine neue Gleichung $x^\mu + \beta_{\mu-1}x^{\mu-1} + \ldots = 0$, welche allerdings von einem höheren Grade als m ist, auch möglicherweise fremde Wurzeln enthalten kann, aber doch der Bedingung, auf welche es hier ankömmt, entspricht, dass sie auf endlichem Wege aus der gegebenen Gleichung gewonnen ist und dass ihre Koeffizienten zu den Koeffizienten A der gegebenen Gleichung in rationaler Beziehung stehen.

16) Wenn sich die allgemeine Gleichung $n$ten Grades (also durch das generelle Verfahren) nach Gleichung (10) in irgend zwei Faktoren vom Grade m und r zerlegen lässt; so schliesst dieses Verfahren die vollständige Auflösung der Gleichungen vom $n$ten Grade und demzufolge auch aller niedrigeren Gleichungen in sich, indem zur Vollendung der Auflösungen nur noch rationale Operationen, nämlich nur noch die Operationen zur Aufsuchung des gemeinschaftlichen Maasses zweier ganzen Funktionen anzuwenden sind.

Denn das generelle Verfahren liefert so viel verschiedene Faktoren mit den Koeffizienten B und auch mit den Koeffizienten C, als es mögliche Gruppen von m und r Elementen aus den n Wurzeln giebt. Man erhält also, wenn $a_1, a_2 \ldots a_n$ diese Wurzeln sind, so viel verschiedene Faktoren von der Form

$$x^m + B_{m-1}x^{m-1} + \ldots + B_0 = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_m),$$

$$x^r + C_{r-1}x^{r-1} + \ldots + C_0 = (x - a_{m+1})(x - a_{m+2})\ldots(x - a_n),$$

als sich die Wurzeln $a_1, a_2 \ldots a_n$ in zwei Komplexen von m und r Gliedern anders gruppiren lassen.

Man findet leicht, dass unter der Gesammtheit aller dieser Faktoren solche sind, welche nur je eine Wurzel, z. B. a_1, oder den entsprechenden Grundfaktor $(x - a_1)$ mit einander gemein haben, andere, welche je zwei Wurzeln wie a_1 und a_2, andere

welche je drei Wurzeln a_1, a_2, a_3 u. s. w. bis schliesslich solche, welche je $m-1$ oder je $r-1$ Wurzeln (jenachdem m oder r die grössere Zahl ist) mit einander gemein haben. Demzufolge lässt sich durch Ausstreichung des gemeinschaftlichen Maasses zwischen den Faktoren vom Grade m und r jeder Faktor von niedrigerem Grade, also jede Funktion darstellen, welche nur eine oder nur zwei oder nur drei s. s. w. bis $m-1$, resp. $r-1$ Wurzeln enthält.

Durch Multiplikation der letzteren Funktionen mit den durch das generelle Verfahren direkt gefundenen lassen sich also alle Faktoren mit mit je einer, je zwei bis je $n-1$ Wurzeln darstellen.

Die Darstellung der Faktoren mit je einer Wurzel bildet die vollständige Auflösung der Gleichung. Demzufolge führt irgend eine generelle Zerlegung der Gleichung $n$ten Grades zur vollständigen Auflösung dieser Gleichung und aller niedrigeren Gleichungen. Ausserdem ist klar, weil zu der Vollendung der Auflösung nur noch rationale Operationen nöthig sind, dass die Wurzeln a_1, $a_2 \ldots . a_n$ jeder Gleichung in einem rationalen Verhältnisse zu den Koeffizienten B und C irgend zweier Faktoren stehen, in welche sich jene Gleichung zerlegen lässt.

17) Kehren wir jetzt zu unserer Gleichung (7) zurück. Angenommen, es liesse sich aus derselben durch ein endliches und rationales Verfahren (worunter wir ein endliches Verfahren verstehen, welches Grössen liefert, die zu den Koeffizienten der gegebenen Gleichung in rationalem Verhältnisse stehen) irgend ein Faktor vom Grade m absondern. Die kleinste in diesem Faktor enthaltene Wurzel sei $p\pi^2$ und die grösste $q\pi^2$ man habe also:

(11)

$$x^m + B_{m-1}x^{m-1} + \ldots . + B_0 = [x - p\pi^2][x - t\pi^2] \ldots . [x - q\pi^2] = 0.$$

Substituirt man jetzt $x = \frac{p}{q} y$, so geht bei gehöriger Reduktion diese Funktion über in

(12)

$$y^m + D_{m-1}y^{m-1} + \ldots . + D_0 = [y - q\pi^2][y - \frac{qt}{p}\pi^2] \ldots . [y - \frac{q^2}{p}\pi^2] = 0.$$

Setzt man in dieser Formel das Zeichen x an die Stelle von y; so hat man eine Gleichung, welche mit der Gleichung (11) eine

Wurzel, nämlich die Wurzel $q\pi^2$, aber auch nur diese einzige gemein hat, weil alle ihre übrigen Wurzeln grösser sind, als die grösste der Gleichung (11).

Sucht man also zwischen den beiden Funktionen (11) und (12) das gemeinschaftliche Maass, so erhält man die eine Auflösung $x = q\pi^2$ der Gleichung (7) *).

Da alle Koeffizienten der Gleichung (7) rationale Zahlen sind, so müsste das rationale (und endliche) Verfahren, welches nach der Voraussetzung die Gleichung (11) erzeugen soll, eine Funktion mit rationalen Koeffizienten B hervorbringen. Wegen der rationalen Substitution, welche die Funktion (12) aus (11) erzeugt, müssten alsdann auch die Koeffizienten D rationale Werthe annehmen und schliesslich müsste aus der Berechnung des gemeinschaftlichen Maasses $x - q\pi^2$ zwischen (11) und (12) auch der Koeffizient $q\pi^2$ dieses Maasses als rationale Grösse erscheinen.

Nun ist aber π^2 und mithin jedes Vielfache davon nachweislich eine Irrationalzahl (vgl. Schlömilch's algebraische Analysis, Kap. XX.): es ist also die Voraussetzung unmöglich, dass sich die Gleichung (7) durch irgend ein endliches Verfahren für irgend eine ihrer Wurzeln auflösen oder dass sich überhaupt daraus ein Faktor von irgend einem Grade m mit rationalen Koeffizienten B absondern lasse.

Wäre in der Funktion (11) jeder der beiden Faktoren $x - p\pi^2$ und $x - q\pi^2$ mehr als einmal enthalten; so ergäbe sich das

---

*) Ueber das allgemeine Verfahren zur Aufsuchung des gemeinschaftlichen Maasses zweier Funktionen erlaube ich mir folgende Bemerkung einfliessen zu lassen.

Man verlangt gewöhnlich zur Ausführung dieses Verfahrens, welches auf fortgesetzten Divisionen beruht, dass die beiden Funktionen nach absteigenden Potenzen von x geordnet seien, was zur Folge hat, dass die sukzessiven Reste wiederum so geordnet erscheinen und auf immer niedrigere Grade herabsinken. Diese Ordnung nach absteigenden Potenzen von x ist durchaus kein Erforderniss: man kann die Funktionen auch nach aufsteigenden Potenzen von x ordnen, und wie gewöhnlich die Division mit der niedrigeren Funktion beginnen. Alsdann erhöht sich zwar fortwährend der Grad der Reste: allein man kann in jedem Reste, dessen Glieder ein und dieselbe Potenz von x als Faktor erhalten, diese gemeinschaftliche Potenz absondern und aus der ferneren Rechnung lassen. Auf diese Weise erhält man ebenfalls Reste von herabsinkendem Grade.

gemeinschaftliche Maass von (11) und (12) als eine Potenz von $x-q\pi^2$. Man erhielte also schliesslich $(x-q\pi^2)^r=0$, was ebenfalls zu dem Resultate $x-q\pi^2=0$ führte.

18) Dass bei allen diesen Betrachtungen die eine Auflösung $x=0$, welche die Gleichung (6) ebenfalls besitzt, ausgeschlossen ist, versteht sich von selbst, indem der Nullwerth zu keinem Zahlenwerthe in einem endlichen, also überhaupt bestimmten, andererseits aber wieder zu jedem Zahlenwerthe in demselben Verhältnisse steht. Diese Eigenthümlichkeit gibt dem Nullwerthe im ganzen Zahlengebiete eine exzeptionelle Stellung, befreit ihn von den meisten Schranken der Zahlengesetze, macht ihn dafür aber auch ungeeignet zur Repräsentation solcher Gesetze, wesshalb denn auch der Nullwerth als Wurzel einer Gleichung Nichts über die allgemeine Natur dieser Wurzeln aussagt.

19) Die vorstehende Beweisführung gipfelt in dem Umstande, dass sämmtliche Koeffizienten der Gleichung (7) rational sind und dass solche Koeffizienten durch ein rationales endliches Verfahren nicht irrationale Werthe liefern können. Wären jene Koeffizienten irrational; so fiele der bindende Schluss hinweg, da es sehr wohl möglich ist, dass Irrationalzahlen durch ein rationales Verfahren rationale Werthe liefern (indem z. B. das Quadrat der Irrationalzahl $\sqrt{2}$ den rationalen Werth 2 ergiebt).

Demzufolge ist die vorstehende Argumentation nicht auf die Gleichung (9) oder (8) anwendbar, indem diese Gleichung irrationale Koeffizienten und in der That lauter rationale Wurzeln hat.

20) Da sich nach Nr. 17. und den früheren Nummern aus der Gleichung (7) kein Faktor irgend eines Grades m, also auch kein Faktor ersten Grades durch ein endliches Verfahren absondern lässt, so ist diese Gleichung nur durch das generelle Auflösungsverfahren, welches, weil der Grad n der Gleichung unendlich ist, selbst ein unendliches ist, aufzulösen: die Gleichung (7) ist mithin unlösbar. Dieser Ausdruck involvirt übrigens keineswegs die Unmöglichkeit der Existenz von Wurzeln, sondern nur die Unberechenbarkeit derselben mit endlichem Verfahren, oder die Unerschöpflichkeit der Rechnung, also die Unerreichbarkeit eines genauen Werthes.

Die Unberechenbarkeit schliest auch die Unkonstruirbarkeit ein. Denn wäre eine Auflösung der Gleichung (7) und damit jede ihrer Auflösungen konstruirbar, so liesse sich diese

geometrische Operation, welche aus lauter quadratischen Einzelakten besteht, in eine endliche und rationale Formel kleiden (indem jede aus der geometrischen Konstruktion entspringende Formel, da sie eine algebraische ist, auch rational gemacht werden kann. Vergl. das obige Zitat in Nr. 15.) und diese Formel müsste mindestens eine Wurzel $p\pi^2$ der Gleichung (7) ebenfalls als Wurzel enthalten.

Diese letztere Gleichung muss nun in Beziehung auf die darin enthaltene Wurzel $p\pi^2$ als lösbar gedacht werden, weil sie in Beziehung auf diesen Werth als konstruirbar vorausgesetzt ist und die Wege, welche die Konstruktion, um von jener Gleichung auf diese Wurzel zu gelangen, macht, durch arithmetische Operationen ersetzt werden können. Allerdings brauchen diese Operationen nicht in lauter rationalen Operationen zu bestehen: es können vielmehr auch Wurzelausziehungen darunter vorkommen. Die Darstellbarkeit einer Wurzel $p\pi^2$ zieht die Darstellbarkeit jeder anderen Wurzel $q\pi^2$ oder die Auflösbarkeit der Gleichung (7) nach sich. Da diese Auflösbarkeit aber als eine Unmöglichkeit erkannt ist, so könnte auch die zuletzt erwähnte Gleichung mit der Wurzel $p\pi^2$, wenn eine solche Gleichung überhaupt existirte, doch nicht für diese Wurzel lösbar, die Grösse π also nicht konstruirbar sein.

21) Aus allen diesen Untersuchungen ergeben sich einige interessante Eigenschaften der Ludolph'schen Zahl.

a) Es kann keine lösbare endliche Gleichung mit rationalen Koeffizienten geben, welche π oder ein Vielfaches davon als Wurzel enthielte.

b) Es kann aber auch keine unlösbare endliche Gleichung mit rationalen Koeffizienten geben, welche π als Wurzel enthielte. Denn eine Gleichung, sei sie algebraisch oder transzendent, ist der Ausdruck für das Wesen der darin mit x bezeichneten Grösse, d. h. für alle wesentlichen Beziehungen, in welchen diese Grösse zu der Gesammtheit aller Grössen steht. In jener Gleichung ist die Definition der Grösse x gegeben. Die Vielfachheit der Wurzeln einer Gleichung drückt die wahre Bedeutung der Gleichung nicht vollständig aus. Die wirkliche Bedeutung einer Gleichung ist die, dass sie eine Grösse x vollständig definire oder charakterisire, indem sie die Beziehungen angiebt, in welchen diese Grösse zu den übrigen Grössen steht. In der Auflösung der Gleichung stellt sich diese Grösse x durch eine einzige Formel dar, welche vermöge der

darin vorkommenden Wurzelgrössen vieldeutig sein, d. h. eine gewisse Anzahl von Grundwerthen annehmen kann. (Dass jede Gleichung, wenn auch nicht durch ein endliches Verfahren oder durch eine endliche Formel, so doch durch eine unendliche Formel auflösbar sei, muss anerkannt werden).

Die Bestimmungstücke für die Grösse x in der Gleichung $F(x)=0$ sind die in der Funktion $F(x)$ vorgeschriebenen Operationen, also die Koeffizienten, die Zeichen, die Exponenten und sonstigen Beziehungen und Verknüpfungsweisen. Von diesen Stücken nennen wir diejenigen wesentliche oder charakteristische, deren Aenderung mit einer Aenderung der Wurzel x begleitet ist; die übrigen aber unwesentliche. So ist z. B. in einer Gleichung von ganzem Grade der absolute Werth der Koeffizienten unwesentlich; ihr Verhältniss zu einander aber wesentlich, indem man statt $ax+b=0$ auch $nax+nb=0$ schreiben kann. Wesentlich ist unter Anderm der Grad einer Gleichung.

Jede wesentliche Aenderung der Funktion $F(x)$ hat also eine Aenderung der Wurzel x zur Folge; jede Gleichung von speziellem Charakter stellt nur eine einzige Grösse x (welche vieldeutig sein kann) dar; eine Grösse x kann nicht zugleich die vollständige Wurzel mehrerer Gleichungen von verschiedenem Charakter sein.

Hiernach kann z. B. eine eindeutige Grösse nicht durch eine quadratische Gleichung dargestellt werden. Die Gleichung $x-a=0$ sagt etwas Anderes, als die Gleichung $x^2-a^2=0$, auch etwas Anderes als die Gleichung $(x-a)^2=0$: denn die erste Gleichung hat die eindeutige Wurzel a, die zweite hat die zweideutige Wurzel $a\sqrt{1}=\pm a$ und die dritte hat die Wurzel a zweimal.

Die Grösse π ist durch die Gleichung (7) oder eine durch Transformation daraus entstehende, also äquivalente Gleichung definirt. Durch diese Gleichung ist die Beziehung ausgedrückt, in welcher diese Grösse zum Zahlengebiete stehen soll. Andere, charakteristisch verschiedene Bestimmungen für jene Grösse giebt es nicht; die in Gleichung (7) ausgedrückten sind die einzigen und allein maassgebenden. Jedes Gesetz, welches die Grösse π mit anderen Grössen in Verbindung bringt, kann mithin nur ein Ausfluss des in Gleichung (7) liegenden Gesetzes sein, und die Kombination mit andern, ausserhalb jenes Gesetzes liegenden, also unwesentlichen Beziehungen kann nur das Resultat der Vereinigung solcher unwesentlichen Gesetze mit der Gleichung (7)

sein. Alle wesentlichen Beziehungen müssen sich daher als Resultate der Umformung dieser Gleichung ergeben und alle möglichen Beziehungen können sich nur als Resultate der Umformung der Gleichung (7) und der gleichzeitigen Kombination mit ausserwesentlichen Gesetzen ergeben.

Dem Ausserwesentlichen haftet nothwendig das Merkmal der Willkürlichkeit in irgend einer Beziehung an. Denn wäre daran Nichts willkürlich, so stände dasselbe zu dem Gegenstande, auf welchen sich die Begriffe des Wesentlichen und Unwesentlichen beziehen, in einer durchaus nothwendigen und in allen Stücken bestimmten Beziehung, trüge also den Charakter des Wesentlichen.

In Betracht dieser Willkürlichkeit in irgend einer Beziehung muss man nun schliessen, dass wenn die Gleichung

$$(x-\pi)F(x)=0$$

in $F(x)$ fremde Wurzeln enthält, es noch mehrere Gleichungen in der Form

$$(x-\pi)F_1(x)=0$$

geben muss, in welchen die Wurzel π mit andern fremden Wurzeln durch den Faktor $F_1(x)$ verknüpft ist.

Sonderte man zwischen zwei Gleichungen das gemeinschaftliche Maass $x-\pi$ ab, so fände man die Auflösung $x=\pi$, was nach Nr. 20. unmöglich ist.

c) Es kann auch keine endliche Gleichung mit rationalen Koeffizienten geben, welche ein Vielfaches von π mehreremal oder verschiedene Vielfache von π mehreremal als Wurzel enthielte, also keine Gleichung von der Form

$$(x-p\pi)^r(x-q\pi)^s \ldots . F(x)=0.$$

Denn aus dem sub *b)* entwickelten Grunde liesse sich alsdann die Gleichung

$$(x-p\pi)^r(x-q\pi)^s \ldots . =0$$

herstellen und aus dieser Gleichung liesse sich nach dem in Nr. 17) angewandten Verfahren

$$(x-p\pi)^r=0 \quad \text{und} \quad x-p\pi=0$$

in rationalen Zahlen herstellen, was nicht möglich ist.

d) Nach Vorstehendem kann keine algebraische Gleichung

die Zahl π als Wurzel enthalten. Denn jede algebraische Gleichung kann so umgeformt werden, dass x und jeder Koeffizient als rationale Grösse erscheint, worauf dann der letztere Satz Anwendung findet.

e) Auch keine algebraische Funktion von π kann eine Wurzel einer algebraischen Gleichung sein. Denn wenn $f(\pi)$ diese Funktion von π wäre, welche als x der Gleichung $F[x] = 0$ genügen sollte; so könnte man die Gleichung $F[f(\pi)] = 0$ so umformen, dass sie in Beziehung zu π rational würde und nur rationale Koeffizienten enthielte, also sich in der Form

$$\pi^m + A_{m-1}\pi^{m-1} + \ldots + A_0 = 0$$

darstellte. Da nun keine endliche rationale Gleichung mit rationalen Koeffizienten die Wurzel π enthalten kann, so ist die letztere Gleichung und damit die Voraussetzung unmöglich.

f) Jede Potenz von π, ja jede ganze endliche rationale Funktion von π mit rationalen Koeffizienten ist irrational. Denn wäre in

$$\pi^m + A_{m-1}\pi^{m-1} + \ldots + A_0 = B$$

jeder Koeffizient und auch B rational; so wäre

$$\pi^m + A_{m-1}\pi^{m-1} + \ldots + (A_0 - B) = 0$$

eine endliche ganze rationale Funktion mit rationalen Koeffizienten mit der Wurzel π, was nach Obigem unmöglich ist.

g) Die Zahl π kann durch keine endliche algebraische Funktion mit rationalen Zahlen ausgedrückt werden, ist also keine algebraische Zahl. Denn wäre die algebraische Funktion $F = \pi$; so liesse sich diese Gleichung rational machen, oder in eine völlig rationale Gleichung verwandeln, welche in Beziehung zu π eine ganze rationale Funktion mit rationalen Koeffizienten darstellte, was nach dem vorstehenden Satze unmöglich ist.

h) Hiernach ist die Zahl π weder durch die Hülfsmittel der niedern Geometrie, welche in gerader Linie und Kreis bestehen, noch durch die Zuhülfenahme algebraischer Kurven, wie Kegelschnitte u. dergl. konstruirbar.

22) Von allen unendlichen Gleichungen, deren Wurzeln die Vielfachen einer Grundgrösse a sind, hat nur die Gleichung (1), für welche diese Grundgrösse a gleich π ist oder zu π in einem

rationalen Verhältnisse steht, lauter rationale Koeffizienten. Steht die Grundgrösse zu π in einem irrationalen Verhältnisse, ist sie also eine rationale Zahl a oder eine irrationale Wurzelgrösse $\sqrt[m]{a}$, so werden sämmtliche Koeffizienten der fraglichen Gleichung irrational, weil sie, ähnlich wie in der Gleichung (3), die Produkte einer rationalen Zahl und einer Potenz von π oder die Produkte einer rationalen Zahl und einer irrational bleibenden Potenz des Produktes von π und einer irrationalen Zahl darstellen.

23) Der geometrische Ursprung der Zahl π liegt in der Rotation einer konstanten Figur. Die Bestimmung aller hieraus entspringenden Gebilde ist zwar leicht auf die der Zahl π zurückgeführt; eine Zusammenstellung der Grundgleichungen für die einzelnen Hauptfälle mag jedoch zur Uebersichtlichkeit nicht ganz unnütz sein.

Die Gleichung, welche die sukzessiven positiven und negativen Vielfachen von $\frac{\pi}{p}$ also die Grössen $0, \pm\frac{\pi}{p}, \pm\frac{2\pi}{p} \ldots \pm\frac{n\pi}{p}$ zu Wurzeln hat, ist folgende:

(13)

$$x\left(x^2-\frac{\pi^2}{p^2}\right)\left(x^2-\frac{4\pi^2}{p^2}\right)\left(x^2-\frac{9\pi^2}{p^2}\right)\ldots\left(x^2-\frac{n^2\pi^2}{p^2}\right)$$
$$=(-)^n\left(\frac{1.2.3\ldots n\pi^n}{p^2}\right)^2\frac{\sin px}{p}=0.$$

Diese Gleichung kann man so umformen:

(14)

$$px\left(1-\frac{p^2}{\pi^2}x^2\right)\left(1-\frac{p^2}{4\pi^2}x^2\right)\left(1-\frac{p^2}{9\pi^2}x^2\right)\ldots\left(1-\frac{p^2}{n^2\pi^2}x^2\right)=\sin px=0.$$

Die Gleichung (13), welche von der höchsten Potenz von x herabsteigt, hat für $n=\infty$ lauter unendliche Koeffizienten, die Gleichung (14) dagegen, welche von der niedrigsten Potenz von x aufsteigt, hat lauter endliche Koeffizienten und stellt ausserdem, wenn die Produkte entwickelt werden, immer eine konvergente Reihe dar.

Diese konvergente Reihe, welche die Entwickelung von (14) darstellt, ist die bekannte trigonometrische Formel für $\sin px$, nämlich:

$$px[1-\frac{p^2x^2}{2.3}+\frac{p^4x^4}{2.3.4.5}-\ldots.] = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Hieraus folgt, dass man näherungsweise π^2 aus den Gleichungen

$$1-\tfrac{1}{6}x=0 \quad \text{oder} \quad x-6=0;$$

$$1-\frac{x}{6}+\frac{x^2}{120}=0 \quad \text{oder} \quad x^2-20x+120=0;$$

$$1-\frac{x}{6}+\frac{x^2}{120}+\frac{x^3}{5040}=0 \quad \text{oder} \quad x^3-42x^2+840x-5040=0$$

u. s. w. bestimmen kann. Die erste liefert für π den Werth 2,45, die zweite $3,23 \pm 0,69\sqrt{-1} = 3,31 . e^{\varphi\sqrt{-1}}$, die dritte 3,08.

Der Kreisumfang $2r\pi$, welcher durch die Umdrehung des Endpunktes des Radius r entsteht, ist durch Gleichung (15) dargestellt, wenn man darin $\frac{1}{p}=2r$ setzt. Nimmt man den Radius $r=1$; so wird $p=\frac{1}{2}$. Die Rektifikation des Kreises führt also bei Ausscheidung der Wurzel Null zu der Grundgleichung

$$1-\frac{x^2}{2.3.2^2}+\frac{x^4}{2.3.4.5.2^4}-\ldots. = 0.$$

Die Kreisfläche $r^2\pi$, welche durch die Umdrehung des Radius r entsteht, erfordert $\frac{1}{p}=r^2$. Nimmt man das Quadrat $r^2=1$, so wird $p=1$. Die Quadratur des Kreises giebt also die Gleichung

$$1-\frac{x^2}{2.3}+\frac{x^4}{2.3.4.5}-\ldots. = 0.$$

Die Kugel $\frac{4r^3\pi}{3}$, welche durch die Umdrehung der Fläche des Halbkreises entsteht, verlangt $\frac{1}{p}=\frac{4r^3}{3}$. Nimmt man den Würfel $r^3=1$, so ist $p=\frac{3}{4}$; die Kubatur der Kugel liefert daher die Gleichung:

$$1-\frac{3^2x^2}{2.3.4^2}+\frac{3^4x^4}{2.3.4.5.4^4}-\ldots. = 0.$$

Die Kugelfläche $4r^2\pi$, welche durch die Umdrehung des Halbkreises entsteht, bedingt $\frac{1}{p}=4r^2$ oder wenn das Quadrat

$r^2 = 1$ genommen wird, $p = \frac{1}{4}$. Die Komplanation der Kugel führt mithin zu der Gleichung:

$$1 - \frac{x^2}{2.3.4^2} + \frac{x^4}{2.3.4.5.4^4} - \ldots. = 0.$$

Der Zylinder $hr^2\pi$, welcher durch die Umdrehung der Fläche des Rechteckes hr entsteht, erfordert $\frac{1}{p} = hr^2$, also, wenn der Körper $hr^2 = 1$ genommen wird, $p = 1$. Die Kubatur des Zylinders führt hiernach zu derselben Gleichung wie die Quadratur des Kreises, nämlich zu der Gleichung:

$$1 - \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4.5} - \ldots. = 0.$$

Die Zylinderfläche $2hr\pi$, welche durch die Umdrehung der einen Seite dieses Rechteckes entsteht, verlangt $\frac{1}{p} = 2hr$, also wenn die Fläche $hr = 1$ genommen wird, $p = \frac{1}{2}$. Die Komplanation des Zylinders liefert also dieselbe Gleichung wie die Rektifikation des Kreises, nämlich

$$1 - \frac{x^2}{2.3.2^2} + \frac{x^4}{2.3.4.5.2^4} - \ldots. = 0.$$

Der Kegel $\frac{hr^2\pi}{3}$, welcher durch die Umdrehung der Dreiecksfläche $\frac{hr}{2}$ entsteht, erfordert $\frac{1}{p} = \frac{hr^2}{3}$, also, wenn man den Körper $hr^2 = 1$ nimmt, $p = 3$. Für die Kubatur des Kegels hat man hiernach

$$1 - \frac{3^2x^2}{2.3} + \frac{3^4x^4}{2.3.4.5} - \ldots. = 0.$$

Der Kegelmantel $r\sqrt{r^2 + h^2}.\pi$, welcher durch die Umdrehung der einen Dreiecksseite $\sqrt{r^2 + h^2}$ entsteht, verlangt $\frac{1}{p} = r\sqrt{r^2 + h^2}$, oder wenn man die Fläche $r\sqrt{r^2 + h^2} = 1$ setzt, $p = 1$. Die Komplanation des Kegels führt mithin zu derselben Gleichung wie die Quadratur des Kreises und die Kubatur des Zylinders, indem man hierfür hat:

$$1 - \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4.5} - \ldots. = 0.$$

24) Die vorstehende Behandlung der Gleichung, welche die sukzessiven Vielfachen von π zu Wurzeln hat, führt zu der nicht ganz uninteressanten Betrachtung des allgemeineren Falles, wo die Aufstellung der Gleichung verlangt wird, deren Wurzeln die verschiedenen Werthe sind, welche eine Funktion $F(n)$ annimmt, wenn darin für n alle positiven und negativen ganzen Zahlen gesetzt werden. Diess geschieht folgendermassen:

Wenn sich die Auflösung der Gleichung

$$F(n) = x$$

in der Form

$$n = f(x)$$

vollzieht, so ist die gesuchte Gleichung

$$\sin[\pi f(x)] = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

Diese Gleichung hat die Wurzeln:

$$\ldots F(-2),\ F(-1),\ F(0),\ F(1),\ F(2) \ldots,$$

ist also auch gleich der Gleichung:

$$(17)$$

$$[x-F(0)]\{[x-F(1)][x-F(2)]\ldots\}\{[x-F(-1)][x-F(-2)]\ldots\} = 0.$$

Dividirt man die letzte Gleichung durch

$$(-1)^n F(0)[F(1)F(2)\ldots][F(-1)F(-2)\ldots]$$

und bezeichnet mit C eine konstante Grösse, so muss man folgende Entwicklung haben:

$$\sin[\pi f(x)]$$

$$= C[1-\frac{x}{F(0)}]\{[1-\frac{x}{F(1)}][1-\frac{x}{F(2)}]\ldots\}\{[1-\frac{x}{F(-1)}][1-\frac{x}{F(-2)}]\ldots\}.$$

Setzt man $x = 0$, so kömmt

$$C = \sin[\pi f(0)],$$

folglich:

$$(18)$$

$$\sin[\pi f(x)] = \sin[\pi f(0)]$$

$$\times[1-\frac{x}{F(0)}]\{[1-\frac{x}{F(1)}][1-\frac{x}{F(2)}]\ldots\}\{[1-\frac{x}{F(-1)}][1-\frac{x}{F(-2)}]\ldots\}.$$

Im Folgenden sind einige spezielle Fälle zusammengestellt.

Wurzel		Gleichung, welche jene Wurzeln enthält.
$F(n) = x,$	$n = f(x),$	$\sin[\pi f(x)] = 0,$
$n\pi = x,$	$n = \frac{x}{\pi},$	$\sin x = 0,$
$2n\pi = x,$	$n = \frac{x}{2\pi},$	$\sin \frac{1}{2}x = 0,$
$n = x,$	$n = x,$	$\sin \pi x = 0,$
$na = x,$	$n = \frac{x}{a},$	$\sin \frac{\pi x}{a} = 0,$
$na + b = x,$	$n = \frac{x-b}{a},$	$\sin \frac{\pi(x-b)}{a} = 0,$
$a^n = x,$	$n = \frac{\log x}{\log a},$	$\sin \frac{\pi \log x}{\log a} = 0,$
$e^n = x,$	$n = \log x,$	$\sin(\pi \log x) = 0,$
$ba^n = x,$	$n = \frac{\log \frac{x}{b}}{\log a},$	$\sin \frac{\pi \log \frac{x}{b}}{\log a} = 0,$
$e^{bn} = x,$	$n = \frac{\log x}{b},$	$\sin \frac{\pi \log x}{b} = 0,$
$e^{n\pi} = x,$	$n = \frac{\log x}{\pi},$	$\sin \log x = 0,$
$e^{n\sqrt{-1}} = x,$	$n = \frac{\log x}{\sqrt{-1}},$	$\sin \frac{\pi \log x}{\sqrt{-1}} = 0,$
$^{2n\pi\sqrt{-1}} = x,$	$n = \frac{\log x}{2\pi\sqrt{-1}},$	$\sin \frac{\log x}{2\sqrt{-1}} = 0,$
$n^a = x,$	$n = \sqrt[a]{x},$	$\sin \pi \sqrt[a]{x} = 0,$
$n^2 = x,$	$n = \sqrt{x},$	$\sin \pi \sqrt{x} = 0,$
$\frac{1}{n} = n^{-1} = x,$	$n = \frac{1}{x},$	$\sin \frac{\pi}{x} = 0,$
$(n\pi)^a = x,$	$n = \frac{1}{\pi}\sqrt[a]{x},$	$\sin \sqrt[a]{x} = 0,$
$\sqrt[a]{n} = x,$	$n = x^a,$	$\sin \pi x^a = 0,$
$\sqrt{n} = x,$	$n = x^2,$	$\sin \pi x^2 = 0,$
$\sqrt[a]{n\pi} = x,$	$n = \frac{x^a}{\pi},$	$\sin x^a = 0,$

Wurzel		Gleichung, welche jene Wurzeln ent
$(na+b)^c = x,$	$n = \frac{\sqrt[c]{x}-b}{a},$	$\sin \frac{\pi(\sqrt[c]{x}-b)}{a}$
$\sqrt[c]{na+b} = x,$	$n = \frac{x^c-b}{a},$	$\sin \frac{\pi(x^c-b)}{a}$
$an^2+bn+c = x,$	$n = \frac{-b+\sqrt{4a(x-c)+b^2}}{2a},$	$\sin\pi\frac{-b+\sqrt{4a(x-c)+b^2}}{2a}$
$a+\sqrt{bn+c} = x,$	$n = \frac{(x-a)^2-c}{b},$	$\sin\pi\frac{(x-a)^2-c}{b}$
$\log n = x,$	$n = e^x,$	$\sin \pi e^x$
$\log n\pi = x,$	$n = \frac{e^x}{\pi},$	$\sin e^x$
$\sin n = x,$	$n = \arcsin x,$	$\sin(\pi \arcsin x)$
$\cos n = x,$	$n = \arccos x,$	$\sin(\pi \arccos x)$
$\arcsin n = x,$	$n = \sin x,$	$\sin(\pi \sin x)$
$\arccos n = x,$	$n = \cos x,$	$\sin(\pi \cos x)$
$1+2+3+\ldots+n = x,$	$n = \frac{-1+\sqrt{8x+1}}{2},$	$\sin\pi\frac{-1+\sqrt{8x+1}}{2}$

IV.

Ueber Wasserhosen und über Duftanhang und Hagel.

Von

dem Herrn Grafen *L. v. Pfeil*

auf Hausdorf bei Neurode in Schlesien.

I. Wasserhosen.

Gegen Ende September des Jahres 1820 befanden sich mehrere Schlesier, unter denen der Unterzeichnete, in einem Garten bei Novi, südöstlich von Genua, um die reizende Meerfahrt, die schönen Trauben, und die herrliche Landschaft zu geniessen. Die Reisenden hatten dort einen Anblick, der an sich ziemlich selten, unter den besonderen Umständen meines Wissens noch nicht beobachtet worden ist.

Südlich von Novi tritt ein steiles Vorgebirge, der Apenninenkette angehörend, schroff in's Meer. Hinter dem Kamm des Vorgebirges betrachteten wir, wohl länger als eine halbe Stunde, eine Wasserhose, welche, den Berg um das Dreifache überragend, aus dunklen Gewitterwolken herabstieg, und sich sehr langsam ostwärts zu bewegen schien*). Die Wasserhose stellte sich dar

*) War die Stellung der Wasserhose, wie ich vermuthe, von S. W. nach N. O. gerichtet, so musste der obere, entferntere Theil, von unten und in grösserer Entfernung gesehen, uns verhältnissmässig tiefer erscheinen. Die Wasserhose hatte also muthmasslich in allen ihren Theilen eine gegen den Horizont geneigte Richtung, obschon ein Theil derselben uns fast horizontal erschien.

als eine lange, gekrümmte, cylindrische Röhre. Die Mitte des sichtbaren Theils hatte eine fast horizontale Richtung*). Mit einem guten Fernrohr**) sahen wir deutlich die grössere Dunkelheit der Ränder. Auch die wirbelnde Windung der Röhre liess sich an dunkleren und helleren Querstreifen derselben deutlich erkennen. Die Wasserhose war also in der Mitte durchscheinend. Ich gebe das Bild, wie es mir in der Erinnerung geblieben ist, auf Taf. I.

Schätze ich den Berg, hinter welchem sich die Wasserhose befand, nur zu 500 Fuss, und wie ich glaube, nicht zu hoch, so muss die Höhe der Wasserhose, welche ohne Unterbrechung bis an die Wolken reichte, mehr als 2000 Fuss betragen haben. In einer gedruckten Beschreibung der Reise, von meinem Vater herrührend, Breslau bei Aderholz 1830, ist S. 130 die Höhe, ich weiss nicht aus welchen Gründen, sogar auf 3000 Fuss geschätzt.

Das von mir Angeführte enthält meine ganz bestimmte Erinnerung. Ich weiss in's Besondere, dass ich mich in dem Verhältniss der scheinbaren Höhe der Wasserhose zur Höhe des Berges, hinter welchem sie sich befand, nicht wesentlich täuschte.

Wasserhosen werden ziemlich oft von Seefahrern erwähnt. Sie scheinen aus dem Meere zu entstehen, und nach und nach höher zu werden. Häufig senkt sich aus den Wolken eine correspondirende Röhre herab, welche sich mit der scheinbar aufsteigenden bisweilen vereinigt. Auch nach diesen Berichten reichen also die Wasserhosen häufig bis an die Wolken, oder stehen doch mit diesen im Zusammenhang.

Das scheinbare Aufsteigen der Wasserhosen aus dem Meere beweist nicht ein Entstehen aus dem Meere, sondern nur eine, vielleicht zufällige Bildung der Wasserhose von unten nach oben. Es sind wohl alle Gelehrten darüber einig, dass die Wasserhosen durch Wirbelwinde entstehen. Nun ist es zwar möglich, und kommt erweislich auch vor, dass heftige Winde ein wenig Wasserschaum in die Höhe treiben, ebenso wie sie auf dem Lande den Staub aufwirbeln. Vergebens aber würden wir uns nach einer bewegenden Kraft umsehen, welche es vermöchte, Wassermassen, wie eine Wasserhose sie ausgiesst, aus dem Meer bis

---

*) Wahrscheinlich war die Bewegung nordostwärts.

**) Einem ächten Ramsden von 19''' Objectiv und 21 maliger Vergrösserung.

in die Wolken hinauf zu wirbeln. Wäre ein solches Vorkommen überhaupt möglich, so müssten die bewegenden Stürme Alles in ihrer Nähe zerstören, während sie oft bei ziemlich ruhigem Wetter beobachtet worden sind.

Ueberdiess kommen Wasserhosen auch auf dem Lande vor, setzen aus dem Meere auf's Land, ihre Bahn durch Verwüstung bezeichnend. Schon darum können sie nicht aus dem Meere entstanden sein, oder entstehen.

Die richtige Erklärung ist also wohl die, dass Wasserhosen Regengüsse sind, welche von Wirbelwinden erfasst werden.

Ich gebe als Beispiel noch den Bericht über eine Wasserhose, welche den 19. Juli 1860 das Dorf Schlegel bei Neurode verwüstete. Das Wasser strömte mit solcher Gewalt in dem Thal des unbedeutenden Jahrwasserbaches, dass es, nach übereinstimmenden Berichten aller Zeugen, erst „mannshoch", weiter unten „wie ein Wollsack" gerollt kam. Ein Herr, der sich in seinem Gärtchen, etwa 30 Schritt vom Hause entfernt befand, musste auf der eiligen Rückkehr bis an die Kniee im Strome waten. In etwa einer halben Stunde waren 36 Gebäude und sämmtliche Brücken ganz oder theilweise zerstört, und 9 Personen ertränkt worden.

Von Hausdorf aus, 1¼ Meile entfernt, wurde die nach unten wirbelnde Wolke, welche sich ergoss, deutlich wahrgenommen. Die Röhrbildung erschien nur unvollkommen, dagegen hatte der Wirbelsturm an dem hauptsächlichsten Ort des Ergusses die Bäume rings nach allen Richtungen durch einander geworfen.

Ich gebe den Bericht meines Sohnes Eberhard, z. Z. Referendarius bei der Regierung in Breslau:

„Von der am 19. Juli 1860 über Schlegel sich ergiessenden Wasserhose hatte ich Gelegenheit, in einer Entfernung von etwa 1¼ Meilen Zeuge zu sein.

Ich befand mich bei vollkommen schönem Wetter und leicht bewölktem Himmel seit einer halben Stunde auf einem Spaziergange nach der Försterei im Tränkengrund, im Thal vor dem Forsthause, als sich plötzlich ein selten heftiger Sturm erhob, dessen Richtung nach allen Seiten sich änderte. Am Himmel zogen sich die Wolken schnell zusammen, und nach Verlauf von etwa 10 Minuten erblickte ich in südlicher Richtung, von Hausdorf nach Schlegel zu, eine Wolke von so tiefer Schwärze und so

scharfen Umrissen, wie ich mich noch nicht erinnere, gesehen zu haben. Diese Wolke senkte sich in der auf der Zeichnung (s. Taf. I.) angegebenen Weise durch zwei Säulen von verschiedener Stärke auf den, aus Höhenzügen bestehenden Horizont, und verschwamm mit dem letzteren dergestalt, dass man seine Umrisse nicht mehr erblicken konnte. Dabei schwankten die beiden dunklen Säulen rechts und links, so dass man die Einwirkung des heftigsten Sturm- und Wirbelwindes deutlich wahrnehmen konnte. Kaum 5 Minuten hielt jedoch diese Erscheinung an, und allmälig vereinigten sich beide Säulen, während die darüber schwebende dunkle Wolke sich immer mehr verkleinerte, bis sie, gänzlich auf den Horizont gesenkt, sich auflöste. Der Sturmwind dauerte fort."

II. Duftanhang und Hagel.

Jeder Winter führt in den Waldungen, zumal in denen des Gebirges ein physikalisches Phänomen herbei, welches ein Genuss für den Landschafter, und ein Schrecken für den Forstmann ist.

Kalte und trockene Nordostwinde erstarren die Zweige und Nadeln der Bäume mehrere Grade unter den Gefrierpunkt. Dreht sich dann der Wind, verbreiten sich Nebel durch den Wald, so schiessen Eisnadeln um die erkälteten Zweige an, und umgeben sie, oft mehrere Zoll dick, mit einem regelmässigen Mantel aus lockeren Krystallen. Der Wald blüht und strahlt in weissem Juwelenschmuck von ungewohntem Glanze. Dieses ist der Duftanhang, der den Landschafter mit Recht entzückt.

Bisweilen fällt auf den Duftanhang Schnee, der Wind schüttelt die Bäume, und die schöne Erscheinung geht ohne Nachtheil vorüber.

Oftmals aber ist der Verlauf ein anderer. Ein Thauwind folgt dem Nebel. Die wärmeren und feuchteren Dünste bilden ihren Niederschlag als Glatteis auf und zwischen den Eisnadeln, welche die Zweige umgeben, auf und in dem darauf niedergefallenen Schnee. Nun belasten centnerschwere Eismassen die Aeste und die Bäume, und zahlreiche Wipfel, selbst mannsdicke Stämme, zerbrechen unter der gewaltigen Last.

Das ist der Duftanhang, welcher den Forstmann in Schrecken setzt.

Wir haben hier gleichsam eine Hagelbildung in horizontaler Richtung, nur sind die Hagelkörner bis zur Last von Centnern gewachsen, weil sie unter stunden- und tagelanger Einwirkung entstanden sind.

Untersuchen wir die Bildung des eigentlichen sogenannten Hagels, so finden wir, dass dieselbe in ganz ähnlicher Weise, nur in vertikaler Richtung, und in kürzerer Zeit Statt findet. Wir wissen aus dem Anblick derjenigen Gebirge, welche der Schneelinie sich nähern, oder sie überschreiten, dass in allen Klimaten, und in jeder Jahreszeit in den höheren Schichten der Atmosphäre zuweilen Schnee fällt. Berührt derselbe nach und nach tiefere und wärmere Schichten, so wird er entweder aufthauen und als kalter Regen herabstürzen, oder aber, er wird einen Theil seiner Schneebildung behaupten. Ist letzteres der Fall, so wird er bei seinem Herabfallen, indem er wärmere und feuchtere Luftschichten berührt, die Dünste dieser Schichten in und an den Schneeflocken niederschlagen, die verdichteten Dünste werden den Schnee theils lösen, theils seine Zwischenräume ausfüllen. Das Produkt wird ein unvollkommenes, mehr oder minder mit Schneeresten durchsetztes Eis sein. Wir sehen dasselbe als Hagelkörner in allen ihren verschiedenen, inneren und äusseren Strukturen herabstürzen.

Um Hagel zu bilden, ist nur nöthig, dass ein sehr kalter Körper durch wärmere Schichten fällt. So hat man auf Island Hagel beobachtet, dessen Kern vulkanische Asche war.

Es kommen häufig verwüstende Hagelfälle vor, wobei viele Hagelkörner zu grösseren Massen zusammen gefroren sind. Ja man will Hagelfälle beobachtet haben, sie sind im Kosmos angeführt, wo fallende Eisstücke die Länge von 8 Zoll, ja die Grösse von Mühlensteinen, von Elephanten gehabt haben sollen. Nimmt man auch an, die Phantasie, der Indier zumal, habe bedeutend übertrieben, so scheint gleichwohl so viel festzustehen, dass Hagelfälle vorkommen, bei denen die Grösse der einzelnen Eisstücke aus einem einfachen Herabfallen von Schneeflocken durch wärmere Luftschichten nicht hinreichend erklärt wird.

Erinnern wir uns jedoch, was in dem vorhergehenden Aufsatze Nr. I. über Wasserhosen gesagt wurde, so dürfen wir wohl annehmen, dass solche ausserordentliche Hagelfälle entstehen, wenn fallender Hagel von Wirbelwinden ergriffen wird.

Es ist eine noch hier und da auftauchende Meinung*), Hagel falle nicht im Winter, oder nicht des Nachts. Ich selbst habe

*) Biot widerlegt sie in seiner Physik.

Hagel im Winter und in der Nacht sehr oft beobachtet. Dagegen habe ich allerdings noch niemals Hagel bei einer Temperatur unter dem Gefrierpunkt wahrgenommen. Sollte dergleichen in seltenen Fällen vielleicht beobachtet worden sein, was ich nicht weiss, so würde das Vorkommen auf wärmere Luftströme in der oberen Atmosphäre über kälteren in der tieferen schliessen lassen *).

Man hat bemerkt, dass grössere Hagelkörner nur in den gemässigten Klimaten vorzukommen pflegen. In höheren Breiten treten nur ganz kleine auf, sogenannte Graupeln, und in den Tropengegenden verschwindet der Hagel, sehr seltene Fälle vielleicht ausgenommen, gänzlich.

Die Erklärung hiervon hat keine Schwierigkeiten, wenn man erwägt, dass die Schneewolken in den höheren Breiten zu tief ziehen, als dass fallender Schnee sich in grössere Hagelkörner verwandeln könnte, während in den niederen Breiten der fallende Schnee in der Regel gänzlich aufthaut, ehe er den Boden erreicht. Nur in den gemässigten Klimaten können grössere Schneeflocken, ohne als Schnee herabzukommen, und ohne gänzlich aufzuthauen, durch wärmere Luftschichten von grösserer Tiefe fallen.

Bei fallendem Hagel nimmt man stets wahr, dass, wie natürlich, das Thermometer rasch fällt. Indess hatte ich nur ein einziges Mal Gelegenheit, das Fallen bis unter den Gefrierpunkt zu beobachten. In dem Augenblick, wo das Thermometer 0° zeigte, war der Hagelfall in einen Schneefall verwandelt. Die Beobachtung wurde in einer Meereshöhe von 1570′ Rhl. gemacht. Das Datum habe ich leider nicht aufgeschrieben.

Es ist merkwürdig, dass die Erklärung eines so häufigen Vorkommens wie der Hagel ist, so lange den Scharfsinn der Gelehrten vergeblich in Athem halten konnte. Schon der Umstand allein, dass die Hagelkörner unregelmässig sind, hätte auf den Gedanken führen müssen, dass man nicht mit einer primairen, sondern mit einer secundairen Erscheinung zu thun hatte.

---

*) Dergleichen dürfte wohl vornehmlich des Nachts vorkommen, wenn die am Boden erwärmte Luft in die Höhe steigt, und durch kalte Luftströme aus der leeren Atmosphäre ersetzt wird. Steigt man in Gebirgen des Nachts bergan, so empfindet man deutlich die wärmere Temperatur der höheren Lagen. So ergreifen auch die ersten Fröste stets zuvörderst die Pflanzen in der Tiefe (etwa das Kartoffelkraut) und später erst die höher liegenden.

V.

Beweis des in Thl. XLII. S. 354. mitgetheilten Beltrami'schen Satzes.

Von

Herrn *C. Struve*,

ordentlichem Lehrer an der königl. Realschule in Fraustadt.

Lehrsatz. In jedem Dreiecke ABC (Taf. II. Fig. 3.) ist der Mittelpunkt O des umschriebenen Kreises der Schwerpunkt der vier Mittelpunkte K, L, M, N der die drei Seiten des Dreiecks berührenden Kreise.

Beweis. Denkt man sich die Aussenwinkel des Dreiecks ABC halbirt, so bilden die Halbirungslinien ein Dreieck KLM, dessen Eckpunkte die drei Mittelpunkte der das Dreieck von aussen berührenden Kreise sind. Verbindet man K, L, M respective mit A, B, C, so ist Dreieck ABC für KLM das durch Verbindung der Fusspunkte der Höhen entstandene Dreieck, demnach schneiden sich AK, BL, CM in einem Punkte N und derselbe ist Mittelpunkt des in das Dreieck ABC beschriebenen Kreises, indem die Winkel von ABC durch die genannten Geraden halbirt werden. Nun liegt aber in jedem Dreiecke KLM der Mittelpunkt des durch die Fusspunkte der Höhen gehenden Kreises O mit dem Schnittpunkt der Mittellinien P und dem der Höhen N auf derselben Geraden, und zwar so, dass O zwischen beiden und $OP:ON=1:3$. Es ist aber P Schwerpunkt von K, L, M, folglich O Schwerpunkt von K, L, M, N, w. z. b. w.

VI.

Ein anderer rein geometrischer Beweis des Beltramischen Satzes vom Schwerpunkte der Centra der Berührungskreise eines Dreiecks.

Von

Herrn *Carl Schmidt*

in Spremberg.

Der Satz:

> Der Mittelpunkt des um ein ebenes Dreieck beschriebenen Kreises ist der Schwerpunkt der Mittelpunkte seiner vier Berührungskreise, wenn man sich dieselben mit gleichen Gewichten beschwert denkt,

tritt im Archiv zuerst Thl. 42. S. 354. auf. Ausser dem dort gegebenen analytisch-geometrischen Beweise des Herrn Herausgebers theilt das Archiv noch eine Zahl anderer Beweise mit, von denen die beiden ersten sich trigonometrischer Hülfsmittel bedienen, während die folgenden vier rein geometrisch gefasst sind, sich aber sämmtlich auf Hülfssätze aus der Lehre von den merkwürdigen Punkten am Dreieck stützen, die den Elementen nicht beigegeben zu werden pflegen. Es beruhen nämlich diese Beweise — explicite oder implicite — auf dem eigenthümlichen Verhältnisse des ursprünglichen Dreiecks zu dem Dreieck der Mittelpunkte seiner äusseren Berührungskreise und dem Dreieck der Seitenmitten des letzteren in Absicht auf zwei merkwürdige Punkte des ursprünglichen Dreiecks und je drei merkwürdige Punkte der beiden letzteren Dreiecke, — ein eigenthümliches Verhältniss, sofern diese Punkte nicht als acht, sondern als nur vier verschiedene erscheinen, — indem jeder derselben je zweien

Dreiecken zugleich in verschiedener Eigenschaft angehört, — die dabei in gerader Linie liegen und eine bestimmte Relation ihrer Entfernungen von einander innehalten. So interessant diese und ähnliche, namentlich bei dem dritten der rein geometrischen Beweise benutzten und in Betracht gezogenen merkwürdigen Beziehungen an sich und in ihrer Folgerung auf den Beltramischen Satz, sowie in ihrem Zusammenhange mit demselben auch sein mögen, so scheint doch ein noch etwas einfacherer Beweis des genannten Satzes, der sich nur auf die allergeläufigsten Sätze der Elemente stützt, nicht geradezu überflüssig zu sein.

Der folgende Beweis muss natürlich voraussetzen, dass die vier Mittelpunkte der Berührungskreise sich ergeben als die Durchschnittspunkte der sechs Halbirungslinien der Dreieckswinkel und der Nebenwinkel derselben; im Uebrigen stützt er sich wesentlich nur auf den Satz von der Gleichheit der zu gleichen Peripheriewinkeln gehörenden Bogen und Sehnen und die Umkehrung hiervon. Zugleich erscheint durch denselben der Beltrami'sche Satz als eine unmittelbare Folge einer noch ein wenig allgemeineren und dabei noch sinnenfälligeren Dreieckseigenschaft.

Die vier Mittelpunkte der vier Berührungskreise eines Dreiecks mögen J, A_1, A_2, A_3 heissen, wobei mit J der Mittelpunkt des inneren Berührungskreises bezeichnet sein soll. Diese vier Mittelpunkte bilden die sechs Paare JA_1, JA_2, JA_3, A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3. Die ersteren drei Paare mögen die ungleichartigen, die letzteren drei die gleichartigen Paare heissen. Alle vier Mittelpunkte lassen sich nun auf dreifache Weise zu je zweien der obigen Paare zusammenstellen, nämlich entweder als die beiden Paare

$$JA_1 \quad \text{und} \quad A_2A_3, \tag{1}$$

oder als $\quad JA_2 \quad$ „ $\quad A_1A_3,$

oder als $\quad JA_3 \quad$ „ $\quad A_1A_2.$

Wir haben also dreimal zwei zusammengehörige Paare, die wir ergänzende Paare nennen wollen.

Nennen wir den „Punkt der mittleren Entfernungen" je zweier Punkte ohne Beziehung auf statische Begriffe der Kürze wegen Schwerpunkt, so gilt der Satz:

> Die sechs Schwerpunkte der sechs Punktenpaare (1), die die vier Mittelpunkte der Berührungskreise eines Dreiecks bilden, liegen sämmtlich auf der Peripherie des um das Drei-

eck beschriebenen Kreises, und zwar liegen die Schwerpunkte je zweier ergänzenden Paare einander diametral gegenüber.

Also haben die Schwerpunkte je zweier ergänzenden Paare ihren Schwerpunkt im Mittelpunkt des um das Dreieck beschriebenen Kreises.

In diesem letzteren Ausdrucke liegt der Beltrami'sche Satz.

Beweis. In Taf. II. Fig. 4. sei ABC das der Betrachtung zu Grunde liegende Dreieck. (Die Seiten desselben, sowie deren Verlängerungen sind stärker gezeichnet.) Der um das Dreieck beschriebene Kreis habe seinen Mittelpunkt in G. Die sämmtlichen sechs Halbirungslinien der Dreieckswinkel und der Aussenwinkel sind im Allgemeinen Secanten des Kreises. (Dieselben sind minder stark gezeichnet.)

Im Falle eines gleichschenkligen Dreiecks ist die durch die Spitze gehende äussere Halbirungslinie eine Tangente; im Falle eines gleichseitigen Dreiecks sind alle drei äusseren Halbirungslinien Tangenten. Diese Specialfälle ordnen sich dem allgemeinen Falle eines ungleichseitigen Dreiecks nachgehends ohne Weiteres unter.

Die sechs Halbirungslinien schneiden als Secanten den Kreis ausser in den Ecken A, B, C noch in je einem Punkte. Diese Punkte sind mit den Ziffern 1 bis 6 bezeichnet.

Zuerst lässt sich erkennen, dass die Punkte 1 bis 6 zu je zweien einander diametral gegenüber liegen. Es ist nämlich der Winkel $1A6$ ein Rechter, da er durch die Halbirung der beiden Nebenwinkel an A entstanden ist, und dieserhalb ist die Linie 16 ein Durchmesser.

Analog ergiebt sich wegen des Rechten bei B, dass 25, und wegen des Rechten bei C, dass 34 ein Durchmesser ist.

Demnach liegen die Punkte 1 und 6, 2 und 5, 3 und 4 der Kreisperipherie um G einander diametral gegenüber, der Schwerpunkt jedes Paares ist also G.

Demnächst ist zu zeigen, dass die Punkte 1, 2, 3 die Schwerpunkte der ungleichartigen Punktenpaare JA_1, JA_2, JA_3 sind. Es werde dies für den Punkt 1 bezieblich seines zugehörigen Paares JA_1 gezeigt. Die (punktirten) Hülfslinien $1B$ und $1C$ sind gleich als Sehnen der beiden Hälften α des Dreieckswinkels bei A. Nun ist das Dreieck $JB1$ gleichschenklig, denn der Basiswinkel bei J ist als Aussenwinkel des Dreiecks $JAB = \alpha + \beta$,

und der Basiswinkel bei B ist $= \angle 1BC + \beta$, also auch $= \alpha + \beta$, da $\angle 1BC$ mit dem zweiten Winkel α auf demselben Bogen $1C$ steht. Ebenso ist das Dreieck $A_1 B 1$ gleichschenklig, denn der Basiswinkel bei A_1 ist im Dreieck $A_1 AB = 2R - \alpha - (R + \beta) = R - \alpha - \beta$, und der Basiswinkel bei B ist $= \angle A_1 BJ - \angle 1BC - \beta$, also auch $= R - \alpha - \beta$.

Hieraus ergiebt sich, dass $1J = 1A_1$, also 1 der Schwerpunkt für J und A_1 ist.

Ueberhaupt ergiebt sich aber hieraus, dass die Punkte J, B, A_1, C in der Peripherie eines Kreises um 1 liegen.

Ganz analog lässt sich zeigen, dass 2 der Schwerpunkt für J und A_2 und 3 der für J und A_3 ist.

Ebenso ergiebt sich überhaupt, dass die Punkte J, C, A_2, A in der Peripherie eines Kreises um 2, und J, A, A_3, B in der eines Kreises um 3 liegen.

Nunmehr ist zu zeigen, dass die Punkte 4, 5, 6 die Schwerpunkte der gleichartigen Punktenpaare $A_1 A_2$, $A_1 A_3$, $A_2 A_3$ sind.

Es werde dies für den Punkt 6 beziehlich seines zugehörigen Punktenpaares $A_2 A_3$ gezeigt. Die punktirten Hülfslinien $6B$ und $6C$ sind gleich als Sehnen zweier Bogen, die die gleichen Bogen $1B$ und $1C$ zu Halbkreisen ergänzen. Nun ist das Dreieck $A_2 B 6$ gleichschenklig, denn der Basiswinkel bei A_2 ist im Dreieck $A_2 AB = 2R - (1R + \alpha) - \beta = R - \alpha - \beta$, und der Basiswinkel bei B ist $= \angle 6BC - \beta$, also auch $= R - \alpha - \beta$, da $\angle 6BC$ mit $\angle 1BC$ $(= \alpha)$ auf dem Halbkreise $1C6$ steht. Ebenso ist das Dreieck $A_3 C 6$ gleichschenklig, denn der Basiswinkel bei A_3 ist im Dreieck $A_3 AC = 2R - (R + \alpha) - \gamma = R - \alpha - \gamma$, und der Basiswinkel bei C ist $= \angle 6CB - \gamma$, also auch $= R - \alpha - \gamma$, da $\angle 6CB$ mit $\angle 1CB$ $(= \alpha)$ auf dem Halbkreise $1B6$ steht.

Hieraus ergiebt sich, dass $6A_2 = 6A_3$, also 6 der Schwerpunkt für A_2 und A_3 ist.

Ueberhaupt ergiebt sich aber hieraus, dass die Punkte A_2, C, B, A_3 in der Peripherie um 6 liegen.

Ganz analog lässt sich zeigen, dass 5 der Schwerpunkt für A_1 und A_3, und 4 der für A_1 und A_2 ist.

Ebenso ergiebt sich überhaupt, dass die Punkte A_1, C, A, A_3 in der Peripherie eines Kreises um 5, und A_1, B, A, A_2 in der eines Kreises um 4 liegen.

Fassen wir nun endlich zusammen, dass der Schwerpunkt irgend eines ungleichartigen Punktenpaares, etwa der Schwerpunkt

1 des Paares JA_1 und der des ergänzenden Paares, also der Schwerpunkt 6 des Paares A_2A_3 in den Endpunkten des Diameters, 16, liegen, also hinwiederum ihren Schwerpunkt im Mittelpunkt G des um das Dreieck beschriebenen Kreises haben, so ist der Satz bewiesen.

Es hat sich aber überhaupt der Satz ergeben, dass die beiden Punkte jedes der sechs Paare, zu denen die Mittelpunkte der Berührungskreise zusammentreten können, wie mit je einer Ecke des Dreiecks in gerader Linie, so zusammen mit den beiden anderen Eckpunkten auf dem Umfange eines Kreises liegen, dass diese sechs Kreise, die jede der drei Ecken des Dreiecks vierfach und jeden der vier Mittelpunkte der Berührungskreise dreifach schneiden, sich als einen Kranz darstellen, indem sie nämlich ihre Mittelpunkte auf der Peripherie des um das Dreieck beschriebenen Kreises haben, und dass je zwei dieser Mittelpunkte in Beziehung auf den umschriebenen Kreis einander diametral gegenüberliegen.

Von diesem Satze ist der Beltrami'sche Satz eine unmittelbare Folge, wo nicht eine durch Benutzung des statischen Begriffes Schwerpunkt vermittelte elegante Fassung einer Seite desselben.

VII.

Ueber ein System parallelachsiger Rotationsflächen zweiter Ordnung, welche eine gemeinschaftliche Schnittcurve besitzen.

Von

Herrn *Heinrich Gretschel*,

Lehrer der Mathematik an der Handelslehranstalt in Leipzig.

Das Folgende bildet einen kleinen Nachtrag zu dem, was ich im dritten Hefte des 43sten Theils des Archivs (Nr. XXI.) über den Ort der Mittelpunkte der Flächen zweiter Ordnung, welche eine gemeinschaftliche Schnittcurve besitzen, mitgetheilt habe. Ich habe daselbst schon einen Fall behandelt, in welchem dieser Ort, welcher im Allgemeinen eine Raumcurve dritter Ordnung ist, in einen Kegelschnitt degenerirt; im Nachstehenden soll ein anderer derartiger Fall besprochen werden.

Den Ausgangspunkt für die folgenden Erörterungen bildet der bekannte Satz:

> Der Durchschnitt zweier Flächen zweiter Ordnung ist immer und nur dann eine sphärische Curve, wenn die Kreisschnitte der einen Fläche denen der anderen parallel sind.

Denkt man sich in's Besondere zwei Rotationsflächen mit parallelen Achsen, so fallen bei jeder derselben die Kreisschnitte zusammen in eine zur Achse senkrechte Ebene; der Durchschnitt dieser zwei Flächen wird also eine sphärische Curve r^4 sein, und alle Flächen zweiten Grades, welche sich durch diese Curve r^4 legen lassen, müssen zwei zusammenfallende Kreisschnitte haben, die denen der beiden ersten Flächen parallel gehen, d. h. es müssen Rotationsflächen sein, deren Achsen sämmtlich mit denen der beiden ersten Flächen parallel laufen.

Aus der Symmetrie der beiden ersten Flächen gegen die Ebene ihrer Drehungsachsen folgt, dass auch r^4 gegen diese Ebene symmetrisch liegt, und daraus ergiebt sich weiter, dass überhaupt jede durch r^4 zu legende Rotationsfläche zu dieser Ebene symmetrisch sein, d. h. ihre Drehungsachse in dieser Ebene haben muss. Dies zusammengefasst giebt den Satz:

> Durch die Schnittcurve zweier Rotationsflächen zweiter Ordnung mit parallelen Achsen lassen sich unzählig viele andere Rotationsflächen zweiter Ordnung legen, deren Achsen mit denen der beiden ursprünglichen in einer Ebene liegen und mit ihnen parallel laufen. Unter diesen Rotationsflächen befindet sich immer eine Kugel.

Die Ebene der Achsen schneidet sämmtliche Rotationsflächen in Kegelschnitten k^2, welche vier Punkte A, B, C, D gemeinsam haben und deren Achsen sämmtlich parallel sind; der eine dieser Kegelschnitte ist ein Kreis.

Es soll jetzt zunächst der spezielle Fall in's Auge gefasst werden, dass die beiden ursprünglichen Flächen ein Paar Rotationsparaboloide sind. Diese schneiden die Ebene der Achsen in ein Paar Parabeln, deren Achsen parallel liegen; ein Paar solche können aber nur zwei in endlicher Entfernung liegende Punkte A und B gemeinsam haben, und berühren sich ausserdem in dem unendlich entfernten Schnittpunkte ihrer Achsen, weil eine Parabel die unendlich entfernte Gerade der Ebene berührt. Hieraus folgt aber, dass auch alle anderen Curven k^2 sich in demselben unendlich entfernten Punkte berühren, also Parabeln mit parallelen Achsen sein müssen. Die Rotationsflächen sind also sämmtlich Paraboloide. Die Kugel ferner, welche durch die gemeinschaftliche Schnittcurve r^4 aller Rotationsflächen geht, muss unendlich gross sein, weil sie den unendlich entfernten Schnittpunkt der Achsen enthalten muss, ihr in endlicher Entfernung gelegener Theil ist also eine Ebene und die Raumcurve r^4 besteht aus einer in endlicher Entfernung liegenden Curve zweiten Grades,

die natürlich eine Ellipse ist, und aus einem unendlich entfernten Punkte (oder einer unendlich entfernten verschwindend kleinen Ellipse). Man erhält also das Resultat:

> Der Durchschnitt zweier Rotationsparaboloide mit parallelen Achsen ist eine Ellipse; durch dieselbe lassen sich noch unzählig viele Rotationsparaboloide legen, deren Achsen sämmtlich mit denen der beiden ersten parallel laufen.

Die Frage nach dem Orte der Mittelpunkte der eben betrachteten Rotationsflächen hat keine Bedeutung, da diese Mittelpunkte sämmtlich in unendlicher Ferne liegen.

Hiermit mag dieser spezielle Fall erledigt sein, und es soll nun zur Erörterung des allgemeinen Falles geschritten werden.

Da unter den Schnittcurven k^2 in der Ebene der Drehungsachsen sich im Allgemeinen ein Kreis befindet, so sind die Curven k^2 nicht sämmtlich Hyperbeln, sondern es giebt unter ihnen unzählig viele Ellipsen und zwei Parabeln. Von den letzteren hat die eine ihre Achse parallel zu der Richtung der Achsen der Drehungsflächen, die andere hat aber eine zu dieser Richtung senkrechte Achse. Es widerspricht dieses dem oben angegebenen Satze, dass die Achsen aller Kegelschnitte k^2 parallel sein müssen, insofern nicht, als ja die im Unendlichen gelegene Achse dieser Parabel gleichfalls der angegebenen Richtung parallel ist. Die erste Parabel gehört, wie man sofort bemerkt, einem Rotationsparaboloid an, dessen Drehungsachse den Achsen der übrigen Drehungsflächen parallel ist; die zweite Parabel aber gehört einem parabolischen Cylinder an, dessen Erzeugende senkrecht zur Ebene der Achsen der Rotationsflächen stehen. Eine solche parabolische Cylinderfläche kann als ein abgeplattetes Drehungsellipsoid betrachtet werden, dessen Mittelpunkt in unendlicher Ferne liegt.

Zu den Kegelschnitten, welche sich durch die vier Schnittpunkte A, B, C, D der Kegelschnitte k^2 legen lassen, gehören auch die Paare gerader Linien

AB und CD, AD und BC, AC und BD.

Aus dem Vorstehenden erhellt, dass die Halbirungslinien der Winkel, welche diese Paare bilden, unter sich parallel (resp. senkrecht zu einander) sein müssen. Uebrigens ist eines dieser Paare stets reell, während die beiden anderen reell oder imaginär sein können. Wir schliessen daraus, dass es unter den Rotationsflächen, welche sich durch r^4 legen lassen, immer wenigstens einen und höchstens drei Rotationskegel giebt.

Das Ergebniss dieser Betrachtungen ist nun folgendes:

> Unter den Rotationsflächen zweiter Ordnung, deren Achsen parallel und in einer Ebene gelegen sind, und welche sich in einer sphärischen Curve vierter Ordnung schneiden, befinden sich im Allgemeinen unzählig viele Ellipsoide und Hyperboloide, ein Paraboloid, entweder ein oder drei Rotationskegel und ein parabo-

lischer Cylinder, dessen Erzeugenden auf der Achsenebene senkrecht stehen.

Aus dem zuletzt erwähnten Umstande folgt übrigens, dass die senkrechte Projection der sphärischen Schnittcurve auf die Ebene der Achsen eine Parabel oder vielmehr ein Stück einer solchen ist.

Als eine bemerkenswerthe, ganz der Elementar-Geometrie angehörige Folgerung aus dem Vorstehenden erwähne ich noch den Satz:

Durch den gemeinschaftlichen Durchschnitt zweier Rotationskegel mit parallelen Achsen lässt sich stets noch ein dritter Rotationskegel legen, dessen Achse in der Ebene der Achsen der beiden ersten Kegel liegt und ihnen parallel ist; ferner lässt sich durch diesen Durchschnitt eine Kugel legen.

Projicirt man den gemeinschaftlichen Durchschnitt zweier solchen Kegel auf eine zu den Achsen senkrechte Ebene, so ist diese Projection eine aplanetische Curve. Denn sind S und T die Spitzen beider Kegelflächen, F und G die Punkte, in denen ihre Achsen die Projectionsebene schneiden, α und β die Cotangenten der Winkel, welche ihre Erzeugenden mit den Achsen bilden, ist ferner M ein Punkt der Schnittcurve und sind MN und MO die von ihm aus auf die Achsen gefällten Senkrechten, so ist

$$SN = \alpha . MN \quad \text{und} \quad TO = \beta . MO.$$

Ferner ist entweder $SN + TO$ oder $SN - TO$ eine constante Grösse, je nachdem die Punkte S und T auf entgegengesetzten Seiten oder auf derselben Seite einer durch M senkrecht zur Achsenrichtung gelegten Ebene sich befinden. Nennt man nun P die Projection von M und bezeichnet jene Constante mit c, so hat man wegen $PF = MN$ und $PG = MO$ für die Projection der Schnittcurve die Gleichung $\alpha . PF \pm \beta . PG = c$, durch welche Gleichung eine aplanetische Linie mit den Brennpunkten F und G charakterisirt ist. Aus der oben bemerkten Existenz eines dritten durch dieselbe Schnittcurve gehenden Rotationskegels folgt sofort, dass die aplanetische Curve noch einen dritten Brennpunkt besitzt, nämlich den Schnittpunkt H der Achse dieses dritten Kegels mit der Projectionsebene. Durch den vorstehenden stereometrischen Satz ist sonach ein recht passender Ausgangspunkt für eine rein geometrische Theorie der aplanetischen Linien gewonnen. Indessen soll auf diesen Gegenstand hier nicht weiter eingegangen werden.

Die Durchschnittscurve r^4 zweier solchen Kegelflächen besteht im Allgemeinen aus zwei gesonderten Theilen. Sind beide Kegelflächen gleich, so fällt der eine Theil in unendliche Ferne, denn von den vier in der Ebene der Achsen liegenden Punkten A, B, C, D, in denen sich die Seiten der beiden Kegel schneiden, fallen zwei wegen des Parallelismus der Seiten des einen und des anderen Kegel in's Unendliche; die Kugelfläche, welche sich durch r^4 legen lässt, degenerirt also in eine Ebene und auch der dritte Kegel fällt mit dieser Ebene zusammen. Der Durchschnitt zweier gleichen Rotationskegel mit parallelen Achsen ist daher ein Kegelschnitt.

Der Ort der Mittelpunkte aller derjenigen Rotationsflächen zweiten Grades, welche parallele Achsen und eine gemeinschaftliche Schnittcurve haben, ist eine in der Ebene ihrer Achsen liegende gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten parallel und resp. senkrecht zur Richtung der Rotationsachsen liegen.

Da nämlich sämmtliche Rotationsachsen in einer Ebene liegen, so liegen auch die Mittelpunkte in dieser Ebene und sind identisch mit den Mittelpunkten der Curven k^2. Weil nun unter letzteren sich zwei Parabeln befinden, so hat der Ort dieser Mittelpunkte zwei unendlich entfernte Punkte, ist also (da er im Allgemeinen ein Kegelschnitt sein muss) eine Hyperbel, deren Asymptoten die Achsen jener Parabeln sind, und da letztere senkrecht zu einander sind, so ist diese Hyperbel gleichseitig.

VIII.

Miscellen.

Ueber die durch $y = \sqrt[x]{x}$ dargestellte Curve mit zwei erläuternden Zeichnungen auf Taf. I.

Von Herrn Hubert Müller, Lehramts-Candidaten der Mathematik in Freiburg i. B.

Die Curve $y = \sqrt[x]{x}$ hat ein Maximum für den gleichen Werth von x wie die Curve von der Gleichung $y = \frac{lx}{x}$. Für die letztere ist $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1 - lx}{x^2}$, welcher Werth 0 wird für $lx = 1$ oder $x = e$. Der Grenzwerth von $\frac{1 - lx}{x^2}$ für $x = \infty$ ist 0. Desshalb hat die zweite Curve die Abscissenachse zur Asymptote, weil zugleich auch $y = \frac{lx}{x}$ Null wird. Weil aber zu gleichen Logarithmen auch gleiche Zahlen gehören, so muss die Curve $y = \sqrt[x]{x}$ ebenfalls zuletzt parallel der x-Achse verlaufen. Da zugleich der Grenzwerth von $\sqrt[x]{x}$ für $x = \infty$ Eins ist, so kann man sagen, die Curve $y = \sqrt[x]{x}$ hat zur Asymptote eine Linie, welche in der Entfernung 1 von der x-Achse mit letzterer parallel läuft.

In Taf. I. Fig. 1. ist die Curve $y = \sqrt[x]{x}$ bis zur Abscisse $x = 3$, in Taf. I. Fig. 2. ist sie in kleinerem Maassstabe bis zur Abscisse $x = 16$ dargestellt.

IX.

Ueber die Beurtheilung der Wurzeln einer vorgelegten cubischen Gleichung.

Vierte Abtheilung, als Fortsetzung der Abhandlung Thl. XLIV., No. I.

Von

Herrn *Ferdinand Kerz*,

Major in dem Grossherzogl. Hessischen Gendarmerie-Corps in Darmstadt

---

111.

Ist:

1) $$0 = a + by + cy^2 + y^3$$

und:

2) $$c^2 > 3b, \quad \text{also auch:} \quad 3c^2 > 9b,$$

so gehen die Formeln [93. 3) 4) 5) 6)] über in:

3) $$27(\mp r) = \pm(3c^2 - 9b)p \mp p^3,$$

4) $$\mp \frac{27r}{(3c^2-9b)^{\frac{3}{2}}} = \pm \left[\frac{p}{(3c^2-9b)^{\frac{1}{2}}}\right] \mp \left[\frac{p}{(3c^2-9b)^{\frac{1}{2}}}\right]^3,$$

5) $$\frac{27r}{(3c^2-9b)^{\frac{3}{2}}} = R,$$

6) $$p = P.(3c^2-9b)^{\frac{1}{2}},$$

und es folgt:

7) $$\pm R = \mp P \pm P^3.$$

Wenn p negativ ist, so erhalten auch die Glieder in P vorstehender Gleichung das entgegengesetzte Vorzeichen und es ergeben sich somit vier Fälle der verschiedenen Zeichenwechsel für Gleichung 7).

8) Es lässt sich indessen leicht nachweisen, dass sich diese vier Fälle auf folgende zwei Fälle zurückführen lassen:

IV. $$+R = \pm P \mp P^3,$$

welcher Gleichung entweder drei reelle Wurzeln oder eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln entsprechen.

112.

Substituirt man in diese Gleichung, zur Bildung einer Tabelle, für P

1) mit Berücksichtigung der oberen Vorzeichen, analog dem Vorhergehenden, nach und nach die Werthe:

$$0; \quad 0{,}001; \quad 0{,}002; \quad 0{,}003; \quad \text{u. s. w.};$$

so werden die Werthe von R von Null an anfangs bis zu einer gewissen Grösse zunehmen, dann wieder abnehmen bis R (mit dem Werthe von $P=1$) wieder gleich Null wird.

Substituirt man dann weiter für P

2) mit Berücksichtigung der unteren Vorzeichen, die Werthe:

$$1{,}001; \quad 1{,}002; \quad 1{,}003; \quad \text{u. s. w.};$$

so werden die Werthe von R von Null an wieder zunehmen, und zwar beständig mit dem Werthe von P wachsen.

113.

Die Frage, bis zu welcher Grösse R anfangs mit dem Werthe von P zunehme, beantwortet sich leicht, wenn man in Erwägung zieht, dass der Gleichung [111. IV.] mit diesem grössten Werthe von R zwei vollkommen gleiche Wurzeln entsprechen, und wir erhalten aus [33. 4) und 6)] alsbald:

1) $$R = \tfrac{2}{9}\sqrt{3} = 0{,}384900179459750\ldots.$$

2) $$P = \tfrac{1}{3}\sqrt{3} = 0{,}577350269189625\ldots. \text{ (zweimal)}$$

3) $$P = \tfrac{2}{3}\sqrt{3} = 1{,}154700538379251\ldots.,$$

wenn wir daselbst R für a, 1 für b, und P für y schreiben.

Es folgt hieraus:

Es gehören

4) zu jedem Werthe von:

$$R\begin{cases}>0\\<\frac{2}{9}\sqrt{3}\end{cases}$$

drei reelle und verschiedene Werthe für P;

5) zu jedem Werthe von:

$$R=\tfrac{2}{9}\sqrt{3}$$

drei reelle Werthe für P, unter welchen zwei einander gleich sind;

6) zu jedem Werthe von:

$$R>\tfrac{2}{9}\sqrt{3}$$

ein reeller und zwei imaginäre Werthe für P.

Nach Formel [111. IV.] haben wir in der [112.] angedeuteten Weise eine Tabelle entworfen, welcher wir wieder die verschiedenen Formeln bezüglich der Vorzeichen der Glieder einer gegebenen Gleichung vorausschicken.

Zusammenstellung der verschiedenen Fälle, welche sich zur annähernden Bestimmung der reellen Wurzeln einer vorgelegten cubischen Gleichung:

$$0=a+by+cy^2+y^3,$$

$c^2>3b$ vorausgesetzt, ergeben.

114.

	$0=\pm a+by+cy^2+y^3.$ $\pm 27q=+9bc-2c^3.$		$R=\frac{27r}{(3c^2-9b)^{\frac{3}{2}}}.$
1)	$+a<+q$	$q-a=r$	$(3y)=-c+p$
2)	$-a<+q$	$q+a=r$	$-\ \ +$
3)	$+a>+q$	$a-q=r$	$-\ \ -$
4)	$+a>-q$	$a+q=r$	$-\ \ -$
5)	$-a<-q$	$a-q=r$	$-\ \ +$
6)	$-a>-q$	$q-a=r$	$-\ \ -$

115.

	$0=\pm a-by+cy^2+y^3.$ $-27q=-9bc-2c^3.$		$R=\frac{27r}{(3c^2+9b)^{\frac{3}{2}}}.$
1)	$+a>-q$	$q+a=r$	$(3y)=-c-p$
2)	$-a>-q$	$q-a=r$	$-\ \ -$
3)	$-a<-q$	$a-q=r$	$-\ \ +$

116.

	$0 = \pm a + by - cy^2 + y^3.$ $\mp 27q = -9bc + 2c^3.$		$R = \frac{27r}{(3c^2 - 9b)^{\frac{3}{2}}}.$
1)	$-a > -q$	$q - a = r$	$(3y) = + c - p$
2)	$+a > -q$	$q + a = r$	$+ \; -$
3)	$-a < -q$	$a - q = r$	$+ \; +$
4)	$-a < +q$	$a + q = r$	$+ \; +$
5)	$+a > +q$	$a - q = r$	$+ \; -$
6)	$+a < +q$	$q - a = r$	$+ \; +$

117.

	$0 = \pm a - by - cy^2 + y^3.$ $+ 27q = + 9bc + 2c^3.$		$R = \frac{27r}{(3c^2 + 9b)^{\frac{3}{2}}}.$
1)	$-a < +q$	$q + a = r$	$(3y) = + c + p$
2)	$+a < +q$	$q - a = r$	$+ \; +$
3)	$+a > +q$	$a - q = r$	$+ \; -$

Anmerkung. Hat die vorgelegte Gleichung drei reelle Wurzeln, so ist [120. 4)] zu berücksichtigen.

118.

Tabelle IV.

R	$D = 0{,}00099$	P	R	$D = 0{,}00099$
0,000000000	9999	0,030	0,029973	7209
0,000999999	9993	0,031	0,030970209	7023
0,001999992	9981	0,032	0,031967232	6831
0,002999973	9963	0,033	0,032964063	6633
0,003999936	9939	0,034	0,033960696	6429
0,004999875	9909	0,035	0,034957125	6219
0,005999784	9873	0,036	0,035953344	6003
0,006999657	9831	0,037	0,036949347	5781
0,007999488	9783	0,038	0,037945128	5553
0,008999271	9729	0,039	0,038940681	5319
0,009999	9669	0,040	0,039936	5079
0,010998669	9603	0,041	0,040931079	4833
0,011998272	9531	0,042	0,041925912	4581
0,012997803	9453	0,043	0,042920493	4323
0,013997256	9369	0,044	0,043914816	4059
0,014996625	9279	0,045	0,044908875	3789
0,015995904	9183	0,046	0,045902664	3513
0,016995087	9081	0,047	0,046896177	3231
0,017994168	8973	0,048	0,047889408	2943
0,018993141	8859	0,049	0,048882351	2649
0,019992	8739	0,050	0,049875	2349
0,020990739	8613	0,051	0,050867349	2043
0,021989352	8481	0,052	0,051859392	1731
0,022987833	8343	0,053	0,052851123	1413
0,023986176	8199	0,054	0,053842536	1089
0,024984375	8049	0,055	0,054833625	0759
0,025982424	7893	0,056	0,055824384	0423
0,026980317	7731	0,057	0,056814807	0081
0,027978048	7563	0,058	0,057804888	9733
0,028975611	7389	0,059	0,058794621	9379
0,029973		0,060	0,059784	
R	$D = 0{,}00099$	P	R	$D = 0{,}00098$

Tabelle IV.

P	R	$D = 0{,}00098$	P	R	$D = 0{,}0009$
0,060	0,059784	9019	0,090	0,089271	75429
0,061	0,060773019	8653	0,091	0,090246429	74883
0,062	0,061761672	8281	0,092	0,091221312	74331
0,063	0,062749953	8003	0,093	0,092195643	73773
0,064	0,063737856	7519	0,094	0,093169416	73209
0,065	0,064725375	7129	0,095	0,094142625	72639
0,066	0,065712504	6733	0,096	0,095115264	72063
0,067	0,066699237	6331	0,097	0,096087327	71481
0,068	0,067685568	5923	0,098	0,097058808	70893
0,069	0,068671491	5509	0,099	0,098029701	70299
0,070	0,069657	5089	0,100	0,099	6970
0,071	0,070642089	4663	0,101	0,099969699	6909
0,072	0,071626752	4231	0,102	0,100938792	6848
0,073	0,072610983	3793	0,103	0,101907273	6786
0,074	0,073594776	3349	0,104	0,102875136	6724
0,075	0,074578125	2899	0,105	0,103842375	6661
0,076	0,075561024	2443	0,106	0,104808984	6597
0,077	0,076543467	1981	0,107	0,105774957	6533
0,078	0,077525448	1513	0,108	0,106740288	6468
0,079	0,078506961	1039	0,109	0,107704971	6403
0,080	0,079488	0559	0,110	0,108669	6337
0,081	0,080468559	0073	0,111	0,109632369	6270
0,082	0,081448632	9581	0,112	0,110595072	6203
0,083	0,082428213	9083	0,113	0,111557103	6135
0,084	0,083407296	8579	0,114	0,112518456	6067
0,085	0,084385875	8069	0,115	0,113479125	5998
0,086	0,085363944	7553	0,116	0,114439104	5928
0,087	0,086341497	7031	0,117	0,115398387	5858
0,088	0,087318528	6503	0,118	0,116356968	5787
0,089	0,0882950[illegible]	5969	0,119	0,117314841	5716
0,090	0,089271		0,120	0,118272	
P	R	$D = 0{,}00097$	P	R	$D = 0{,}000$

Tabelle IV.

R	$D = 0{,}0009$	P	R	$D = 0{,}0009$
0,118272	5644	0,150	0,146625	3205
0,119228439	5571	0,151	0,147557049	3114
0,120184152	5498	0,152	0,148488192	3023
0,121139133	5424	0,153	0,149418423	2931
0,122093376	5350	0,154	0,150347736	2839
0,123046875	5275	0,155	0,151276125	2746
0,123999624	5199	0,156	0,152203584	2652
0,124951617	5123	0,157	0,153130107	2558
0,125902848	5046	0,158	0,154055688	2463
0,126853311	4969	0,159	0,154980321	2368
0,127803	4891	0,160	0,155904	2272
0,128751909	4812	0,161	0,156826719	2175
0,129700032	4733	0,162	0,157748472	2078
0,130647363	4653	0,163	0,158669253	1980
0,131593896	4573	0,164	0,159589056	1882
0,132539625	4492	0,165	0,160507875	1783
0,133484544	4410	0,166	0,161425704	1683
0,134428647	4328	0,167	0,162342537	1583
0,135371928	4245	0,168	0,163258368	1482
0,136314381	4162	0,169	0,164173191	1381
0,137256	4078	0,170	0,165087	1279
0,138196779	3993	0,171	0,165999789	1176
0,139136712	3908	0,172	0,166911552	1073
0,140075793	3822	0,173	0,167822283	0969
0,141014016	3736	0,174	0,168731976	0865
0,141951375	3649	0,175	0,169640625	0760
0,142887864	3561	0,176	0,170548224	0654
0,143823477	3473	0,177	0,171454767	0548
0,144758208	3384	0,178	0,172360248	0441
0,145692051	3295	0,179	0,173264661	0334
0,146625		0,180	0,174168	
R	$D = 0{,}0009$	P	R	$D = 0{,}0009$

Tabelle IV.

P	R	D = 0,0009	P	R	D = 0,0008
0,180	0,174168	0226	0,210	0,200739	6707
0,181	0,175070259	0117	0,211	0,201606069	6580
0,182	0,175971432	0008	0,212	0,202471872	6453
0,183	0,176871513	9898	0,213	0,203339403	6325
0,184	0,177770496	9788	0,214	0,204199656	6197
0,185	0,178668375	9677	0,215	0,205061625	6068
0,186	0,179565144	9565	0,216	0,205922304	5938
0,187	0,180460797	9453	0,217	0,206781687	5808
0,188	0,181355328	9340	0,218	0,207639768	5677
0,189	0,182248731	9227	0,219	0,208496541	5546
0,190	0,183141	9113	0,220	0,209352	5414
0,191	0,184032129	8998	0,221	0,210206139	5281
0,192	0,184922112	8883	0,222	0,211058952	5148
0,193	0,185810943	8767	0,223	0,211910433	5014
0,194	0,186698616	8651	0,224	0,212760576	4880
0,195	0,187585125	8534	0,225	0,213609375	4745
0,196	0,188470464	8416	0,226	0,214456824	4609
0,197	0,189354627	8298	0,227	0,215302917	4473
0,198	0,190237608	8179	0,228	0,216147648	4336
0,199	0,191119401	8060	0,229	0,216991011	4199
0,200	0,192	7940	0,230	0,217833	4061
0,201	0,192879399	7819	0,231	0,218673609	3922
0,202	0,193757592	7698	0,232	0,219512832	3783
0,203	0,194634573	7576	0,233	0,220350663	3643
0,204	0,195510336	7454	0,234	0,221187096	3503
0,205	0,196384875	7331	0,235	0,222022125	3362
0,206	0,197258184	7207	0,236	0,222855744	3220
0,207	0,198130257	7083	0,237	0,223687947	3078
0,208	0,199001088	6958	0,238	0,224518728	2935
0,209	0,199870671	6833	0,239	0,225348081	2792
0,210	0,200739		0,240	0,226176	
P	R	D = 0,0008	P	R	D = 0,0008

Tabelle IV.

P	R	$D = 0{,}0008$	P	R	$D = 0{,}0007$
0,240	0,226176	2648	0,270	0,250317	8049
0,241	0,227002479	2503	0,271	0,251097489	7886
0,242	0,227827512	2358	0,272	0,251876352	7723
0,243	0,228651093	2212	0,273	0,252653583	7559
0,244	0,229473216	2066	0,274	0,253429176	7395
0,245	0,230293875	1919	0,275	0,254203125	7230
0,246	0,231113064	1771	0,276	0,254975424	7064
0,247	0,231930777	1623	0,277	0,255746067	6898
0,248	0,232747008	1474	0,278	0,256515048	6731
0,249	0,233561751	1325	0,279	0,257282361	6564
0,250	0,234375	1175	0,280	0,258048	6396
0,251	0,235186749	1024	0,281	0,258811959	6227
0,252	0,235996992	0873	0,282	0,259574232	6058
0,253	0,236805723	0721	0,283	0,260334813	5888
0,254	0,237612936	0569	0,284	0,261093696	5718
0,255	0,238418625	0416	0,285	0,261850875	5547
0,256	0,239222784	0262	0,286	0,262606344	5375
0,257	0,240025407	0108	0,287	0,263360097	5203
0,258	0,240826488	9953	0,288	0,264112128	5030
0,259	0,241626021	9798	0,289	0,264862431	4857
0,260	0,242424	9642	0,290	0,265611	4683
0,261	0,243220419	9485	0,291	0,266357829	4508
0,262	0,244015272	9328	0,292	0,267102912	4333
0,263	0,244808553	9170	0,293	0,267846243	4157
0,264	0,245600256	9012	0,294	0,268587816	3981
0,265	0,246390375	8853	0,295	0,269327625	3804
0,266	0,247178904	8693	0,296	0,270065664	3626
0,267	0,247965837	8533	0,297	0,270801927	3448
0,268	0,248751168	8372	0,298	0,271536408	3269
0,269	0,249534891	8211	0,299	0,272269101	3090
0,270	0,250317		0,300	0,273	
P	R	$D = 0{,}0007$	P	R	$D = 0{,}0007$

Tabelle IV.

P	R	D = 0,0007	P	R	D = 0,0006
0,300	0,273	2910	0,330	0,294063	7231
0,301	0,273729099	2729	0,331	0,294735309	7032
0,302	0,274456392	2548	0,332	0,295405632	6833
0,303	0,275181873	2366	0,333	0,296073963	6633
0,304	0,275905536	2184	0,334	0,296740296	6433
0,305	0,276627375	2001	0,335	0,297404625	6232
0,306	0,277347384	1817	0,336	0,298066944	6030
0,307	0,278065557	1633	0,337	0,298727247	5828
0,308	0,278781888	1448	0,338	0,299385528	5625
0,309	0,279496371	1263	0,339	0,300041781	5422
0,310	0,280209	1077	0,340	0,300696	5218
0,311	0,280919769	0890	0,341	0,301348179	5013
0,312	0,281628672	0703	0,342	0,301998312	4808
0,313	0,282335703	0515	0,343	0,302646393	4602
0,314	0,283040856	0327	0,344	0,303292416	4396
0,315	0,283744125	0138	0,345	0,303936375	4189
0,316	0,284445504	9948	0,346	0,304578264	3981
0,317	0,285144987	9758	0,347	0,305218077	3773
0,318	0,285842568	9567	0,348	0,305855808	3564
0,319	0,286538241	9476	0,349	0,306491451	3355
0,320	0,287232	9184	0,350	0,307125	3145
0,321	0,287923839	8991	0,351	0,307756449	2934
0,322	0,288613752	8798	0,352	0,308385792	2723
0,323	0,289301733	8604	0,353	0,309013023	2511
0,324	0,289987776	8410	0,354	0,309638136	2299
0,325	0,290671875	8215	0,355	0,310261125	2086
0,326	0,291354024	8019	0,356	0,310881984	1872
0,327	0,292034217	7823	0,357	0,311500707	1658
0,328	0,292712448	7626	0,358	0,312117288	1443
0,329	0,293388711	7429	0,359	0,312731721	1228
0,330	0,294063		0,360	0,313344	
P	R	D = 0,0006	P	R	D = 0,0006

Tabelle IV.

P	R	$D = 0{,}0006$	P	R	$D = 0{,}0005$
0,360	0,313344	1012	0,390	0,330681	4253
0,361	0,313954119	0795	0,391	0,331223529	4018
0,362	0,314562072	0578	0,392	0,331763712	3783
0,363	0,315167853	0360	0,393	0,332301543	3547
0,364	0,315771456	0142	0,394	0,332837016	3311
0,365	0,316372875	9923	0,395	0,333370125	3074
0,366	0,316972104	9703	0,396	0,333900864	2836
0,367	0,317569137	9483	0,397	0,334429227	2598
0,368	0,318163968	9262	0,398	0,334955208	2359
0,369	0,318756591	9041	0,399	0,335478801	2120
0,370	0,319347	8819	0,400	0,336	1880
0,371	0,319935189	8596	0,401	0,336518799	1639
0,372	0,320521152	8373	0,402	0,337035192	1398
0,373	0,321104883	8149	0,403	0,337549173	1156
0,374	0,321686376	7925	0,404	0,338060736	0914
0,375	0,322265625	7700	0,405	0,338569875	0671
0,376	0,322842624	7474	0,406	0,339076584	0427
0,377	0,323417367	7248	0,407	0,339580857	0183
0,378	0,323989848	7021	0,408	0,340082688	9938
0,379	0,324560061	6794	0,409	0,340582071	9693
0,380	0,325128	6566	0,410	0,341079	9447
0,381	0,325693659	6337	0,411	0,341573469	9200
0,382	0,326257032	6108	0,412	0,342065472	8953
0,383	0,326818113	5878	0,413	0,342555003	8705
0,384	0,327376896	5648	0,414	0,343042056	8457
0,385	0,327933375	5417	0,415	0,343526625	8208
0,386	0,328487544	5185	0,416	0,344008704	7958
0,387	0,329039397	4953	0,417	0,344488287	7708
0,388	0,329588928	4721	0,418	0,344965368	7457
0,389	0,330136131	4487	0,419	0,345439941	7206
0,390	0,330681		0,420	0,345912	
P	R	$D = 0{,}0005$	P	R	$D = 0{,}0004$

Tabelle IV.

P	R	D = 0,0003	P	R	D = 0,0003
0,420	0,345912		0,450	0,358875	
		6954			9115
0,421	0,346381539		0,451	0,359266149	
		6701			8844
0,422	0,346848552		0,452	0,359654592	
		6448			8573
0,423	0,347313033		0,453	0,360040323	
		6194			8301
0,424	0,347774976		0,454	0,360423336	
		5940			8029
0,425	0,348234375		0,455	0,360803625	
		5685			7756
0,426	0,348691224		0,456	0,361181184	
		5429			7482
0,427	0,349145517		0,457	0,361556007	
		5173			7208
0,428	0,349597248		0,458	0,361928088	
		4916			6933
0,429	0,350046411		0,459	0,362297421	
		4659			6658
0,430	0,350493		0,460	0,362664	
		4401			6382
0,431	0,350937009		0,461	0,363027819	
		4142			6105
0,432	0,351378432		0,462	0,363388872	
		3883			5828
0,433	0,351817263		0,463	0,363747153	
		3623			5550
0,434	0,352253496		0,464	0,364102656	
		3363			5272
0,435	0,352687125		0,465	0,364455375	
		3102			4993
0,436	0,353118144		0,466	0,364805304	
		2840			4713
0,437	0,353546547		0,467	0,36515243	
		2578			4433
0,438	0,353972328		0,468	0,365496768	
		2315			4152
0,439	0,354395481		0,469	0,365838291	
		2052			3871
0,440	0,354816		0,470	0,366177	
		1788			3589
0,441	0,355233879		0,471	0,366512889	
		1523			3306
0,442	0,355649112		0,472	0,366845952	
		1258			3023
0,443	0,356061693		0,473	0,367176183	
		0992			2739
0,444	0,356471616		0,474	0,367503576	
		0726			2455
0,445	0,356878875		0,475	0,367828125	
		0469			2170
0,446	0,357283464		0,476	0,368149824	
		0191			1884
0,447	0,357685377		0,477	0,368468667	
		9923			1598
0,448	0,358084608		0,478	0,368784648	
		9654			1311
0,449	0,358481151		0,479	0,369097761	
		9385			1024
0,450	0,358875		0,480	0,369408	
P	R	D = 0,0003	P	R	D = 0,0003

Tabelle IV.

R	D = 0,0003	P	R	D = 0,0002
0,369408	0736	0,510	0,337349	182
0,369715359	0447	0,511	0,377567169	151
0,370019832	0158	0,512	0,377782272	120
0,370321413	9868	0,513	0,377994303	090
0,370620096	9578	0,514	0,378203256	059
0,370915875	9287	0,515	0,378409125	028
0,371208744	8995	0,516	0,378611904	997
0,371498697	8703	0,517	0,378811587	966
0,371785728	8410	0,518	0,379008168	935
0,372069831	8117	0,519	0,379201641	904
0,372351	7823	0,520	0,379392	872
0,372629229	7528	0,521	0,379579239	841
0,372904512	7233	0,522	0,379763352	810
0,373176843	6937	0,523	0,379944333	778
0,373446216	6641	0,524	0,380122176	747
0,373712625	6344	0,525	0,380296875	715
0,373976064	6046	0,526	0,380468424	684
0,374236527	5748	0,527	0,380636817	652
0,374494008	5449	0,528	0,380802048	621
0,374748501	5150	0,529	0,380964111	589
0,375	485	0,530	0,381123	557
0,375248499	455	0,531	0,381278709	525
0,375493992	425	0,532	0,381431232	493
0,375736473	395	0,533	0,381580563	461
0,375975936	364	0,534	0,381726696	429
0,376212375	334	0,535	0,381869625	397
0,376445784	304	0,536	0,382009344	365
0,376676157	273	0,537	0,382145847	333
0,376903488	243	0,538	0,382279128	301
0,377127771	212	0,539	0,382409181	268
0,377349		0,540	0,382536	
R	D = 0,0002	P	R	D = 0,0001

Tabelle IV.

P	R	D = 0,0001	P	R	D = 0,0000
0,540	0,382536	236	0,570	0,384807	2359
0,541	0,382659579	203	0,571	0,384830489	2016
0,542	0,382779912	171	0,572	0,384850752	1673
0,543	0,382896993	138	0,573	0,384867483	1329
0,544	0,383010816	106	0,574	0,384880776	09849
0,545	0,383121375	073	0,575	0,384890625	06399
0,546	0,383228664	040	0,576	0,384897024	02943
0,547	0,383332677	007	0,577	0,384899967	[Siehe 119.]
0,548	0,383433408	9744	0,578	0,384899448	03987
0,549	0,383530851	9415	0,579	0,384895461	07461
0,550	0,383625	9085	0,580	0,384888	1094
0,551	0,383715849	8754	0,581	0,384877059	1443
0,552	0,383803392	8423	0,582	0,384862632	1792
0,553	0,383887623	8091	0,583	0,384844713	2142
0,554	0,383968536	7759	0,584	0,384823296	2492
0,555	0,384046125	7426	0,585	0,384798375	2843
0,556	0,384120384	7092	0,586	0,384769944	3195
0,557	0,384191307	6758	0,587	0,384737997	3547
0,558	0,384258888	6423	0,588	0,384702528	3900
0,559	0,384323121	6088	0,589	0,384663531	4253
0,560	0,384384	5752	0,590	0,384621	4607
0,561	0,384441519	5415	0,591	0,384574929	4962
0,562	0,384495672	5078	0,592	0,384525312	5317
0,563	0,384546453	4740	0,593	0,384472143	5673
0,564	0,384593856	4402	0,594	0,384415416	6029
0,565	0,384637875	4063	0,595	0,384355125	6386
0,566	0,384678504	3723	0,596	0,384291264	6744
0,567	0,384715737	3383	0,597	0,384223827	7102
0,568	0,384749568	3042	0,598	0,384152808	7461
0,569	0,384779991	2701	0,599	0,384078201	7820
0,570	0,384807		0,600	0,384	
P	R	D = 0,0000	P	R	D = 0,0000

Tabelle IV.

P	R	$D = 0{,}0000$	P	R	$D = 0{,}000$
0,600	0,384	8180	0,630	0,379953	1926
0,601	0,383918199	8541	0,631	0,379760409	1964
0,602	0,383832792	8902	0,632	0,379564032	2002
0,603	0,383743773	9264	0,633	0,379363863	2040
0,604	0,383651136	9626	0,634	0,379159896	2078
0,605	0,383554875	9989	0,635	0,378952125	2116
0,606	0,383454984	035	0,636	0,378740544	2154
0,607	0,383351457	072	0,637	0,378525147	2192
0,608	0,383244288	108	0,638	0,378305928	2230
0,609	0,383133471	145	0,639	0,378082881	2269
0,610	0,383019	181	0,640	0,377856	2307
0,611	0,382900869	218	0,641	0,377625279	2346
0,612	0,382779072	255	0,642	0,377390712	2384
0,613	0,382653603	291	0,643	0,377152293	2423
0,614	0,382524456	328	0,644	0,376910016	2461
0,615	0,382391625	365	0,645	0,376663875	2500
0,616	0,382255104	402	0,646	0,376413864	2539
0,617	0,382114887	439	0,647	0,376159977	2578
0,618	0,381970968	476	0,648	0,375902208	2617
0,619	0,381823341	513	0,649	0,375640551	2656
0,620	0,381672	551	0,650	0,375375	2695
0,621	0,381516939	588	0,651	0,375105549	2734
0,622	0,381358152	625	0,652	0,374832192	2773
0,623	0,381195633	663	0,653	0,374554923	2812
0,624	0,381029376	700	0,654	0,374273736	2851
0,625	0,380859375	738	0,655	0,373988625	2890
0,626	0,380685624	775	0,656	0,373699584	2930
0,627	0,380508117	813	0,657	0,373406607	2969
0,628	0,380326848	850	0,658	0,373109688	3009
0,629	0,380141811	888	0,659	0,372808821	3048
0,630	0,379953		0,660	0,372504	
P	R	$D = 0{,}0001$	P	R	$D = 0{,}000$

Tabelle IV.

P	R	D = 0,0003	P	R	D = 0,0004
0,660	0,372504	0878	0,690	0,361491	3037
0,661	0,372195219	1275	0,691	0,361060629	3452
0,662	0,371882472	1672	0,692	0,360626112	3867
0,663	0,371565753	2070	0,693	0,360187443	4283
0,664	0,371245056	2468	0,694	0,359744616	4699
0,665	0,370920375	2867	0,695	0,359297625	5116
0,666	0,370591704	3267	0,696	0,358846464	5534
0,667	0,370259037	3667	0,697	0,358391127	5942
0,668	0,369922368	4068	0,698	0,357931608	6371
0,669	0,369581691	4469	0,699	0,357467901	6790
0,670	0,369237	4871	0,700	0,357	7210
0,671	0,368888289	5274	0,701	0,356527899	7631
0,672	0,368535552	5677	0,702	0,356051592	8052
0,673	0,368178783	6081	0,703	0,355571073	8474
0,674	0,367817976	6485	0,704	0,355086336	8896
0,675	0,367453125	6890	0,705	0,354597375	9319
0,676	0,367084224	7296	0,706	0,354104184	9743
0,677	0,366711267	7702	0,707	0,353606757	0167
0,678	0,366334248	8109	0,708	0,353105088	0592
0,679	0,365953161	8516	0,709	0,352599171	1017
0,680	0,365568	8924	0,710	0,352089	1443
0,681	0,365178759	9333	0,711	0,351574569	1870
0,682	0,364785432	9742	0,712	0,351055872	2297
0,683	0,364388013	0152	0,713	0,350532903	2725
0,684	0,363986496	0562	0,714	0,350005656	3153
0,685	0,363580875	0973	0,715	0,349474125	3582
0,686	0,363171144	1385	0,716	0,348938304	4012
0,687	0,362757297	1797	0,717	0,348398187	4442
0,688	0,362339328	2210	0,718	0,347853768	4873
0,689	0,361917231	2623	0,719	0,347305041	5304
0,690	0,361491		0,720	0,346752	
P	R	D = 0,0004	P	R	D = 0,0005

Tabelle IV.

P	R	$D=0{,}0005$	P	R	$D=0{,}000$
0,720	0,346752	5736	0,750	0,328125	68975
0,721	0,346194639	6169	0,751	0,327435249	69426
0,722	0,345632952	6602	0,752	0,326740992	69877
0,723	0,345066933	7036	0,753	0,326042223	70329
0,724	0,344496576	7470	0,754	0,325338936	70781
0,725	0,343921875	7905	0,755	0,324631125	71234
0,726	0,343342824	8341	0,756	0,323918784	71688
0,727	0,342759417	8777	0,757	0,323201907	72142
0,728	0,342171648	9214	0,758	0,322480488	72599
0,729	0,341579511	9651	0,759	0,321754521	73052
0,730	0,340983	0089	0,760	0,321024	73508
0,731	0,340382109	0528	0,761	0,320288919	73965
0,732	0,339776832	0967	0,762	0,319549272	74422
0,733	0,339167163	1407	0,763	0,318805053	74880
0,734	0,338553096	1847	0,764	0,318056256	75338
0,735	0,337934625	2288	0,765	0,317302875	75797
0,736	0,337311744	2730	0,766	0,316544904	76257
0,737	0,336684447	3172	0,767	0,315782337	76717
0,738	0,336052728	3615	0,768	0,315015168	77178
0,739	0,335416581	4058	0,769	0,314243391	77639
0,740	0,334776	4502	0,770	0,313467	78101
0,741	0,334130979	4947	0,771	0,312685989	78564
0,742	0,333481512	5392	0,772	0,311900352	79027
0,743	0,332827593	5838	0,773	0,311110083	79491
0,744	0,332169216	6284	0,774	0,310315176	79955
0,745	0,331506375	6731	0,775	0,309515625	80420
0,746	0,330839064	7179	0,776	0,308711424	80886
0,747	0,330167277	7627	0,777	0,307902567	81352
0,748	0,329491008	8076	0,778	0,307089048	81819
0,749	0,328810251	8525	0,779	0,306270861	82286
0,750	0,328125		0,780	0,305448	
P	R	$D=0{,}0006$	P	R	$D=0{,}000$

Tabelle IV.

P	R	$D = 0{,}0008$	P	R	$D = 0{,}000$
0,780	0,305448	2754	0,810	0,278559	97073
0,781	0,304620459	3223	0,811	0,277588269	97560
0,782	0,303788232	3692	0,812	0,276612672	98047
0,783	0,302951313	4162	0,813	0,275632203	98535
0,784	0,302109696	4632	0,814	0,274646856	99023
0,785	0,301263375	5103	0,815	0,273656625	99512
0,786	0,300412344	5575	0,816	0,272661504	0000
0,787	0,299556597	6047	0,817	0,271661487	0049
0,788	0,298696128	6520	0,818	0,270656568	0098
0,789	0,297830931	6993	0,819	0,269646741	0147
0,790	0,296961	7467	0,820	0,268632	0197
0,791	0,296086329	7942	0,821	0,267612339	0246
0,792	0,295206912	8417	0,822	0,266587752	0295
0,793	0,294322743	8893	0,823	0,265558233	0345
0,794	0,293433816	9369	0,824	0,264523776	0394
0,795	0,292540125	9846	0,825	0,263484375	0443
0,796	0,291641664	0324	0,826	0,262440024	0493
0,797	0,290738427	0802	0,827	0,261390717	0543
0,798	0,289830408	1281	0,828	0,260336448	0592
0,799	0,288917601	1760	0,829	0,259277211	0642
0,800	0,288	2240	0,830	0,258213	0692
0,801	0,287077599	2721	0,831	0,257143809	0742
0,802	0,286150392	3202	0,832	0,256069632	0792
0,803	0,285218373	3684	0,833	0,254990463	0842
0,804	0,284281536	4166	0,834	0,253906296	0892
0,805	0,283339875	4649	0,835	0,252817125	0942
0,806	0,282393384	5133	0,836	0,251722944	0992
0,807	0,281442057	5617	0,837	0,250623747	1042
0,808	0,280485888	6102	0,838	0,249519528	1092
0,809	0,279524871	6587	0,839	0,248410281	1143
0,810	0,278559		0,840	0,247296	
P	R	$D = 0{,}0009$	P	R	$D = 0{,}001$

Tabelle IV.

R	$D=0,0011$	P	R	$D=0,001$
0,247296	193	0,870	0,211497	2733
0,246176679	244	0,871	0,210223689	2785
0,245052312	294	0,872	0,208945152	2838
0,243922893	345	0,873	0,207661383	2890
0,242788416	395	0,874	0,206372376	2943
0,241648875	446	0,875	0,205078125	2995
0,240504264	497	0,876	0,203778624	3048
0,239354577	548	0,877	0,202473867	3100
0,238199808	599	0,878	0,201163848	3153
0,237039951	649	0,879	0,199848561	3206
0,235875	700	0,880	0,198528	3258
0,234704949	752	0,881	0,197202159	3311
0,233529792	803	0,882	0,195871032	3363
0,232349523	854	0,883	0,194534613	3417
0,231164136	905	0,884	0,193192896	3470
0,229973625	956	0,885	0,191845875	3523
0,228777984	008	0,886	0,190493544	3576
0,227577207	059	0,887	0,189135897	3630
0,226371288	111	0,888	0,187772928	3683
0,225160221	162	0,889	0,186404631	3736
0,223944	214	0,890	0,185031	3790
0,222722619	265	0,891	0,183652029	3843
0,221496072	317	0,892	0,182267712	3897
0,220264353	369	0,893	0,180878043	3950
0,219027456	421	0,894	0,179483016	4004
0,217785375	473	0,895	0,178082625	4058
0,216538104	525	0,896	0,176676864	4111
0,215285637	577	0,897	0,175265727	4165
0,214027968	629	0,898	0,173849208	4219
0,212765091	681	0,899	0,172427301	4273
0,211497		0,900	0,171	
R	$D=0,0012$	P	R	$D=0,001$

Tabelle IV.

P	*R*	*D* = 0,0014	*P*	*R*	*D* = 0,001
0,900	0,171	327	0,930	0,125643	5975
0,901	0,169567299	381	0,931	0,124045509	6031
0,902	0,168129192	435	0,932	0,122442432	6087
0,903	0,166685673	489	0,933	0,120833763	6143
0,904	0,165236736	544	0,934	0,119219496	6199
0,905	0,163782375	598	0,935	0,117599625	6255
0,906	0,162322584	652	0,936	0,115974144	6311
0,907	0,160857357	707	0,937	0,114343047	6367
0,908	0,159386688	761	0,938	0,112706328	6423
0,909	0,157910571	816	0,939	0,111063981	6450
0,910	0,156429	870	0,940	0,109416	6536
0,911	0,154941969	925	0,941	0,107762379	6593
0,912	0,153449472	980	0,942	0,106103112	6649
0,913	0,151951503	034	0,943	0,104438193	6706
0,914	0,150448056	089	0,944	0,102767616	6762
0,915	0,148939125	144	0,945	0,101091375	6819
0,916	0,147424704	199	0,946	0,099409464	6876
0,917	0,145904787	254	0,947	0,097721877	6933
0,918	0,144379368	309	0,948	0,096028608	6990
0,919	0,142848441	364	0,949	0,094329651	7047
0,920	0,141312	420	0,950	0,092625	7104
0,921	0,139770039	475	0,951	0,090914649	7161
0,922	0,138222552	530	0,952	0,089198592	7218
0,923	0,136669533	586	0,953	0,087476823	7275
0,924	0,135110976	641	0,954	0,085749336	7332
0,925	0,133546875	697	0,955	0,084016125	7389
0,926	0,131977224	752	0,956	0,082277184	7447
0,927	0,130402017	808	0,957	0,080532507	7504
0,928	0,128821248	863	0,958	0,078782088	7562
0,929	0,127234911	919	0,959	0,077025921	7619
0,930	0,125643		0.960	0,075264	
P	*R*	*D* = 0,0015	*P*	*R*	*D* = 0,001

Tabelle IV.

R	$D = 0{,}001$	P	R	$D = 0{,}001$
0,075264	7677	0,990	0,019701	9433
0,073496319	7734	0,991	0,017757729	9492
0,071722872	7792	0,992	0,015808512	9552
0,069943653	7850	0,993	0,013853343	9611
0,068158656	7908	0,994	0,011892216	9671
0,066367875	7966	0,995	0,009925125	9731
0,064571304	8024	0,996	0,007952064	9790
0,062768937	8082	0,997	0,005973027	9850
0,060960768	8140	0,998	0,003988008	9910
0,059146791	8198	0,999	0,001997001	9970
0,057327	8256	1,000	0.	0030
0,055501389	8314	1,001	0,002003001	0090
0,053669952	8373	1,002	0,004012008	0150
0,051832683	8431	1,003	0,006027027	0210
0,049989576	8489	1,004	0,008048064	0271
0,048140625	8548	1,005	0,010075125	0331
0,046285824	8607	1,006	0,012108216	0391
0,044425167	8665	1,007	0,014147343	0452
0,042558648	8724	1,008	0,016192512	0512
0,040686261	8783	1,009	0,018243729	0573
0,038808	8841	1,010	0,020301	0633
0,036923859	8900	1,011	0,022364331	0694
0,035033832	8959	1,012	0,024433728	0755
0,033137913	9018	1,013	0,026509197	0815
0,031236096	9077	1,014	0,028590744	0876
0,029328375	9136	1,015	0,030678375	0937
0,027414744	9195	1,016	0,032772096	0998
0,025495197	9255	1,017	0,034871913	1059
0,023569728	9314	1,018	0,036977832	1120
0,021638331	9373	1,019	0,039089859	1181
0,019701		1,020	0,041208	
R	$D = 0{,}001$	P	R	$D = 0{,}002$

Tabelle IV.

P	R	$D = 0{,}002$	P	R	$D = 0{,}0023$
1,020	0,041208	1243	1,050	0,107625	107
1,021	0,043332261	1304	1,051	0,109935651	170
1,022	0,045462648	1365	1,052	0,112252608	233
1,023	0,047599167	1427	1,053	0,114575877	296
1,024	0,049741824	1488	1,054	0,116905464	359
1,025	0,051890625	1550	1,055	0,119241375	422
1,026	0,054045576	1611	1,056	0,121583616	486
1,027	0,056206683	1673	1,057	0,123932193	549
1,028	0,058373952	1734	1,058	0,126287112	613
1,029	0,060547389	1796	1,059	0,128648379	676
1,030	0,062727	1858	1,060	0,131016	740
1,031	0,064912791	1920	1,061	0,133389981	803
1,032	0,067104768	1982	1,062	0,135770328	867
1,033	0,069302937	2044	1,063	0,138157047	931
1,034	0,071507304	2106	1,064	0,140550144	995
1,035	0,073717875	2168	1,065	0,142949625	059
1,036	0,075934656	2230	1,066	0,145355496	123
1,037	0,078157653	2292	1,067	0,147767763	187
1,038	0,080386872	2354	1,068	0,150186432	251
1,039	0,082622319	2417	1,069	0,152611509	315
1,040	0,084864	2479	1,070	0,155043	379
1,041	0,087111921	2542	1,071	0,157480911	443
1,042	0,089366088	2604	1,072	0,159925248	508
1,043	0,091626507	2667	1,073	0,162376017	572
1,044	0,093893184	2729	1,074	0,164833224	637
1,045	0,096166125	2792	1,075	0,167296875	701
1,046	0,098445336	2855	1,076	0,169766976	766
1,047	0,100730823	2918	1,077	0,172243533	830
1,048	0,103022592	2981	1,078	0,174726552	895
1,049	0,105320649	3044	1,079	0,177216039	960
1,050	0,107625		1,080	0,179712	
P	R	$D = 0{,}002$	P	R	$D = 0{,}0024$

Tabelle IV.

P	R	$D = 0,0025$	P	R	$D = 0,0027$
1,080	0,179712	024	1,110	0,257631	000
1,081	0,182214441	089	1,111	0,260330631	063
1,082	0,184723368	154	1,112	0,263036928	130
1,083	0,187238787	219	1,113	0,265749897	196
1,084	0,189760704	284	1,114	0,268469544	263
1,085	0,192289125	349	1,115	0,271195875	330
1,086	0,194824056	414	1,116	0,273928896	397
1,087	0,197365503	480	1,117	0,276668613	464
1,088	0,199913472	545	1,118	0,279415032	531
1,089	0,202467969	610	1,119	0,282168159	598
1,090	0,205029	676	1,120	0,284928	67
1,091	0,207596571	741	1,121	0,287694561	73
1,092	0,210170688	807	1,122	0,290467848	80
1,093	0,212751357	872	1,123	0,293247867	87
1,094	0,215338584	938	1,124	0,296034624	94
1,095	0,217932375	004	1,125	0,298828125	00
1,096	0,220532736	079	1,126	0,301628376	07
1,097	0,223139673	135	1,127	0,304435383	14
1,098	0,225753192	201	1,128	0,307249152	21
1,099	0,228373299	267	1,129	0,310069689	27
1,100	0,231	333	1,130	0,312897	34
1,101	0,233633301	399	1,131	0,315731091	41
1,102	0,236273208	465	1,132	0,318571968	48
1,103	0,238919727	531	1,133	0,321419637	54
1,104	0,241572864	598	1,134	0,324274104	61
1,105	0,244232625	664	1,135	0,327135375	68
1,106	0,246899016	730	1,136	0,330003456	75
1,107	0,249572043	797	1,137	0,332878353	82
1,108	0,252251712	863	1,138	0,335760072	89
1,109	0,254938029	930	1,139	0,338648619	95
1,110	0,257631		1,140	0,341544	
P	R	$D = 0,0026$	P	R	$D = 0,0028$

Tabelle IV.

P	R	D = 0,002	P	R	D = 0,003
1,140	0,341544	902	1,170	0,431613	110
1,141	0,344446221	909	1,171	0,434723211	117
1,142	0,347355288	916	1,172	0,437840448	124
1,143	0,350271207	923	1,173	0,440964717	131
1,144	0,353193984	930	1,174	0,444096024	138
1,145	0,356123625	937	1,175	0,447234375	145
1,146	0,359060136	943	1,176	0,450379776	152
1,147	0,362003523	950	1,177	0,453532233	160
1,148	0,364953792	957	1,178	0,456691752	167
1,149	0,367910949	964	1,179	0,459858339	174
1,150	0,370875	971	1,180	0,463032	181
1,151	0,373845951	978	1,181	0,466212741	188
1,152	0,376823808	985	1,182	0,469400568	195
1,153	0,379808577	992	1,183	0,472595487	202
1,154	0,382800264	999	1,184	0,475797504	209
1,155	0,385798875	006	1,185	0,479006625	219
1,156	0,388804416	012	1,186	0,482222856	223
1,157	0,391816893	019	1,187	0,485446203	230
1,158	0,394836312	026	1,188	0,488676672	238
1,159	0,397862679	033	1,189	0,491914269	245
1,160	0,400896	040	1,190	0,495159	252
1,161	0,403936281	047	1,191	0,498410871	259
1,162	0,406983528	054	1,192	0,501669888	266
1,163	0,410037747	061	1,193	0,504936057	273
1,164	0,413098944	068	1,194	0,508209384	280
1,165	0,416167125	075	1,195	0,511489875	288
1,166	0,419242296	082	1,196	0,514777536	295
1,167	0,422324463	089	1,197	0,518072373	302
1,168	0,425413632	096	1,198	0,521374392	309
1,169	0,428509809	103	1,199	0,524683599	316
1,170	0,431613		1,200	0,528	
P	R	D = 0,003	P	R	D = 0,003

Tabelle IV.

P	R	D = 0,0	P	R	D = 0,0
1,20	0,528		1,50	1,875	
		3356			5795
1,21	0,561561		1,51	1,932951	
		3429			5886
1,22	0,595848		1,52	1,991808	
		3502			5977
1,23	0,630867		1,53	2,051577	
		3576			6069
1,24	0,666624		1,54	2,112264	
		3650			6161
1,25	0,703125		1,55	2,173875	
		3725			6254
1,26	0,740376		1,56	2,236416	
		3801			6348
1,27	0,778383		1,57	2,299893	
		3877			6442
1,28	0,817152		1,58	2,364312	
		3954			6537
1,29	0,856689		1,59	2,429679	
		4031			6632
1,30	0,897		1,60	2,496	
		4109			6728
1,31	0,938091		1,61	2,563281	
		4188			6825
1,32	0,979968		1,62	2,631528	
		4267			6922
1,33	1,022637		1,63	2,700747	
		4347			7020
1,34	1,066104		1,64	2,770944	
		4427			7118
1,35	1,110375		1,65	2,842125	
		4508			7217
1,36	1,155456		1,66	2,914296	
		4590			7317
1,37	1,201353		1,67	2,987463	
		4672			7417
1,38	1,248072		1,68	3,061632	
		4755			7518
1,39	1,295619		1,69	3,136809	
		4838			7619
1,40	1,344		1,70	3,213	
		4922			7721
1,41	1,393221		1,71	3,290211	
		5007			7824
1,42	1,443288		1,72	3,368448	
		5092			7927
1,43	1,494207		1,73	3,447717	
		5178			8031
1,44	1,545984		1,74	3,528024	
		5264			8135
1,45	1,598625		1,75	3,609375	
		5351			8240
1,46	1,652136		1,76	3,691776	
		5439			8346
1,47	1,706523		1,77	3,775233	
		5527			8452
1,48	1,761792		1,78	3,859752	
		5616			8559
1,49	1,817949		1,79	3,945339	
		5705			8666
1,50	1,875		1,80	4,032	
P	R	D = 0,0	P	R	D = 0,0

Tabelle IV.

P	R	D = 0,0	P	R	D = 0,1
1,80	4,032	8774	2,10	7,161	229
1,81	4,119741	8883	2,11	7,283931	242
1,82	4,208568	8992	2,12	7,408128	255
1,83	4,298487	9102	2,13	7,533597	267
1,84	4,389504	9212	2,14	7,660344	280
1,85	4,481625	9323	2,15	7,788375	293
1,86	4,574856	9435	2,16	7,817696	306
1,87	4,669203	9547	2,17	8,048313	319
1,88	4,764672	9660	2,18	8,180232	332
1,89	4,861269	9773	2,19	8,313459	345
1,90	4,959	9887	2,20	8,448	359
1,91	5,057871	000	2,21	8,583861	372
1,92	5,157888	012	2,22	8,721048	385
1,93	5,259057	023	2,23	8,859567	399
1,94	5,361384	035	2,24	8,999424	412
1,95	5,464875	047	2,25	9,140625	426
1,96	5,569536	058	2,26	9,283176	439
1,97	5,675373	070	2,27	9,427083	453
1,98	5,782392	082	2,28	9,572352	466
1,99	5,890599	094	2,29	9,718989	480
2,00	6.	106	2,30	9,867	494
2,01	6,110601	118	2,31	10,016391	508
2,02	6,222408	130	2,32	10,167168	522
2,03	6,335427	142	2,33	10,319337	536
2,04	6,449664	155	2,34	10,472904	550
2,05	6,565125	167	2,35	10,627875	564
2,06	6,681816	179	2,36	10,784256	578
2,07	6,799743	192	2,37	10,942053	592
2,08	6,918912	204	2,38	11,101272	606
2,09	7,039329	217	2,39	11,261919	621
2,10	7,161		2,40	11,424	
P	R	D = 0,1	P	R	D = 0,1

Tabelle IV.

P	R	$D=0,1$	P	R	$D=0,2$
2,40	11,424	635	2,70	16,983	0951
2,41	11,587521	650	2,71	17,192511	1114
2,42	11,752488	664	2,72	17,403648	1277
2,43	11,918907	679	2,73	17,616417	1441
2,44	12,086784	693	2,74	17,830824	1605
2,45	12,256125	708	2,75	18,046875	1770
2,46	12,426936	723	2,76	18,264576	1936
2,47	12,599223	737	2,77	18,483933	2102
2,48	12,772992	753	2,78	18,704952	2269
2,49	12,948249	767	2,79	18,927639	2436
2,50	13,125	782	2,80	19,152	2604
2,51	13,303251	798	2,81	19,378041	2773
2,52	13,483008	813	2,82	19,605768	2942
2,53	13,664277	828	2,83	19,835187	3112
2,54	13,847064	843	2,84	20,066304	3282
2,55	14,031375	858	2,85	20,299125	3453
2,56	14,217216	874	2,86	20,533656	3624
2,57	14,404593	889	2,87	20,769903	3797
2,58	14,593512	905	2,88	21,007872	3970
2,59	14,783979	920	2,89	21,247569	4143
2,60	14,976	9358	2,90	21,489	4317
2,61	15,169581	9515	2,91	21,732171	4492
2,62	15,364728	9672	2,92	21,977088	4667
2,63	15,561447	9830	2,93	22,223757	4843
2,64	15,759744	9988	2,94	22,472184	5019
2,65	15,959625	0147	2,95	22,722375	5196
2,66	16,161096	0307	2,96	22,974336	5374
2,67	16,364163	0467	2,97	23,228073	5552
2,68	16,568832	0628	2,98	23,483592	5731
2,69	16,775109	0789	2,99	23,740899	5910
2,70	16,983		3,00	24.	
P	R	$D=0,2$	P	R	$D=0,2$

Tabelle IV.

P	*R*	*D* = 0,2	*P*	*R*	*D* = 0,3
3,00	24.	6090	3,30	32,673	1769
3,01	24,260901	6271	3,31	32,954691	1968
3,02	24,523608	6452	3,32	33,274368	2167
3,03	24,788127	6634	3,33	33,596037	2368
3,04	25,054464	6816	3,34	33,919704	2567
3,05	25,322625	6999	3,35	34,245375	2768
3,06	25,592616	7183	3,36	34,573056	2970
3,07	25,864443	7367	3,37	34,902753	3172
3,08	26,138112	7552	3,38	35,234472	3375
3,09	26,413629	7737	3,39	35,568219	3578
3,10	26,691	7923	3,40	35,904	3782
3,11	26,970231	8110	3,41	36,241821	3987
3,12	27,251328	8297	3,42	36,581688	4192
3,13	27,534297	8485	3,43	36,923607	4398
3,14	27,819144	8673	3,44	37,267584	4604
3,15	28,105875	8862	3,45	37,613625	4811
3,16	28,394496	9062	3,46	37,961736	5019
3,17	28,685013	9242	3,47	38,311923	5227
3,18	28,977432	9433	3,48	38,664192	5436
3,19	29,271759	9624	3,49	39,018549	5645
3,20	29,568	9816	3,50	39,375	5855
3,21	29,866161	0009	3,51	39,733551	6066
3,22	30,166248	0202	3,52	40,094208	6277
3,23	30,468267	0396	3,53	40,456977	6489
3,24	30,772224	0590	3,54	40,821864	6701
3,25	31,078125	0785	3,55	41,188875	6914
3,26	31,385976	0981	3,56	41,558016	7128
3,27	31,695783	1177	3,57	41,929293	7342
3,28	32,007552	1374	3,58	42,302712	7557
3,29	32,321289	1571	3,59	42,678279	7772
3,30	32,637		3,60	43,056	
P	*R*	*D* = 0,3	*P*	*R*	*D* = 0,3

Tabelle IV.

R	D = 0,3	P	R	D = 0,4
43,056	7988	3,90	55,419	4747
43,435881	8205	3,91	55,866471	4982
43,817928	8422	3,92	56,316288	5217
44,202147	8640	3,93	56,768457	5453
44,588544	8858	3,94	57,222984	5689
44,977125	9077	3,95	57,679875	5926
45,367896	9297	3,96	58,139136	6164
45,760863	9517	3,97	58,600773	6402
46,156032	9738	3,98	59,064792	6641
46,553409	9959	3,99	59,531199	6880
46,953	0181	4,00	60.	7120
47,354811	0404	4,01	60,471201	7361
47,758848	0627	4,02	60,944808	7602
48,165117	0851	4,03	61,420827	7844
48,573624	1075	4,04	61,899264	8086
48,984375	1300	4,05	62,380125	8329
49,397376	1526	4,06	62,863416	8573
49,812633	1752	4,07	63,349143	8817
50,230152	1979	4,08	63,837312	9062
50,649939	2206	4,09	64,327929	9307
51,072	2434	4,10	64,821	9553
51,496341	2663	4,11	65,316531	9800
51,922968	2892	4,12	65,814528	0047
52,351887	3122	4,13	66,314997	0295
52,783104	3352	4,14	66,817944	0543
53,216625	3583	4,15	67,323375	0792
53,652456	3815	4,16	67,831296	1042
54,090603	4047	4,17	68,341713	1292
54,531072	4280	4,18	68,854632	1543
54,973869	4513	4,19	69,370059	1794
55,419		4,20	69,888	
R	D = 0,4	P	R	D = 0,5

Tabelle IV.

P	R	D = 0,5	P	R	D = 0,5
4,20	69,888	2046	4,50	86,625	9885
4,21	70,408461	2299	4,51	87,223851	0156
4,22	70,931448	2552	4,52	87,825408	0427
4,23	71,456967	2806	4,53	88,429677	0699
4,24	71,985024	3060	4,54	89,036664	0971
4,25	72,515625	3315	4,55	89,646375	1244
4,26	73,048776	3571	4,56	90,258816	1518
4,27	73,584483	3827	4,57	90,873993	1792
4,28	74,122752	4084	4,58	91,491912	2067
4,29	74,663589	4341	4,59	92,112579	2342
4,30	75,207	4599	4,60	92,736	2618
4,31	75,752991	4858	4,61	93,362181	2895
4,32	76,301568	5117	4,62	93,991128	3172
4,33	76,852737	5377	4,63	94,622847	3450
4,34	77,406504	5637	4,64	95,257344	3728
4,35	77,962875	5898	4,65	95,894625	4007
4,36	78,521856	6160	4,66	96,534696	4287
4,37	79,083453	6422	4,67	97,177563	4567
4,38	79,647672	6685	4,68	97,823232	4848
4,39	80,214519	6948	4,69	98,471709	5129
4,40	80,784	7212	4,70	99,123	5411
4,41	81,356121	7477	4,71	99,777111	5694
4,42	81,930888	7742	4,72	100,434048	5977
4,43	82,508307	8008	4,73	101,093817	6261
4,44	83,088384	8274	4,74	101,756424	6545
4,45	83,671125	8541	4,75	102,421875	6830
4,46	84,256536	8809	4,76	103,090176	7116
4,47	84,844623	9077	4,77	103,761333	7402
4,48	85,435392	9346	4,78	104,435352	7689
4,49	86,028849	9615	4,79	105,112239	7976
4,50	86,625		4,80	105,792	
P	R	D = 0,5	P	R	D = 0,6

Tabelle IV.

P	R	D = 0,6	P	R	D = 0,7
4,80	105,792	8264	5,10	127,551	7183
4,81	106,474641	8553	5,11	128,322831	7490
4,82	107,160168	8842	5,12	129,097728	7797
4,83	107,848587	9132	5,13	129,875697	8105
4,84	108,539904	9422	5,14	130,656744	8413
4,85	109,234125	9713	5,15	131,440875	8722
4,86	109,931256	0005	5,16	132,228096	9032
4,87	110,631303	0297	5,17	133,018413	9342
4,88	111,334272	0590	5,18	133,811832	9653
4,89	112,040169	0883	5,19	134,608359	9964
4,90	112,749	1177	5,20	135,408	0276
4,91	113,460771	1472	5,21	136,210761	0589
4,92	114,175488	1767	5,22	137,016648	0902
4,93	114,893157	2063	5,23	137,825667	1216
4,94	115,613784	2359	5,24	138,637824	1530
4,95	116,337375	2656	5,25	139,453125	1845
4,96	117,063936	2954	5,26	140,271576	2161
4,97	117,793473	3252	5,27	141,093183	2477
4,98	118,525992	3551	5,28	141,917952	2794
4,99	119,261499	3850	5,29	142,745889	3111
5,00	120.	4150	5,30	143,577	3429
5,01	120,741501	4451	5,31	144,411291	3748
5,02	121,486008	4752	5,32	145,248768	4067
5,03	122,233527	5054	5,33	146,089437	4387
5,04	122,984064	5357	5,34	146,933304	4707
5,05	123,737625	5659	5,35	147,780375	5028
5,06	124,494216	5963	5,36	148,630656	5350
5,07	125,253843	6267	5,37	149,484153	5672
5,08	126,016512	6572	5,38	150,340872	5995
5,09	126,782229	6877	5,39	151,200819	6318
5,10	127,551		5,40	152,064	
P	R	D = 0,7	P	R	D = [illegible]

Tabelle IV.

P	*R*	*D* = 0,8	*P*	*R*	*D* = 0,9
5,40	152,064	6642	5,70	179,493	6641
5,41	152,930421	6967	5,71	180,459411	6984
5,42	153,800088	7292	5,72	181,429248	7327
5,43	154,673007	7618	5,73	182,402517	7671
5,44	155,549184	7944	5,74	183,379224	8015
5,45	156,428625	8271	5,75	184,359375	8360
5,46	157,311336	8599	5,76	185,342976	8706
5,47	158,197323	8927	5,77	186,330033	9052
5,48	159,086592	9256	5,78	187,320552	9399
5,49	159,979149	9585	5,79	188,314539	9746
5,50	160,875	9915	5,80	189,312	009
5,51	161,774151	0246	5,81	190,312941	044
5,52	162,676608	0577	5,82	191,317368	079
5,53	163,582377	0909	5,83	192,325287	114
5,54	164,491464	1221	5,84	193,336704	149
5,55	165,403875	1574	5,85	194,351625	184
5,56	166,319616	1908	5,86	195,370056	219
5,57	167,238693	2242	5,87	196,392003	255
5,58	168,161112	2577	5,88	197,417472	290
5,59	169,086879	2912	5,89	198,446469	325
5,60	170,016	3248	5,90	199,479	361
5,61	170,948481	3585	5,91	200,515071	396
5,62	171,884328	3922	5,92	201,554688	432
5,63	172,823547	4260	5,93	202,597857	467
5,64	173,766144	4598	5,94	203,644584	503
5,65	174,712125	4937	5,95	204,694875	539
5,66	175,661496	5277	5,96	205,748736	574
5,67	176,614263	5617	5,97	206,806173	610
5,68	177,570432	5958	5,98	207,867192	646
5,69	178,530009	6299	5,99	208,931799	682
5,70	179,493		6,00	210.	
P	*R*	*D* = 0,9	*P*	*R*	*D* = 1,0

Tabelle IV.

P	R	D=1,0	P	R	D=1,1
6,00	210.	718	6,30	243,747	826
6,01	211,071801	754	6,31	244,929591	864
6,02	212,147208	790	6,32	246,115968	902
6,03	213,226227	826	6,33	247,306137	940
6,04	214,308864	863	6,34	248,500104	978
6,05	215,395125	899	6,35	249,697875	016
6,06	216,485016	935	6,36	250,899456	054
6,07	217,578543	972	6,37	252,104853	092
6,08	218,675712	008	6,38	253,314072	130
6,09	219,776529	045	6,39	254,527119	169
6,10	220,881	081	6,40	255,744	207
6,11	221,989131	118	6,41	256,964721	246
6,12	223,100928	155	6,42	258,189288	284
6,13	224,216397	191	6,43	259,417707	323
6,14	225,335544	228	6,44	260,649984	361
6,15	226,458375	265	6,45	261,886125	400
6,16	227,584896	302	6,46	263,126136	439
6,17	228,715113	339	6,47	264,370023	478
6,18	229,849032	376	6,48	265,617792	517
6,19	230,986659	413	6,49	266,869449	556
6,20	232,128	451	6,50	268,125	595
6,21	233,273061	488	6,51	269,384451	634
6,22	234,421848	525	6,52	270,647808	673
6,23	235,574367	563	6,53	271,915077	712
6,24	236,730624	600	6,54	273,186264	751
6,25	237,890625	638	6,55	274,461375	790
6,26	239,054376	675	6,56	275,740416	830
6,27	240,221883	713	6,57	277,023393	869
6,28	241,393152	750	6,58	278,310312	[illegible]
6,29	242,568189	788	6,59	279,601179	[illegible]
6,30	243,747		6,60	280,896	
P	R	D=1,1	P	R	[illegible]

Tabelle IV.

P	R	D = 1,8	P	R	D = 1,
7,80	466,752	175	8,10	523,341	9607
7,81	468,569541	222	8,11	525,301731	9656
7,82	470,391768	269	8,12	527,267328	9705
7,83	472,218687	316	8,13	529,237797	9753
7,84	474,050304	363	8,14	531,213144	9802
7,85	475,886625	410	8,15	533,193375	9851
7,86	477,727656	457	8,16	535,178496	9900
7,87	479,573403	505	8,17	537,168513	9949
7,88	481,423872	552	8,18	539,163432	9998
7,89	483,279069	599	8,19	541,163259	0047
7,90	485,139	647	8,20	543,168	0097
7,91	487,003671	694	8,21	545,177661	0146
7,92	488,873088	742	8,22	547,192248	0195
7,93	490,747257	789	8,23	549,211767	0245
7,94	492,626184	837	8,24	551,236224	0294
7,95	494,509875	885	8,25	553,265625	0344
7,96	496,398336	932	8,26	555,299976	0393
7,97	498,291573	980	8,27	557,339283	0443
7,98	500,189592	028	8,28	559,383552	0492
7,99	502,092399	076	8,29	561,432789	0542
8,00	504.	124	8,30	563,487	0592
8,01	505,912401	172	8,31	565,546191	0642
8,02	507,829608	220	8,32	567,610368	0692
8,03	509,751627	268	8,33	569,679537	0742
8,04	511,678464	317	8,34	571,753704	0792
8,05	513,610125	365	8,35	573,832875	0842
8,06	515,546616	413	8,36	575,917056	0892
8,07	517,487943	462	8,37	578,006253	0942
8,08	519,434112	510	8,38	580,100472	0992
8,09	521,385129	559	8,39	582,199719	1043
8,10	523,341		8,40	584,304	
P	R	D = 1,9	P	R	D = 2,

Tabelle IV.

P	R	$D=2,1$	P	R	$D=2,$
8,40	584,304	093	8,70	649,803	2633
8,41	586,413321	144	8,71	652,066311	2685
8,42	588,527688	194	8,72	654,334848	2738
8,43	590,647107	245	8,73	656,608617	2790
8,44	592,771584	295	8,74	658,887624	2843
8,45	594,901125	346	8,75	661,171875	2895
8,46	597,035736	397	8,76	663,461376	2948
8,47	599,175423	448	8,77	665,756133	3000
8,48	601,320192	499	8,78	668,056152	3053
8,49	603,470049	550	8,79	670,361439	3106
8,50	605,625	601	8,80	672,672	3158
8,51	607,785051	652	8,81	674,987841	3211
8,52	609,950208	703	8,82	677,308968	3264
8,53	612,120477	754	8,83	679,635387	3317
8,54	614,295864	805	8,84	681,967104	3370
8,55	616,476375	856	8,85	684,304125	3428
8,56	618,662016	908	8,86	686,646456	3476
8,57	620,852793	959	8,87	688,994103	3530
8,58	623,048712	011	8,88	691,347072	3583
8,59	625,249779	062	8,89	693,705369	3636
8,60	627,456	114	8,90	696,069	3690
8,61	629,667381	165	8,91	698,437971	3743
8,62	631,883928	217	8,92	700,812288	3797
8,63	634,105647	269	8,93	703,191957	3850
8,64	636,332544	321	8,94	705,576984	3904
8,65	638,564625	373	8,95	707,967375	3958
8,66	640,801896	425	8,96	710,363136	4011
8,67	643,044363	477	8,97	712,764273	4065
8,68	645,292032	529	8,98	715,170792	4119
8,69	647,544909	581	8,99	717,582699	4173
8,70	649,803		9,00	720.	
P	R	$D=2,2$	P	R	$D=2,$

Tabelle IV.

P	R	D	P	R	D
12,0	1716	43,461	15,0	3360.	67,851
12,1	1759,461	44,187	15,1	3427,851	68,757
12,2	1803,648	44,919	15,2	3496,608	69,669
12,3	1848,567	45,657	15,3	3566,277	70,587
12,4	1894,224	46,401	15,4	3636,864	71,511
12,5	1940,625	47,151	15,5	3708,375	72,441
12,6	1987,776	47,907	15,6	3780,816	73,377
12,7	2035,683	48,669	15,7	3854,193	74,319
12,8	2084,352	49,437	15,8	3928,512	75,267
12,9	2133,789	50,211	15,9	4003,779	76,221
13,0	2184.	50,991	16,0	4080.	77,181
13,1	2234,991	51,777	16,1	4157,181	78,147
13,2	2286,768	52,569	16,2	4235,328	79,119
13,3	2339,337	53,367	16,3	4314,447	80,097
13,4	2392,704	54,171	16,4	4394,544	81,081
13,5	2446,875	54,981	16,5	4475,625	82,071
13,6	2501,856	55,797	16,6	4557,696	83,067
13,7	2557,653	56,619	16,7	4640,763	84,069
13,8	2614,272	57,447	16,8	4724,832	85,077
13,9	2671,719	58,281	16,9	4809,909	86,091
14,0	2730.	59,121	17,0	4896.	87,111
14,1	2789,121	59,967	17,1	4983,111	88,137
14,2	2849,088	60,819	17,2	5071,248	89,169
14,3	2909,907	61,677	17,3	5160,417	90,207
14,4	2971,584	62,541	17,4	5250,624	91,251
14,5	3034,125	63,411	17,5	5341,875	92,301
14,6	3097,536	64,287	17,6	5434,176	93,357
14,7	3161,823	65,179	17,7	5527,533	94,419
14,8	3226,992	66,057	17,8	5621,952	95,487
14,9	3293,049	66,951	17,9	5717,439	96,561
15,0	3360.		18,0	5814.	
P	R	D	P	R	D

Tabelle IV.

P	*R*	*D*	*P*	*R*	*D*
18,0	5814.	97,641	21,0	9240.	132,83
18,1	5911,641	98,727	21,1	9372,831	134,10
18,2	6010,368	99,819	21,2	9506,928	135,37
18,3	6110,187	100,92	21,3	9642,297	136,65
18,4	6211,104	102,02	21,4	9778,944	137,93
18,5	6313,125	103,13	21,5	9916,875	139,22
18,6	6416,256	104,25	21,6	10056,096	140,52
18,7	6520,503	105,37	21,7	10196,613	141,82
18,8	6625,872	106,50	21,8	10338,432	143,13
18,9	6732,369	107,63	21,9	10481,559	144,44
19,0	6840.	108,77	22,0	10626.	145,76
19,1	6948,771	109,92	22,1	10771,761	147,09
19,2	7058,688	111,07	22,2	10918,848	148,42
19,3	7169,757	112,23	22,3	11067,267	149,76
19,4	7281,984	113,39	22,4	11217,024	151,10
19,5	7395,375	114,56	22,5	11368,125	152,45
19,6	7509,936	115,74	22,6	11520,576	153,81
19,7	7625,673	116,92	22,7	11674,383	155,17
19,8	7742,592	118,11	22,8	11829,552	156,54
19,9	7860,699	119,30	22,9	11986,089	157,91
20,0	7980.	120,50	23,0	12144.	159,19
20,1	8100,501	121,71	23,1	12303,191	160,78
20,2	8222,208	122,92	23,2	12463,968	162,07
20,3	8345,127	124,14	23,3	12626,037	163,47
20,4	8469,264	125,36	23,4	12789,504	164,87
20,5	8594,625	126,59	23,5	12954,375	166,28
20,6	8721,216	127,83	23,6	13120,656	167,50
20,7	8849,043	129,07	23,7	13288,353	169,12
20,8	8978,112	130,32	23,8	13457,472	170,55
20,9	9108,429	131,57	23,9	13628,019	171,98
21,0	9240.		24,0	13800.	
P	*R*	*D*	*P*	*R*	*D*

Anhang zu Tabelle IV.

Q	P	C	Q	P	C	Q	P	C	P	C
	0,000	—		0,005	—		0,018	—	0,028	—
1.		0,00000010	1. 9.		0,000001	1. 9.		0,000004		0,000007
2.		00000019	2. 8.		000002	2. 8.		000008		000013
3.		00000027	3. 7.		000003	3. 7.		000012		000017
4.		00000033	4. 5. 6.		000004	4. 6.		000013		000020
5.		00000037		0,006	—	5.		000014		000021
6.		00000038	1. 9.		0,000001		0,019	—	0,029	—
7.		00000037	2. 8.		000003	1. 9.		0,000005		0,000007
8.		00000028	3. 7.		000004	2. 8.		000009		000014
9.		00000017	4. 5. 6.		000004	3. 7.		000012		000018
	0,001	—		0,007	—	4. 6.		000014		000021
1.		0,0000003	1. 9.		0,000002	5.		000015		000022
2.		0000006	2. 8.		000003		0,020	—	0,030	—
3.		0000009	3. 7.		000004	1. 9.		0,000005		0,000008
4.		0000010	4. 5. 6.		000005	2. 8.		000010		000014
5.		0000011		0,008	—	3. 7.		000012		000019
6.		0000010	1. 9.		0,000002	4. 6.		000014		000021
7.		0000009	2. 8.		000004	5.		000015		000022
8.		0000007	3. 7.		000005		0,021	—	0,031	—
9.		0000004	4. 5. 6.		000006	1. 9.		0,000005		0,000008
	0,002	—		0,010	—	2. 8.		000010		000015
1.		0,0000006	1. 9.		0,000002	3, 7.		000013		000019
2.		0000011	2. 8.		000004	4. 6.		000015		000022
3.		0000015	3. 7.		000006	5.		000016		000023
4.		0000017	4. 5 .6.		000007		0,022	—	0,032	—
5.		0000018		0,011	—	1. 9.		0,000006		0,000008
6.		0000017	1. 9.		0,000003	2. 8.		000010		000015
7.		0000015	2. 8.		000005	3. 7.		000014		000020
8.		0000012	3. 7.		000007	4. 6.		000016		000023
9.		0000007	4. 5. 6.		000008	5.		000017		000024
	0,003	—		0,013	—		0,024	—	0,033	—
1.		0,0000009	1. 9.		0,000003	1. 9.		0,000006		0,000008
2.		0000016	2. 8.		000006	2. 8.		000011		000016
3.		0000021	3. 7.		000008	3. 7.		000015		000021
4.		0000024	4. 5. 6.		000009	4. 6.		000017		000024
5.		0000026		0,014	—	5.		000018		000025
6.		0000025	1. 9.		0,000003		0,025	—	0,034	—
7.		0000022	2. 8.		000006	1. 9.		0,000006		0,000009
8.		0000017	3. 7.		000008	2. 8.		000012		000016
9.		0000009	4. 5. 6.		000010	3. 7.		000016		000021
	0,004	—		0,015	—	4. 6.		000018		000024
1.		0,0000011	1. 9.		0,000004	5.		000019		000025
2.		0000020	2. 8.		000007		0,026	—	0,035	—
3.		0000027	3. 7.		000008	1. 9.		0,000007		0,000009
4.		0000032	4. 5. 6.		000011	2. 8.		000012		000017
5.		0000033		0,017	—	3. 7.		000016		000022
6.		0000032	1. 9.		0,000004	4. 6.		000019		000025
7.		0000028	2. 8.		000008	5.		000020		000026
8.		0000021	3. 7.		000010		0,028		0,036	
9.		0000012	4. 5. 6.		000012					
	0,005			0,018						

Anhang zu Tabelle IV.

Q	P	C	P	C	P	C	P	C	Q
	0,036	—	0,095	—	0,370	—	0,470	—	
1. 9.		0,00001		0,00002		0,0001		0,0003	1. 9.
2. 8.		00001		00004		0003		0007	2. 8.
3. 7.		00002		00006		0003		0009	3. 7.
4.5.6.		00002		00007		0004		0009	4.5.6.
	0,041	—	0,100	—	0,380	—	0,480	—	
1. 9.		0,00001		0,0000		0,0001		0,0004	1. 9.
2. 8.		00002		0000		0003		0007	2. 8.
3. 7.		00002		0000		0004		0009	3. 7.
4.5.6.		00003		0000		0004		0011	4.5.6.
	0,047	—	0,130	—	0,390	—	0,490	—	
1. 9.		0,00001		0,0000		0,0001		0,0004	1. 9.
2. 8.		00002		0000		0003		0008	2. 8.
3. 7.		00003		0000		0004		0011	3. 7.
4.5.6.		0000 4		0001		0005		0012	4.5.6.
	0,062	—	0,148	—	0,400	—	0,500	—	
1. 9.		0,00001		0,0000		0,0002		0,000	1. 9.
2. 8.		00003		0000		0003		000	2. 8.
3. 7.		00004		0001		0004		001	3. 7.
4.5.6.		00004		0001		0005		001	4.5.6.
	0,068	—	0,187	—	0,410	—	0,510	—	
1. 9.		0,00001		0,0000		0,0002		0,000	1. 9.
2. 8.		00003		0001		0004		001	2. 8.
3. 7.		00004		0001		0005		001	3. 7.
4.5.6.		00005		0001		0005		001	4.5.6.
	0,074	—	0,260	—	0,420	—	0,520	—	
1. 9.		0,00002		0,0000		0,0002		0,000	1. 9.
2. 8.		00003		0001		0004		001	2. 8.
3. 7.		00004		0002		0005		002	3. 7.
4.5.6.		00005		0002		0006		002	4.5.6.
	0,078	—	0,282	—	0,430	—	0,530	—	
1. 9.		0,00002		0,0001		0,0002		0,000	1. 9.
2. 8.		00003		0001		0004		001	2. 8.
3. 7.		00005		0002		0006		002	3. 7.
4.5.6.		00005		0002		0006		003	4.5.6.
	0,081	—	0,300	—	0,440	—	0,540	—	
1. 9.		0,00002		0,0001		0,0002		0,001	1. 9.
2. 8.		00004		0002		0004		002	2. 8.
3. 7.		00005		0002		0006		003	3. 7.
4.5.6.		00005		0003		0007		003	4.5.6.
	0,082	—	0,320	—	0,450	—	0,550	—	
1. 9.		0,00002		0,0001		0,0003		0,001	1. 9.
2. 8.		00004		0002		0005		003	2. 8.
3. 7.		00005		0003		0007		003	3. 7.
4.5.6.		00006		0003		0008		004	4.5.6.
	0,094	—	0,350	—	0,460	—	0,555	—	
1. 9.		0,00002		0,0001		0,0003		0,002	1. 9.
2. 8.		00004		0002		0006		003	2. 8.
3. 7.		00006		0003		0008		004	3. 7.
4.5.6.		00006		0004		0009		005	4.5.6.
	0,095		0,370		0,470		0,560		

Anhang zu Tabelle IV.

Q	P	C	P	C	P	C	Q	P	C	P	C
	0,560	—	0,573	—	0,582	+		0,594	+	0,670	+
1. 9.		0,002		0,011		0,009	1. 9.		0,004		0,0006
2. 8.		004		020		016	2. 8.		005		0010
3. 7.		006		027		021	3. 7.		007		0013
4. 6.		007		031		024	4. 5. 6.		008		0014
5.		007		032		025		0,597	+	0,680	+
	0,565	—	0,574	—	0,583	+	1. 9.		0,003		0,0005
1. 9.		0,003		0,015		0,008	2. 8.		005		0009
2. 8.		006		028		013	3. 7.		006		0012
3. 7.		009		036		017	4. 5. 6.		007		0013
4. 6.		010		044		020		0,600	+	0,690	+
5.		010		046		021	1. 9.		0,002		0,0005
	0,566	—	0,575	—	0,584	+	2. 8.		004		0009
1. 9.		0,004		0,024		0,007	3. 7.		005		0011
2. 8.		008		043		012	4. 5. 6.		006		0012
3. 7.		010		056		015		0,605	+	0,700	+
4. 6.		011		064		017	1. 9.		0,002		0,0004
5.		012		067		018	2. 8.		004		0008
	0,568	—	0,576	—	0,585	+	3. 7.		005		0010
1. 9.		0,005		0,052		0,006	4. 5. 6.		005		0011
2. 8.		009		094		010		0,610	+	0,720	+
3. 7.		011		123		014	1. 9.		0,002		0,0004
4. 6.		013		141		015	2. 8.		003		0007
5.		014	0,577	147		015	3. 7.		004		0009
	0,569	—	0,578	+	0,586	+	4. 5. 6.		004		0010
1. 9.		0,006		0,040		0,005		0,620	+	0,740	+
2. 8.		010		070		009	1. 9.		0,002		0,0003
3. 7.		014		092		012	2. 8.		002		0006
4. 6.		015		105		013	3. 7.		003		0008
5.		016		109		013	4. 5. 6.		004		0009
	0,570	—	0,579	+	0,587	+		0,630	+	0,760	+
1. 9.		0,006		0,021		0,005	1. 9.		0,002		0,0003
2. 8.		012		038		008	2. 8.		002		0006
3. 7.		015		048		010	3. 7.		003		0007
4. 6.		017		056		011	4. 5. 6.		003		0008
5.		018		058		011		0,640	+	0,780	+
	0,571	—	0,580	+	0,589	+	1. 9.		0,001		0,0003
1. 9.		0,007		0,015		0,004	2. 8.		002		0005
2. 8.		013		026		007	3. 7.		002		0006
3. 7.		017		034		009	4. 5. 6.		002		0007
4. 6.		020		039		010		0,650	+	0,800	+
5.		021		010		010	1. 9.		0,000		0,0003
	0,572	—	0,581	+	0,592	+	2. 8		001		0005
1. 9.		0,009		0,011		0,004	3. 7.		001		0006
2. 8.		016		020		006	4. 5. 6.		001		0006
3. 7.		021		026		008		0,660	+	0,820	+
4. 6.		024		030		009	1. 9.		0,0006		0,0003
5.		025		031		009	2. 8.		0011		0004
	0,573		0,582		0,594		3. 7.		0014		0005
							4. 5. 6.		0014		0006
								0,670		0,860	

Anhang zu Tabelle IV.

Q	P	C	P	C
	0,860	+	2,10	+
1. 9.		0,0002		0,001
2. 8.		0004		001
3. 7.		0005		001
4.5.6.		0005		001
	0,900	+	2,50	+
1. 9.		0,0002		0,000
2. 8.		0003		001
3. 7.		0004		001
4.5.6.		0005		001
	1,000	+	2,60	+
1. 9.		0,0002		0,0004
2. 8.		0003		0007
3. 7.		0004		0009
4.5.6.		0004		0010
	1,050	+	2,70	+
1. 9.		0,0002		0,0003
2. 8.		0003		0007
3. 7.		0003		0009
4.5.6.		0003		0009
	1,100	+	2,80	+
1. 9.		0,0002		0,0003
2. 8.		0002		0006
3. 7.		0003		0008
4.5.6.		0003		0009
	1,150	+	3,10	+
1. 9.		0,0001		0,0003
2. 8.		0002		0006
3. 7.		0003		0008
4.5.6.		0003		0008
	1,20	+	3,40	+
1. 9.		0,001		0,0003
2. 8.		002		0005
3. 7.		003		0007
4.5.6.		003		0008
	1,30	+	3,70	+
1. 9.		0,001		0,0003
2. 8.		002		0005
3. 7.		002		0007
4.5.6.		003		0007
	1,40	+	4,00	+
1. 9.		0,001		0,0003
2. 8.		002		0005
3. 7.		002		0006
4.5.6.		002		0007
	1,70	+	4,50	+
1. 9.		0,001		0,0002
2. 8.		001		0004
3. 7.		002		0005
4.5.6.		002		0006
	2,10		5,00	

Q	P	C	P	C	P	C
	5,00	+	13,0	+	21,0	+
1. 9.		0,0002		0,0007		0,0005
2. 8.		0004		0012		0008
3. 7.		0005		0016		0011
4. 6.		0005		0019		0012
5.		0005		0020		0013
	5,50	+	14,0	+	22,0	+
1. 9.		0,0002		0,0007		0,0005
2. 8.		0003		0012		0008
3. 7.		0004		0015		0010
4. 6.		0005		0017		0011
5.		0005		0018		0012
	6,00	+	15,0	+	23,0	+
1. 9.		0,0002		0,0006		0,0004
2. 8.		0003		0011		0007
3. 7.		0004		0014		0009
4. 6.		0004		0016		0011
5.		0004		0017		0011
	7,50	+	16,0	+	24,0	
1. 9.		0,0002		0,0006		
2. 8.		0002		0010		
3. 7.		0003		0013		
4. 6.		0003		0015		
5.		0003		0016		
	9,00	+	17,0	+		
1. 9.		0,0001		0,0006		
2. 8.		0002		0010		
3. 7.		0002		0013		
4. 6.		0003		0015		
5.		0003		0015		
	10,0	+	18,0	+		
1. 9.		0,0009		0,0005		
2. 8.		0016		0009		
3. 7.		0021		0012		
4. 6.		0024		0014		
5.		0025		0014		
	11,0	+	19,0	+		
1. 9.		0,0009		0,0005		
2. 8.		0015		0009		
3. 7.		0020		0011		
4. 6.		0022		0013		
5.		0023		0014		
	12,0	+	20,0	+		
1. 9.		0,0008		0,0005		
2. 8.		0014		0008		
3. 7.		0018		0011		
4. 6.		0020		0012		
5.		0021		0013		
	13,0		21,0			

119.

Interpolirung zwischen den Werthen: $P = 0{,}577$ und $P = 0{,}578$.

P	R
0,577	0,384899967
0,5771	0,384900070989
0,5772	0,384900140352
0,5773	0,384900175083
0,57731	0,384900176651109
0,57732	0,384900177872832
0,57733	0,384900178748163
0,57734	0,384900179277096
0,57735	0,384900179459625
0,577350269189625...	0,384900179459750... Maximum.
0,57736	0,384900179295744
0,57737	0,384900178785447
0,57738	0,384900177928728
0,57739	0,384900176725581
0,5774	0,384900175176
0,5775	0,384900140625
0,5776	0,384900071424
0,5777	0,384899967567
0,5778	0,384899829048
0,5779	0,384899655861
0,578	0,384899448

120.

Die Einrichtung der Tabelle IV., so wie des Anhanges d[...] selben, ist im Allgemeinen der der früheren Tabellen gleich.

Um alsbald, auch ohne den Anhang der Tabelle nachzuse[...]gen, sehen zu können, auf wie viele Decimalstellen sich d[...] Division der Differenz D in die Zahl R der Werth von P [...] bestimmen lasse, ist

1) die Differenz, von dem Werthe: $P=0{,}036$ an, jedesmal auf eine bedeutliche Ziffer mehr angegeben, als die Spalte C des Anhanges Decimalstellen aufweist.

Die Zahl dieser Decimalstellen ist also, von $P=0{,}036$ an, stets um 1 kleiner, wie die Zahl der bedeutlichen Ziffern des Werthes von D.

Da zwischen den Werthen von $P=0{,}577$, und $P=0{,}578$ nach [113. 2)] sich ein Maximum für den Werth von R ergiebt, ein Werth für D zwischen diesen beiden Werthen von P demnach nicht stattfindet, so haben wir

2) in [119.] zwischen diese Werthe von P weitere Werthe interpolirt und die zugehörigen Werthe von R daneben aufgeführt, um für Werthe von R, welche dem Werthe von $\frac{2}{9}\sqrt{3}$ [113. 1)] sehr nahe kommen, die zugehörigen Werthe von P noch annähernd bestimmen zu können.

Was die Formeln [114. — 117.] anlangt, so ist bei ihrer Anwendung zu bemerken, dass

3) wenn die vorgelegte Gleichung nur eine reelle Wurzel hat, die Werthe von p in der Bedeutung zu nehmen seien, wie sie diese Formeln angeben. Hat aber die vorgelegte Gleichung drei reelle Wurzeln, so ist

4) nur für den Werth von $P>1$ der Werth von p in der Bedeutung zu nehmen, wie ihn die Formeln angeben, für die beiden andern Werthe von P (<1) aber, in der entgegengesetzten Bedeutung.

Diese Verfahrungsweise gründet sich auf die in der Tabelle stets positiv angenommenen Werthe von R [112. 1) und 2)].

121.

Wir wollen nun das in dieser Abtheilung Abgehandelte wieder auf einige Zahlenbeispiele anwenden, und hierzu vorzugsweise solche wählen, welche bereits in der 2. Abtheilung zur Anwendung kamen, um beide Verfahrungsweisen specieller mit einander vergleichen zu können.

Es seien die reellen Wurzeln der Gleichung:

$$0=\underset{a}{120}+\underset{b}{80}y+\underset{c}{16}y^2+y^3 \qquad [83.]$$

so genau zu bestimmen, als dies die Einrichtung der Tabelle IV. zulässt.

Der Vorzeichen der Glieder wegen ist nach [114.] aufzulösen und man erhält:

$$(3c^2-9b)^{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{3} = 6{,}92820323;\quad (3c^2-9b)^{\frac{3}{2}} = 192\sqrt{3} = 332{,}5537550$$

$$\begin{array}{l} 27a = 3240 \\ 27q = 3328 \\ \hline 27(q-a) = 88; \end{array}$$

daher ist $+a < +q$ und Fall 1) vorliegend.

mithin ist $R = 88 : 332{,}5537550 = 0{,}2646188734\ldots$

Es ist also $R < \frac{2}{9}\sqrt{3}$ [113. 1)]; daher hat die vorgelegte Gleichung drei reelle Wurzeln [113. 4)].

Man erhält weiter:

$P' = 0{,}288$	$P' = 0{,}823$	$P' = 1{,}112$
$R = 0{,}2646188734$	$R' = 0{,}265558233$	$R = 0{,}2646188734$
$R' = 0{,}264112128$	$R = 0{,}2646188734$	$R' = 0{,}263036928$

daher ist:

$\frac{R-R'}{D} = \frac{0{,}0005067454}{0{,}00075030}$	$\frac{R'-R}{D} = \frac{0{,}0009393596}{0{,}0010345}$	$\frac{R-R'}{D} = \frac{0{,}0015819454}{0{,}0027130}$
$= 0{,}6753$	$= 0{,}9081$	$= 0{,}5831$
$C = -0{,}0002$	$C = +0{,}0003$	$C = +0{,}0003$
$0{,}6751$	$0{,}9084$	$0{,}5834$
$P' = 0{,}288$	$P' = 0{,}823$	$P' = 1{,}112$
$P = 0{,}2886751$	$P = 0{,}8239084$	$P = 1{,}1125834$
$P.4\sqrt{3} = p = 1{,}999999;$	$p = 5{,}708204;$	$p = 7{,}7082039;$
$(3y) = -16 - 1{,}999999$	$(3y) = -16 - 5{,}708204$	$(3y) = -16 + 7{,}7082039$
$= -17{,}999999$	$= -21{,}708204$	$= -8{,}2917961$
$y = -\ 5{,}999999$	$y = -\ 7{,}236068$	$y = -2{,}7639320$

122.

Es seien die Wurzeln der Gleichung:

1) $$0 = +136 + 99y + 21y^2 + y^3 \qquad [86]$$

so genau zu bestimmen, als dies die Einrichtung der Tabelle IV. gestattet.

Der Vorzeichen der Glieder wegen ist nach [114] aufzulösen. Man erhält:

$$(3c^2-9b)^{\frac{1}{2}} = 20{,}7846097;\quad (3c^2-9b)^{\frac{3}{2}} = 8978{,}951385$$

$$\begin{array}{r} +27a = 3672 \\ +27q = \ \ 189 \\ \hline 27(a-q) = \left\{ \begin{array}{l} 3483 \\ 27r, \end{array} \right. \end{array}$$

also ist: $+a > +q$, und Fall 3) vorliegend.

daher:

$$R = 3483:8978,951385.... = 0,3879072122,$$

also: $R > \frac{2}{9}\sqrt{3}$ [113. 1)]; daher hat die vorgelegte Gleichung nur eine reelle Wurzel [113. 6)].

Nun ist:

$$R' = 0,3857988875 \text{ und } P' = 1,155,$$

also:

$$\frac{R-R'}{D} = \frac{0,002108337}{0,003006} \qquad = \ \ 0,7014$$
$$C = +0,0003$$
$$P = 1,1557017$$

daher:

$$P.20,7816097 = p = 24,0208087.$$

$$(3y) = -21 - 24,0208087 = -45,0208087$$
$$= -15,0069362$$

bis einschliesslich der 6. Decimalstelle richtig.

Es sei die gegebene Gleichung:

2) $$0 = -\underset{a}{120} + \underset{b}{99}y + \underset{c}{21}y^2 + y^3. \qquad [87.]$$

Der Vorzeichen der Glieder wegen ist nach [114.] aufzulösen. Man erhält:

$$\begin{array}{r} -27a = -3240 \\ +27q = +\ \ 189 \\ \hline 27(q+a) = \left\{ \begin{array}{l} 3429 \\ 27r, \end{array} \right. \end{array}$$

mithin: $-a < +q$, daher Fall 2) vorliegend.

daher

$$R = \frac{3429}{8978,951385....} = 0,3818931468....$$

Es ist also: $R < \frac{2}{9}\sqrt{3}$ [113. 1)]; daher hat die vorgelegte Gleichung drei reelle Wurzeln [113. 4)] und man erhält weiter:

$P' = 0{,}535$	$P' = 0{,}618$	$P' = 1{,}153$
$R = 0{,}3818931468$	$R' = 0{,}381970968$	$R = 0{,}3818931468$
$R' = 0{,}381869625$	$R = 0{,}3818931468$	$R' = 0{,}379808577$

daher ist:

$\frac{R-R'}{D} = \frac{0{,}0000235218}{0{,}0001397}$	$\frac{R'-R}{D} = \frac{0{,}0000778212}{0{,}0001476}$	$\frac{R-R'}{D} = \frac{0{,}0020845698}{0{,}002992}$
$= 0{,}168$	$= 0{,}527$	$= 0{,}6967$
$C = -0{,}000$	$C = +0{,}004$	$C = +0{,}0003$
$0{,}168$	$0{,}531$	$0{,}6970$
$P' = 0{,}535$	$P' = 0{,}618$	$P' = 1{,}153$
$P = 0{,}535168$	$P = 0{,}618531$	$P = 1{,}1536970$
$P.\sqrt{432} = p = 11{,}1232.$	$p = 12{,}8559.$	$p = 23{,}979142.$
$(3y) = -21 - 11{,}1232$	$(3y) = -21 - 12{,}8559$	$(3y) = -21 + 23{,}979142$
$= -32{,}1232.$	$= -33{,}8559.$	$= +2{,}979142.$
$y = -10{,}7077.$	$y = -11{,}2853.$	$y = +0{,}993047.$

123.

Es sei die gegebene Gleichung:

1) $$0 = -\underset{a}{269} - \underset{b}{68}y + \underset{c}{2}y^2 + y^3. \qquad [88.]$$

Der Vorzeichen der Glieder wegen ist nach [115.] aufzulösen. Man erhält:

$$(3c^2 + 9b)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{624} = 24{,}97999199; \quad (3c^2 + 9b)^{\frac{3}{2}} = 15587{,}51501....$$

$$\begin{array}{r} -27a = -7263 \\ -27q = -1240 \\ \hline 27(a-q) = 6023; \end{array}$$

also $-a < -q$ und Fall 3) vorliegend.

mithin

$$R = 6023 : 15587{,}51501.... = 0{,}3863989865.$$

[Es ist also $R > \frac{2}{9}\sqrt{3}$ [113. 1)], daher hat die vorgelegte Gleichung nur **eine** reelle Wurzel] [113. 4)]. Es ist weiter:

$$R' = 0{,}3857988875$$

$$P' = 1{,}155 \quad \text{und} \quad \frac{R-R'}{D} = \frac{0{,}0006001115}{0{,}003006}$$

$$= 0{,}1996$$

$$C = +0{,}0002$$

$$0{,}1998$$

$$P' = 1{,}155$$

$$P = 1{,}1551998.$$

$$P.\sqrt{624} = p = [illegible]$$

$$(3y) = -2 + [illegible] = [illegible].$$

$$y = [illegible]$$

Ist aber die gegebene Gleichung:

$$2) \qquad 0 = -268 - 68y + 2y^2 + y^3. \qquad [illegible]$$

so ist:

$$\begin{array}{rl} -27a = & -7236 \\ -27q = & -1240 \\ \hline 27(a-q) = & 5996, \end{array}$$

also: $-a < -q$ und Fall 3 vorliegend.

daher:

$$R = 5996 : 15587{,}51501 \ldots = 0{,}3846668310.$$

($R < \frac{1}{2}\sqrt{3}$, daher hat die gegebene Gleichung **drei** reelle Wurzeln. Es ergiebt sich nun weiter:

$P' = 0{,}565$	$P' = 0{,}588$	$P' = 1{,}154$
$R = 0{,}3846668310$	$R' = 0{,}3847025328$	$R = 0{,}3846668310$
$R' = 0{,}3846378750$	$R = 0{,}3846668310$	$R' = 0{,}3828002640$
$\frac{R-R'}{D} = \frac{0{,}0000289560}{0{,}0000406300}$	$\frac{R'-R}{D} = \frac{0{,}0000356070}{0{,}0000389900}$	$\frac{R-R'}{D} = \frac{0{,}0018665670}{0{,}0029990}$
$= 0{,}712$	$= 0{,}915$	$= 0{,}6224$
$C = -0{,}009$	$C = +0{,}005$	$C = +0{,}0003$
$0{,}703$	$0{,}920$	$0{,}6227$
$P' = 0{,}565$	$P' = 0{,}588$	$P' = 1{,}154$
$P = 0{,}565703$	$P = 0{,}588920$	$P = 1{,}1546227$
$P.\sqrt{624} = p = 14{,}1313$	$p = 14{,}7112$	$p = 28{,}842466$
$(3y) = -2 - 14{,}1313$	$(3y) = -2 - 14{,}7112$	$(3y) = -2 + 28{,}842466$
$= -16{,}1313;$	$= -16{,}7112;$	$= +26{,}842466;$
$y = -5{,}3771.$	$y = -5{,}5704.$	$y = +8{,}947488.$

124.

Es sei die gegebene Gleichung:

$$0 = \underset{a}{-30} \underset{b}{-31}y \underset{c}{-10}y^2 + y^3. \qquad [90.]$$

Man erhält nach [117.]:

$$\begin{array}{rl} -27a = & -\ 810 \\ +27q = & +4790 \\ \hline 27(q+a) = & 5600, \end{array} \quad \text{daher } -a < +q \text{ und Fall 1) vorliegend.}$$

$$(3c^2+9b)^{\frac{1}{2}} = 24{,}06241883, \quad (=\sqrt{579})$$

$$(3c^2+9b)^{\frac{3}{2}} = 13932{,}14050.$$

$$R = 5600 : 13932{,}1405 = 0{,}40194828$$

$$R' = 0{,}400896$$

$$P' = 1{,}160; \quad \frac{R-R'}{D} = \frac{0{,}00105228}{0{,}003040} = 0{,}3461$$

$$C = +0{,}0003$$

$$0{,}3464$$

$$P' = 1{,}160$$

$$P = 1{,}1603464.$$

$$P.\sqrt{579} = p = 27{,}920740.$$

$$(3y) = +10 + 27{,}920740 = 37{,}920740$$

$$y = 12{,}640246.$$

125.

Es seien die reellen Wurzeln der Gleichung:

1) $$0 = -\underset{a}{30} + \underset{b}{9}y + \underset{c}{9}y^2 + y^3$$

so genau zu bestimmen, als dies die Einrichtung der Tabelle IV. gestattet.

Der Vorzeichen der Glieder wegen ist nach [114.] aufzulösen, und man erhält:

$$(3c^2-9b)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{162} = 12{,}727922\ldots; \quad (3c^2-9b)^{\frac{3}{2}} = 2061{,}9233\ldots$$

$$\begin{array}{rl} -27a = & -810 \\ -27q = & -729 \\ \hline 27(a-q) = & 81; \end{array} \quad \text{daher ist } -a < -q \text{ und Fall 5) vorliegend.}$$

mithin $R = 81 : 2061{,}9233\ldots = 0{,}039283710\ldots$

Es ist also $R < \frac{2}{9}\sqrt{3}$ [113. 1)]; daher hat die vorgelegte Gleichung drei reelle Wurzeln [113. 4)]. Man erhält weiter:

[illegible]

$P' = 0,039$	$P' = 1,$[illegible]	$P' = $ [illegible]
$R = 0,0392$[illegible]	$R' = 1,14$[illegible]	$R = 1,$[illegible]
$R' = 0,03$[illegible]	$R = 1,$[illegible]	$R' = 1,$[illegible]
$\frac{R-R'}{D} = \frac{0,000\ldots}{0,000\ldots}$ [illegible]	$\frac{R'-R}{D} = $ [illegible]	$\frac{R-R'}{D} = $ [illegible]
$= 0,34$[illegible]	$=$ [illegible]	$=$ [illegible]
$C = -0,000$[illegible]	$C = +$[illegible]	$C = -$[illegible]
$0,34$[illegible]	[illegible]	[illegible]
$P' = 0,039$	$P' = $ [illegible]	$P' = $ [illegible]
$P = 0,039$[illegible]	$P = $ [illegible]	$P = $ [illegible]
$P.\sqrt{162} = p = 0,500\ldots$	$p = $ [illegible]	$p = $ [illegible]
$(3y) = -9 - 0,500\ldots$	$3y = -9 -$ [illegible]	$3y = -9 +$ [illegible]
$= -9,500$[illegible]$5.$	$= -$[illegible]	$= +$[illegible]
$y = -3,166925.$	$y = -$[illegible]	$y = +1,$[illegible]

Ist aber die gegebene Gleichung:

$$2) \qquad 0 = +30 + 9y + 9y^2 + y^3,$$

so ist, der Vorzeichen der Glieder wegen, wieder nach [114.] aufzulösen, und es ergiebt sich:

$+27a = +810$ daher ist $+a > -q$, und Fall 4 vorliegend.
$-27q = -729$ also ist:
$27(a+q) = 1539$ und: $R = 1539 : 2061,9233\ldots. = 0,74639491\ldots.$

Es ist also $R > \frac{2}{3}\sqrt{3}$ [113. 1)]; daher hat die vorgelegte Gleichung nur **eine** reelle Wurzel [113. 6)], und es ergiebt sich:

$$P' = 1,26; \qquad R = 0,74639491\ldots.$$
$$R' = 0,740376$$
$$\frac{R-R'}{D} = \frac{0,00601891}{0,03801} = 0,158$$
$$C = +0,002$$
$$0,160$$
$$P' = 1,26$$
$$P = 1,26160.$$

$$P.\sqrt{162} = p = 16,0575.$$

$$(3y) = -9 - 16,0575 = -25,0575.$$

$$y = -8,3525.$$

126.

Es sei die gegebene Gleichung:

$$0 = \underset{a}{-9} + \underset{b}{3}y + \underset{c}{5}y^2 + y^3.$$

Der Vorzeichen der Glieder wegen ist nach [114.] aufzulösen und man erhält:

$$(2c^2 - 9b)^{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{3}; \quad (3c^2 - 9b)^{\frac{3}{2}} = 192\sqrt{3}.$$

$$\begin{array}{r|l} -27a = -243 & \\ -27q = -115 & \text{also } -a < -q \text{ und daher Fall 5) vorliegend} \\ \hline 27(a-q) = \;\; 128, & \end{array}$$

mithin:

$$R = \frac{128}{192\sqrt{3}} = \tfrac{2}{9}\sqrt{3};$$

und es bestehen daher zwei gleiche reelle Werthe für P [113. 5)] nämlich:

$P = \frac{1}{3}\sqrt{3}$,	$P = \frac{1}{3}\sqrt{3}$,	$P = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ [113. 2) 3)]
$p = \frac{1}{3}\sqrt{3} . 4\sqrt{3} = 4.$	$p = \frac{1}{3}\sqrt{3} . 4\sqrt{3} = 4.$	$p = \frac{2}{3}\sqrt{3} . 4\sqrt{3} = 8.$
$(3y) = -5 - 4 = -9.$	$(3y) = -5 - 4 = -9.$	$(3y) = -5 + 8 = +3.$
$y = -3.$	$y = -3.$	$y = +1.$

127.

Es sei die gegebene Gleichung:

$$0 = +\underset{a}{182} + \underset{b}{72}y - \underset{c}{21}y^2 + y^3.$$

Der Vorzeichen der Glieder wegen ist nach [116.] aufzulösen. Man erhält:

$$(3c^2 - 9b)^{\frac{1}{2}} = 15\sqrt{3}; \quad (3c^2 - 9b)^{\frac{3}{2}} = 10125\sqrt{3}.$$

$$\begin{array}{r|l} +27a = +4914 & \text{daher } +a \doteq +q, \text{ und Fall 5) oder 6) vorlie-} \\ +27q = +4914 & \text{gend.} \\ \hline 27(a-q) = \;\; 0, & \end{array}$$

also $R = 0$, mithin:

$P = 0$,	$P = 1$,	$P = 1$,
$p = 0 . 15\sqrt{3} = 0.$	$p = 1 . 15\sqrt{3}.$	$p = 1 . 15\sqrt{3}.$
$(3y) = +21$,	$(3y) = +21 - 15\sqrt{3}$,	$(3y) = +21 + 15\sqrt{3}$,
$y = +7.$	$y = +7 - 5\sqrt{3}.$	$y = +7 + 5\sqrt{3}.$

Die Formeln, welche sich zur annähernden Bestimmung der reellen Wurzeln einer unvollständigen cubischen Gleichung aus [114.—117.] leicht ableiten lassen, sollen nachstehend zusammengestellt werden.

128.

$0 = \pm a - by + y^3.$

$R = \frac{a}{b^{\frac{3}{2}}}.$	Tab. IV.	$y = \mp P . b^{\frac{1}{2}}.$

129.

$0 = \pm a + cy^2 + y^3.$ $\qquad R = \frac{27r}{\sqrt{27 . c^3}}.$
$-27q = -2c^3$

$\pm a > -q$	$q \pm a = r$	Tab. IV.	$y = -\frac{1}{3}c(1 + P . \sqrt{3})$
$-a < -q$	$a - q = r$		$y = -\frac{1}{3}c(1 - P . \sqrt{3})$

130.

$0 = \pm a - cy^2 + y^3.$ $\qquad R = \frac{27r}{\sqrt{27 . c^3}}.$
$+27q = +2c^3$

$\pm a < +q$	$q \mp a = r$	Tab. IV.	$y = +\frac{1}{3}c(1 + P . \sqrt{3}).$
$+a > +q$	$a - q = r$		$y = +\frac{1}{3}c(1 - P . \sqrt{3}).$

(Die fünfte und letzte Abtheilung dieser Abhandlung folgt im vierten Hefte.)

X.

Ueber die Pothenot'sche Aufgabe.

Von

dem Herausgeber.

So oft auch das Pothenot'sche Problem schon behandelt worden ist, auch in diesem Archiv, möchten doch die im Folgenden entwickelten ganz allgemeinen Formeln einiger Beachtung nicht ganz unwerth sein, weil mittelst derselben alle unbekannten Grössen durch die gegebenen Grössen völlig entwickelt dargestellt werden.

Die drei gegebenen Punkte seien A, B, C und M sei der gesuchte vierte Punkt; weil die Punkte A, B, C gegeben sind, so sind die Seiten a, b, c und die Winkel A, B, C des Dreiecks ABC, so wie auch der Halbmesser R des um dieses Dreieck beschriebenen Kreises bekannt. Wir wollen nun den Punkt A als Anfang und die Gerade AB als den positiven Theil der Axe der x eines rechtwinkligen Coordinatensystems der xy annehmen, in welchem die positiven y auf derselben Seite von AB genommen werden, auf welcher der Punkt C liegt. In diesem Systeme bezeichnen wir die Coordinaten der Punkte A, B, C respective durch x_a, y_a; x_b, y_b; x_c, y_c; die Coordinaten des zu bestimmenden Punkts M durch x, y; die von M nach den Punkten A, B, C gezogenen Geraden MA, MB, MC sollen respective durch r_a, r_b, r_c bezeichnet werden. Denken wir uns nun durch den Punkt M ein dem primitiven Systeme der xy paralleles Coordinatensystem der $x'y'$ gelegt, so sollen die von den Geraden MA, MB, MC, die sämmtlich als von M ausgehend gedacht werden, mit

dem positiven Theile der Axe der x' eingeschlossenen, von dem positiven Theile der Axe der x' an nach dem positiven Theile der Axe der y' hin von 0 bis 360° gezählten Winkel respective durch φ_a, φ_b, φ_c bezeichnet werden. Diese Winkel selbst können freilich nicht gemessen werden, aber ihre Differenzen mit dem Theodoliten zu messen, ist jederzeit möglich, weshalb wir berechtigt sind, im Folgenden die Differenzen

$$\varphi_a-\varphi_b,\quad \varphi_b-\varphi_c,\quad \varphi_c-\varphi_a$$

als durch Messung mit dem Theodoliten oder einem anderen geeigneten Instrumente bekannt gewordene Grössen zu betrachten.

Nach Thl. XXXVI. S. 326. ist nun:

1)

$$\begin{aligned} x_a &= 0, & y_a &= 0,\\ x_b &= 2R\sin C, & y_b &= 0,\\ x_c &= 2R\cos A\sin B, & y_c &= 2R\sin A\sin B. \end{aligned}$$

Ferner ist nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten:

2)

$$\begin{aligned} x_a &= x+r_a\cos\varphi_a, & y_a &= y+r_a\sin\varphi_a,\\ x_b &= x+r_b\cos\varphi_b, & y_b &= y+r_b\sin\varphi_b,\\ x_c &= x+r_c\cos\varphi_c, & y_c &= y+r_c\sin\varphi_c; \end{aligned}$$

woraus sich die folgenden Gleichungen ergeben:

3)

$$\begin{aligned} r_a\cos\varphi_a-r_b\cos\varphi_b &= x_a-x_b, & r_a\sin\varphi_a-r_b\sin\varphi_b &= y_a-y_b;\\ r_b\cos\varphi_b-r_c\cos\varphi_c &= x_b-x_c, & r_b\sin\varphi_b-r_c\sin\varphi_c &= y_b-y_c;\\ r_c\cos\varphi_c-r_a\cos\varphi_a &= x_c-x_a, & r_c\sin\varphi_c-r_a\sin\varphi_a &= y_c-y_a. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich aber ferner das folgende System von Gleichungen:

4)

$$r_a\sin(\varphi_a-\varphi_b)=(y_a-y_b)\cos\varphi_b-(x_a-x_b)\sin\varphi_b,$$

$$r_b\sin(\varphi_a-\varphi_b)=(y_a-y_b)\cos\varphi_a-(x_a-x_b)\sin\varphi_a;$$

$$r_b\sin(\varphi_b-\varphi_c)=(y_b-y_c)\cos\varphi_c-(x_b-x_c)\sin\varphi_c,$$

$$r_c\sin(\varphi_b-\varphi_c)=(y_b-y_c)\cos\varphi_b-(x_b-x_c)\sin\varphi_b;$$

$$r_c \sin(\varphi_c - \varphi_a) = (y_c - y_a)\cos\varphi_a - (x_c - x_a)\sin\varphi_a,$$

$$r_a \sin(\varphi_c - \varphi_a) = (y_c - y_a)\cos\varphi_c - (x_c - x_a)\sin\varphi_c.$$

Führt man aber in diese Gleichungen die Werthe der Coordinaten x_a, y_a; x_b, y_b; x_c, y_c aus 1) ein; so werden dieselben nach leichter Rechnung:

5)

$$r_a \sin(\varphi_a - \varphi_b) = 2R\sin C \sin\varphi_b,$$

$$r_b \sin(\varphi_a - \varphi_b) = 2R\sin C \sin\varphi_a;$$

$$r_b \sin(\varphi_b - \varphi_c) = -2R\sin A \sin(B + \varphi_c),$$

$$r_c \sin(\varphi_b - \varphi_c) = -2R\sin A \sin(B + \varphi_b);$$

$$r_c \sin(\varphi_c - \varphi_a) = 2R\sin B \sin(A - \varphi_a),$$

$$r_a \sin(\varphi_c - \varphi_a) = 2R\sin B \sin(A - \varphi_c);$$

bei deren Entwickelung man sich zu erinnern hat, dass $A+B+C = 180^0$ ist.

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich durch Division:

6)

$$\frac{\sin(\varphi_b - \varphi_c)}{\sin(\varphi_c - \varphi_a)} = -\frac{\sin A}{\sin B}\cdot\frac{\sin(B + \varphi_b)}{\sin(A - \varphi_a)},$$

$$\frac{\sin(\varphi_c - \varphi_a)}{\sin(\varphi_a - \varphi_b)} = \frac{\sin B}{\sin C}\cdot\frac{\sin(A - \varphi_c)}{\sin\varphi_b},$$

$$\frac{\sin(\varphi_a - \varphi_b)}{\sin(\varphi_b - \varphi_c)} = -\frac{\sin C}{\sin A}\cdot\frac{\sin\varphi_a}{\sin(B + \varphi_c)};$$

welche Gleichungen man auch unter der folgenden Form schreiben kann:

7)

$$\frac{\sin(A - \varphi_a)}{\sin(B + \varphi_b)} = -\frac{\sin A}{\sin B}\cdot\frac{\sin(\varphi_c - \varphi_a)}{\sin(\varphi_b - \varphi_c)},$$

$$\frac{\sin\varphi_b}{\sin(A - \varphi_c)} = \frac{\sin B}{\sin C}\cdot\frac{\sin(\varphi_a - \varphi_b)}{\sin(\varphi_c - \varphi_a)},$$

$$\frac{\sin(B + \varphi_c)}{\sin\varphi_a} = -\frac{\sin C}{\sin A}\cdot\frac{\sin(\varphi_b - \varphi_c)}{\sin(\varphi_a - \varphi_b)};$$

woraus sich durch Multiplication die Relation:

$$8) \ldots\ldots \frac{\sin(A-\varphi_a)\sin\varphi_b\sin(B+\varphi_c)}{\sin\varphi_a\sin(B+\varphi_b)\sin(A-\varphi_c)}=1$$

oder:

9)

$$\sin\varphi_a\sin(B+\varphi_b)\sin(A-\varphi_c)=\sin(A-\varphi_a)\sin\varphi_b\sin(B+\varphi_c)$$

ergiebt.

Setzt man der Kürze wegen:

10)

$$\mathrm{A}=\frac{\sin(\varphi_b-\varphi_c)}{\sin A},\quad \mathrm{B}=\frac{\sin(\varphi_c-\varphi_a)}{\sin B},\quad \mathrm{C}=\frac{\sin(\varphi_a-\varphi_b)}{\sin C};$$

so kann man die Gleichungen 7) unter der folgenden Form darstellen:

$$11) \ldots\ldots \begin{cases} \dfrac{\sin(A-\varphi_a)}{\sin(B+\varphi_b)}=-\dfrac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}, \\ \dfrac{\sin\varphi_b}{\sin(A-\varphi_c)}=\dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{B}}, \\ \dfrac{\sin(B+\varphi_c)}{\sin\varphi_a}=-\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}}. \end{cases}$$

Die letzte dieser drei Gleichungen kann man auf folgende Art schreiben:

$$\frac{\sin\{B+(\varphi_c-\varphi_a)+\varphi_a\}}{\sin\varphi_a}=-\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}},$$

also:

$$\sin\{B+(\varphi_c-\varphi_a)\}\cot\varphi_a+\cos\{B+(\varphi_c-\varphi_a)\}=-\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}},$$

woraus man zur Bestimmung von φ_a die folgende Formel erhält:

12)

$$\cot\varphi_a=-\cot\{B+(\varphi_c-\varphi_a)\}-\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}}\operatorname{cosec}\{B+(\varphi_c-\varphi_a)\}.$$

Weil man nur weiss, dass φ_a zwischen 0 und 360° liegt, so wird durch diese Formel φ_a nicht vollkommen bestimmt; nach der zweiten der Gleichungen 5) hat aber $\sin\varphi_a$ mit

$$\frac{\sin(\varphi_a-\varphi_b)}{\sin C},$$

daher mit C, einerlei Vorzeichen, so dass man also das Vorzeichen von $\sin\varphi_a$ kennt, und folglich, in Verbindung mit der Gleichung 12), nie ein Zweifel bei der Bestimmung von φ_a bleiben kann; ist nämlich:

$\sin\varphi_a$	$\cot\varphi_a$
positiv	positiv
positiv	negativ
negativ	positiv
negativ	negativ

so ist beziehungsweise:

$$0<\varphi_a<90^0$$
$$90^0<\varphi_a<180^0$$
$$180^0<\varphi_a<270^0$$
$$270^0<\varphi_a<360^0.$$

Hat man auf diese Weise φ_a ohne Zweideutigkeit bestimmt, so findet man φ_b, φ_c leicht mittelst der Formeln:

$$13)\ \ldots\ldots\ \begin{cases}\varphi_b=\varphi_a-(\varphi_a-\varphi_b),\\ \varphi_c=\varphi_a+(\varphi_c-\varphi_a).\end{cases}$$

Nach 5) und 10) ist, wie man sogleich übersieht:

14)

$$r_a=\frac{2R\sin(A-\varphi_c)}{B}=\frac{2R\sin\varphi_b}{C},$$

$$r_b=\frac{2R\sin\varphi_a}{C}=-\frac{2R\sin(B+\varphi_c)}{A},$$

$$r_c=-\frac{2R\sin(B+\varphi_b)}{A}=\frac{2R\sin(A-\varphi_a)}{B};$$

mittelst welcher Formeln die Entfernungen r_a, r_b, r_c leicht berechnet werden können.

Hat man aber diese Entfernungen gefunden, so ergeben sich die Coordinaten x, y des zu bestimmenden Punktes M nach 1) und 2) mittelst der Formeln:

$$15) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= -r_a \cos\varphi_a \\ &= 2R\sin C - r_b\cos\varphi_b \\ &= 2R\cos A\sin B - r_c\cos\varphi_c, \\ y &= -r_a\sin\varphi_a \\ &= -r_b\sin\varphi_b \\ &= 2R\sin A\sin B - r_c\sin\varphi_c; \end{aligned} \right.$$

wodurch die Lage des Punktes M vollkommen bestimmt ist.

Zur Bestimmung der im Obigen eingeführten Hülfsgrösse R hat man bekanntlich die Formeln:

16)

$$a = 2R\sin A, \quad 2R = a\,\mathrm{cosec}\,A,$$

$$b = 2R\sin B, \quad 2R = b\,\mathrm{cosec}\,B,$$

$$c = 2R\sin C, \quad 2R = c\,\mathrm{cosec}\,C;$$

mittelst welcher man im Obigen auch leicht R ganz eliminiren, und statt desselben die Seiten des gegebenen Dreiecks einführen könnte, was wir jedoch hier der Kürze wegen unterlassen; natürlich gilt auch die Relation:

$$17) \quad \ldots\ldots \quad a:b:c = \sin A:\sin B:\sin C.$$

Vollständig entwickelte Ausdrücke für die Entfernungen r_a, r_b, r_c kann man auf folgende Art erhalten.

Nach 5) ist:

$$r_a\sin(\varphi_a - \varphi_b) = 2R\sin C\sin\varphi_b,$$

$$r_a\sin(\varphi_c - \varphi_a) = 2R\sin B\sin(A - \varphi_c);$$

also:

$$r_a\sin(\varphi_a - \varphi_b) = 2R\sin C\sin\varphi_b,$$

$$r_a\sin(\varphi_c - \varphi_a) = 2R\sin B\sin\{A + (\varphi_b - \varphi_c) - \varphi_b\}.$$

Die zweite dieser beiden Gleichungen bringt man leicht auf die Form:

$$\begin{aligned} r_a\sin(\varphi_c - \varphi_a) = {} & 2R\sin B\sin\{A + (\varphi_b - \varphi_c)\}\cos\varphi_b \\ & - 2R\sin B\cos\{A + (\varphi_b - \varphi_c)\}\sin\varphi_b, \end{aligned}$$

also, wegen der ersten Gleichung:

$$r_a \sin C \sin(\varphi_c - \varphi_a)$$
$$= 2R \sin B \sin C \sin\{A + (\varphi_b - \varphi_c)\} \cos\varphi_b$$
$$- r_a \sin B \cos\{A + (\varphi_b - \varphi_c)\} \sin(\varphi_a - \varphi_b);$$

und hat daher jetzt die beiden folgenden Gleichungen:

$$2R \sin B \sin C \sin\{A + (\varphi_b - \varphi_c)\} \sin\varphi_b$$
$$= r_a \sin B \sin\{A + (\varphi_b - \varphi_c)\} \sin(\varphi_a - \varphi_b),$$

$$2R \sin B \sin C \sin\{A + (\varphi_b - \varphi_c)\} \cos\varphi_b$$
$$= r_a[\sin C \sin(\varphi_c - \varphi_a) + \sin B \cos\{A + (\varphi_b - \varphi_c)\} \sin(\varphi_a - \varphi_b)].$$

Quadrirt man diese Gleichungen, addirt sie zu einander, und setzt dann:

$$\cos\{A + (\varphi_b - \varphi_c)\} = \cos\tfrac{1}{2}\{A + (\varphi_b - \varphi_c)\}^2 - \sin\tfrac{1}{2}\{A + (\varphi_b - \varphi_c)\}^2,$$

so erhält man die Gleichung:

$$4R^2 \sin B^2 \sin C^2 \sin\{A + (\varphi_b - \varphi_c)\}^2$$
$$= r_a^2 \left\{ \begin{array}{l} \{\sin B \sin(\varphi_a - \varphi_b) + \sin C \sin(\varphi_c - \varphi_a)\}^2 \cos\tfrac{1}{2}\{A + (\varphi_b - \varphi_c)\}^2 \\ + \{\sin B \sin(\varphi_a - \varphi_b) - \sin C \sin(\varphi_c - \varphi_a)\}^2 \sin\tfrac{1}{2}\{A + (\varphi_b - \varphi_c)\}^2 \end{array} \right\},$$

oder:

$$\frac{16R^2}{r_a^2} = (B+C)^2 \operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}\{A + (\varphi_b - \varphi_c)\}^2 + (B-C)^2 \sec\tfrac{1}{2}\{A + (\varphi_b - \varphi_c)\}^2.$$

Auf ähnliche Art ist nach 5):

$$r_b \sin(\varphi_a - \varphi_b) = 2R \sin C \sin\varphi_a,$$
$$r_b \sin(\varphi_b - \varphi_c) = -2R \sin A \sin(B + \varphi_c);$$

also:

$$r_b \sin(\varphi_a - \varphi_b) = 2R \sin C \sin\varphi_a,$$
$$r_b \sin(\varphi_b - \varphi_c) = -2R \sin A \sin\{B + (\varphi_c - \varphi_a) + \varphi_a\}.$$

Die zweite dieser beiden Gleichungen bringt man sogleich auf die Form:

$$r_b \sin(\varphi_b - \varphi_c) = -2R \sin A \sin\{B + (\varphi_c - \varphi_a)\} \cos\varphi_a$$
$$-2R \sin A \cos\{B + (\varphi_c - \varphi_a)\} \sin\varphi_a,$$

also, wegen der ersten Gleichung:

$$r_b \sin C \sin(\varphi_b - \varphi_c)$$

$$= -2R \sin C \sin A \sin\{B + (\varphi_c - \varphi_a)\} \cos\varphi_a$$

$$- r_b \sin A \cos\{B + (\varphi_c - \varphi_a)\} \sin(\varphi_a - \varphi_b),$$

und hat daher jetzt die beiden folgenden Gleichungen:

$$2R \sin C \sin A \sin\{B + (\varphi_c - \varphi_a)\} \sin\varphi_a$$

$$= r_b \sin A \sin\{B + (\varphi_c - \varphi_a)\} \sin(\varphi_a - \varphi_b),$$

$$2R \sin C \sin A \sin\{B + (\varphi_c - \varphi_a)\} \cos\varphi_a$$

$$= -r_b[\sin C \sin(\varphi_b - \varphi_c) + \sin A \cos\{B + (\varphi_c - \varphi_a)\} \sin(\varphi_a - \varphi_b)];$$

woraus sich nach einem ganz ähnlichen Verfahren wie vorher die Gleichung:

$$4R^2 \sin C^2 \sin A^2 \sin\{B + (\varphi_c - \varphi_a)\}^2$$

$$= r_b^2 \left\{ \begin{array}{l} \{\sin C \sin(\varphi_b - \varphi_c) + \sin A \sin(\varphi_a - \varphi_b)\}^2 \cos\tfrac{1}{2}\{B + (\varphi_c - \varphi_a)\}^2 \\ + \{\sin C \sin(\varphi_b - \varphi_c) - \sin A \sin(\varphi_a - \varphi_b)\}^2 \sin\tfrac{1}{2}\{B + (\varphi_c - \varphi_a)\}^2 \end{array} \right\},$$

oder:

$$\frac{16R^2}{r_b^2} = (\mathrm{C}+\mathrm{A})^2 \operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}\{B + (\varphi_c - \varphi_a)\}^2 + (\mathrm{C}-\mathrm{A})^2 \sec\tfrac{1}{2}\{B + (\varphi_c - \varphi_a)\}^2$$

ergiebt.

Endlich ist nach 5):

$$r_c \sin(\varphi_b - \varphi_c) = -2R \sin A \sin(B + \varphi_b),$$

$$r_c \sin(\varphi_c - \varphi_a) = \quad 2R \sin B \sin(A - \varphi_a);$$

also:

$$r_c \sin(\varphi_b - \varphi_c) = -2R \sin A \sin(B + \varphi_b),$$

$$r_c \sin(\varphi_c - \varphi_a) = \quad 2R \sin B \sin\{A + B - (\varphi_a - \varphi_b) - (B + \varphi_b)\}$$

$$= \quad 2R \sin B \sin\{C + (\varphi_a - \varphi_b) + (B + \varphi_b)\}.$$

Die zweite dieser beiden Gleichungen bringt man sogleich auf die Form:

$$r_c \sin(\varphi_c - \varphi_a) = \quad 2R \sin B \sin\{C + (\varphi_a - \varphi_b)\} \cos(B + \varphi_b)$$

$$+ 2R \sin B \cos\{C + (\varphi_a - \varphi_b)\} \sin(B + \varphi_b),$$

also wegen der ersten Gleichung:

$$r_c \sin A \sin(\varphi_c - \varphi_a)$$

$$= 2R\sin A \sin B \sin\{C + (\varphi_a - \varphi_b)\}\cos(B + \varphi_b)$$

$$-r_c \sin B \cos\{C + (\varphi_a - \varphi_b)\}\sin(\varphi_b - \varphi_c),$$

und hat daher jetzt die beiden folgenden Gleichungen:

$$2R\sin A \sin B \sin\{C + (\varphi_a - \varphi_b)\}\sin(B + \varphi_b)$$

$$= -r_c \sin B \sin\{C + (\varphi_a - \varphi_b)\}\sin(\varphi_b - \varphi_c),$$

$$2R\sin A \sin B \sin\{C + (\varphi_a - \varphi_b)\}\cos(B + \varphi_b)$$

$$= r_c[\sin A \sin(\varphi_c - \varphi_a) + \sin B \cos\{C + (\varphi_a - \varphi_b)\}\sin(\varphi_b - \varphi_c)];$$

aus denen sich auf ganz ähnliche Art wie vorher die Gleichung:

$$4R^2 \sin A^2 \sin B^2 \sin\{C + (\varphi_a - \varphi_b)\}^2$$

$$= r_c^2 \left\{ \begin{array}{l} \{\sin A \sin(\varphi_c - \varphi_a) + \sin B \sin(\varphi_b - \varphi_c)\}^2 \cos\tfrac{1}{2}\{C + (\varphi_a - \varphi_b)\}^2 \\ + \{\sin A \sin(\varphi_c - \varphi_a) - \sin B \sin(\varphi_b - \varphi_c)\}^2 \sin\tfrac{1}{2}\{C + (\varphi_a - \varphi_b)\}^2 \end{array} \right\},$$

oder:

$$\frac{16R^2}{r_c^2} = (A+B)^2 \operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}\{C + (\varphi_a - \varphi_b)\}^2 + (A-B)^2 \sec\tfrac{1}{2}\{C + (\varphi_a - \varphi_b)\}^2$$

ergiebt.

Man hat daher jetzt für die Entfernungen r_a, r_b, r_c die folgenden bemerkenswerthen, vollständig entwickelten Ausdrücke:

18)

$$r_a = \frac{4R}{\sqrt{(B+C)^2 \operatorname{cosec}\frac{1}{2}\{A + (\varphi_b - \varphi_c)\}^2 + (B-C)^2 \sec\frac{1}{2}\{A + (\varphi_b - \varphi_c)\}^2}},$$

$$r_b = \frac{4R}{\sqrt{(C+A)^2 \operatorname{cosec}\frac{1}{2}\{B + (\varphi_c - \varphi_a)\}^2 + (C-A)^2 \sec\frac{1}{2}\{B + (\varphi_c - \varphi_a)\}^2}},$$

$$r_c = \frac{4R}{\sqrt{(A+B)^2 \operatorname{cosec}\frac{1}{2}\{C + (\varphi_a - \varphi_b)\}^2 + (A-B)^2 \sec\frac{1}{2}\{C + (\varphi_a - \varphi_b)\}^2}};$$

wo für R auch die Ausdrücke in 16) eingeführt werden können.

Nach 15) ist:

$$x = -r_a \cos\varphi_a, \quad y = -r_a \sin\varphi_a;$$

und weil nun nach 5)

$$\sin\varphi_a = \frac{r_b}{2R}\,C$$

ist; so ist:

$$x = -\frac{r_a r_b}{2R}\,C\cot\varphi_a,\quad y = -\frac{r_a r_b}{2R}\,C;$$

also nach 12):

19)

$$x = \frac{r_a r_b}{2R}[A\operatorname{cosec}\{B + (\varphi_c - \varphi_a)\} + C\cot\{B + (\varphi^c - \varphi^a)\}],$$

$$y = -\frac{r_a r_b}{2R}\,C;$$

welche Formeln, mit Rücksicht auf die Formeln 18), auch als vollständig entwickelt betrachtet werden können.

Endlich lässt sich noch ein System bemerkenswerther Formeln zur Bestimmung der Summen

$$\varphi_a + \varphi_b,\quad \varphi_b + \varphi_c,\quad \varphi_c + \varphi_a$$

entwickeln, welche dann, in Verbindung mit den bekannten Differenzen

$$\varphi_a - \varphi_b,\quad \varphi_b - \varphi_c,\quad \varphi_c - \varphi_a,$$

zu den Winkeln φ_a, φ_b, φ_c selbst führen.

Nach 7) hat man die folgenden Gleichungen:

$$\frac{\sin(A - \varphi_a)}{\sin(B + \varphi_b)} = -\frac{\sin A}{\sin B}\cdot\frac{\sin(\varphi_c - \varphi_a)}{\sin(\varphi_b - \varphi_c)},$$

$$\frac{\sin\varphi_b}{\sin(A - \varphi_c)} = \frac{\sin B}{\sin C}\cdot\frac{\sin(\varphi_a - \varphi_b)}{\sin(\varphi_c - \varphi_a)},$$

$$\frac{\sin(B + \varphi_c)}{\sin\varphi_a} = -\frac{\sin C}{\sin A}\cdot\frac{\sin(\varphi_b - \varphi_c)}{\sin(\varphi_a - \varphi_b)};$$

also:

$$\frac{\sin(A - \varphi_a) + \sin(B + \varphi_b)}{\sin(A - \varphi_a) - \sin(B + \varphi_b)} = \frac{\sin A\sin(\varphi_c - \varphi_a) - \sin B\sin(\varphi_b - \varphi_c)}{\sin A\sin(\varphi_c - \varphi_a) + \sin B\sin(\varphi_b - \varphi_c)},$$

$$\frac{\sin\varphi_b + \sin(A - \varphi_c)}{\sin\varphi_b - \sin(A - \varphi_c)} = \frac{\sin B\sin(\varphi_a - \varphi_b) + \sin C\sin(\varphi_c - \varphi_a)}{\sin B\sin(\varphi_a - \varphi_b) - \sin C\sin(\varphi_c - \varphi_a)},$$

$$\frac{\sin(B + \varphi_c) + \sin\varphi_a}{\sin(B + \varphi_c) - \sin\varphi_a} = \frac{\sin C\sin(\varphi_b - \varphi_c) - \sin A\sin(\varphi_a - \varphi_b)}{\sin C\sin(\varphi_b - \varphi_c) + \sin A\sin(\varphi_a - \varphi_b)},$$

also nach bekannten Zerlegungen:

$$\frac{\tang\frac{1}{2}\{(A+B)-(\varphi_a-\varphi_b)\}}{\tang\frac{1}{2}\{(A-B)-(\varphi_a+\varphi_b)\}}=-\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{\mathrm{A}+\mathrm{B}},$$

$$\frac{\tang\frac{1}{2}\{A+(\varphi_b-\varphi_c)\}}{\tang\frac{1}{2}\{A-(\varphi_b+\varphi_c)\}}=\frac{\mathrm{B}+\mathrm{C}}{\mathrm{B}-\mathrm{C}},$$

$$\frac{\tang\frac{1}{2}\{B+(\varphi_c-\varphi_a)\}}{\tang\frac{1}{2}\{B+(\varphi_c+\varphi_a)\}}=-\frac{\mathrm{C}+\mathrm{A}}{\mathrm{C}-\mathrm{A}};$$

oder:

$$\frac{\cot\frac{1}{2}\{C+(\varphi_a-\varphi_b)\}}{\tang\frac{1}{2}\{(A-B)-(\varphi_a+\varphi_b)\}}=-\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{\mathrm{A}+\mathrm{B}},$$

$$\frac{\tang\frac{1}{2}\{A+(\varphi_b-\varphi_c)\}}{\tang\frac{1}{2}\{A-(\varphi_b+\varphi_c)\}}=\frac{\mathrm{B}+\mathrm{C}}{\mathrm{B}-\mathrm{C}},$$

$$\frac{\tang\frac{1}{2}\{B+(\varphi_c-\varphi_a)\}}{\tang\frac{1}{2}\{B+(\varphi_c+\varphi_a)\}}=-\frac{\mathrm{C}+\mathrm{A}}{\mathrm{C}-\mathrm{A}};$$

folglich:

20)

$$\cot\tfrac{1}{2}\{(A-B)-(\varphi_a+\varphi_b)\}=-\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{\mathrm{A}+\mathrm{B}}\tang\tfrac{1}{2}\{C+(\varphi_a-\varphi_b)\},$$

$$\tang\tfrac{1}{2}\{A-(\varphi_b+\varphi_c)\}=\frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{\mathrm{B}+\mathrm{C}}\tang\tfrac{1}{2}\{A+(\varphi_b-\varphi_c)\},$$

$$\tang\tfrac{1}{2}\{B+(\varphi_c+\varphi_a)\}=-\frac{\mathrm{C}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}+\mathrm{A}}\tang\tfrac{1}{2}\{B+(\varphi_c-\varphi_a)\}.$$

Wir wollen bloss zeigen, wie man sich bei dem Gebrauch **einer** dieser drei Gleichungen, etwa der Gleichung

$$\tang\tfrac{1}{2}\{A+(\varphi_b+\varphi_c)\}=\frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{\mathrm{B}+\mathrm{C}}\tang\tfrac{1}{2}\{A+(\varphi_b-\varphi_c)\},$$

zu verhalten hat, da für die anderen Gleichungen etwas ganz Aehnliches gilt.

Sei demnach μ ein dieser Gleichung genügender Werth von $\frac{1}{2}\{A-(\varphi_b+\varphi_c)\}$, den man etwa zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ nehmen kann; dann ist also:

$$\tang\tfrac{1}{2}\{A-(\varphi_b+\varphi_c)\}=\tang\mu,$$

und folglich bekanntlich, wenn n eine positive oder negative ganze Zahl bezeichnet:

$$\tfrac{1}{2}\{A-(\varphi_b+\varphi_c)\}=\mu+n\pi,$$

woraus

$$\tfrac{1}{2}(\varphi_b+\varphi_c)=\tfrac{1}{2}A-\mu-n\pi$$

folgt. Weil nun $\frac{1}{2}(\varphi_b+\varphi_c)$ immer zwischen 0 und 2π liegt, so ist:

$$0<\tfrac{1}{2}A-\mu-n\pi<2\pi,$$

also:

$$-2\pi<n\pi-\tfrac{1}{2}A+\mu<0,$$

und folglich:

$$\tfrac{1}{2}A-\mu-2\pi<n\pi<\tfrac{1}{2}A-\mu,$$

also:

$$\frac{\frac{1}{2}A-\mu}{\pi}-2<n<\frac{\frac{1}{2}A-\mu}{\pi},$$

oder:

$$\frac{A-2\mu}{2\pi}-2<n<\frac{A-2\mu}{2\pi}.$$

Weil

$$\frac{A-2\mu}{2\pi}-\left(\frac{A-2\mu}{2\pi}-2\right)=2$$

ist, so kann n nur zwei um die Einheit verschiedene Werthe haben, welche mittelst des Vorhergehenden immer bestimmt werden können, und durch k, $k+1$ bezeichnet werden sollen. Daher hat man nach dem Obigen:

$$\tfrac{1}{2}(\varphi_b+\varphi_c)=\begin{cases}\tfrac{1}{2}A-\mu-k\pi\\ \tfrac{1}{2}A-\mu-(k+1)\pi\end{cases}$$

und folglich:

$$\varphi_b=\begin{cases}\tfrac{1}{2}A-\mu+\tfrac{1}{2}(\varphi_b-\varphi_c)-k\pi\\ \tfrac{1}{2}A-\mu+\tfrac{1}{2}(\varphi_b-\varphi_c)-(k+1)\pi,\end{cases}$$

$$\varphi_c=\begin{cases}\tfrac{1}{2}A-\mu-\tfrac{1}{2}(\varphi_b-\varphi_c)-k\pi\\ \tfrac{1}{2}A-\mu-\tfrac{1}{2}(\varphi_b-\varphi_c)-(k+1)\pi.\end{cases}$$

Die Sinus der beiden vorstehenden Werthe von φ_b haben offenbar entgegengesetzte Vorzeichen; weil aber nach 5):

$$\sin\varphi_b=\frac{r_a}{2R}C$$

ist, folglich $\sin\varphi_b$ mit C einerlei Vorzeichen hat, man also das Vorzeichen von $\sin\varphi_b$ kennt, so lässt sich offenbar immer ganz sicher entscheiden, ob man

$$\varphi_b = \tfrac{1}{2}A - \mu + \tfrac{1}{2}(\varphi_b - \varphi_c) - k\pi,$$

$$\varphi_c = \tfrac{1}{2}A - \mu - \tfrac{1}{2}(\varphi_b - \varphi_c) - k\pi$$

oder:

$$\varphi_b = \tfrac{1}{2}A - \mu + \tfrac{1}{2}(\varphi_b - \varphi_c) - (k+1)\pi,$$

$$\varphi_c = \tfrac{1}{2}A - \mu - \tfrac{1}{2}(\varphi_b - \varphi_c) - (k+1)\pi$$

zu setzen hat, weshalb also bei diesen Bestimmungen nie eine Zweideutigkeit bleiben kann.

X.

Der excentrische Kreis für die Hyperbel.

Von

Herrn *C. Struve*,

ordentlichem Lehrer an der königl. Realschule in Fraustadt.

In Salmon's Conic Sections (3. Aufl. S. 200; Fiedler's Uebers. S. 257) ist als Analogon des excentrischen Winkels für die Hyperbel der Winkel bezeichnet, den man durch die Substitution

$$x = a\sec\varphi, \quad y = b\tang\varphi$$

erhält. Die Wahl ist eine glückliche, da man in mehreren wichtigen Fällen ziemlich einfache Ausdrücke dadurch erhält, wie im Folgenden gezeigt werden soll.

Aufgabe 1. Die Secante durch die beiden Punkte α und β (d. h. die beiden Punkte, für welche der Werth von φ α resp. β ist) zu finden.

Auflösung. Die Gleichung der Geraden durch die beiden Punkte $(x'\, y')$, (x'', y'') ist:

$$(y-y')(x''-x') = (x-x')(y''-y');$$

demnach:

$$\frac{y}{b}[\sec\beta - \sec\alpha - \tan\alpha(\sec\beta - \sec\alpha)]$$

$$= \frac{x}{a}[\tan\beta - \tan\alpha - \sec\alpha(\tan\beta - \tan\alpha)],$$

oder nach Einführung der halben Winkel, nach einigen Transformationen und der Multiplication der Gleichung mit $\frac{\cos\alpha\cos\beta}{2\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}$:

$$\frac{x}{a}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \frac{y}{b}\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Das Resultat ist eben so einfach, wie das entsprechende für die Ellipse. Setzt man $\alpha = \beta = \varphi$, so erhält man die Gleichung der Hyperbeltangente im Punkte φ:

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\sin\varphi = \cos\varphi.$$

Von dieser Gleichung lassen sich leicht einige geometrische Anwendungen machen. Der Durchschnitt der Abscissenaxe mit der Tangente ist nämlich $x = a\cos\varphi$, d. h. nur abhängig von der Hauptaxe und der Abscisse des betreffenden Punktes; d. h.: Alle Tangenten an Hyperbeln mit denselben Scheitelpunkten und von *demselben* Punkt der Hauptaxe aus treffen die Curven in *Punkten*, welche gleiche Abscissen haben. Die in den Conic Sections erwähnte geometrische Bedeutung von φ führt ausser zu einer einfachen Construction der Tangente bei gegebenem Berührungspunkte noch auf die Lösung folgender Aufgaben hin.

1) Von einer Hyperbel (Taf. II. Fig. 8.) sind die Scheitelpunkte A, B und eine Tangente CD gegeben: den Berührungspunkt von CD zu construiren. — Ich schlage einen Kreis über AB als Durchmesser, errichte in C ein Loth CE, ziehe in E eine Tangente an den Kreis und errichte in den Schnittpunkt mit AB ein Loth FG, dessen Schnittpunkt mit CD, G, der gesuchte Berührungspunkt ist.

2) Gegeben dasselbe, die kleine Axe zu construiren. — Für den Schnittpunkt der Ordinatenaxe mit der Tangente folgt $-\frac{y}{b} = \cot\varphi$ oder $b = -y\tan\varphi$, was sich leicht construiren lässt.

Aufgabe 2. Den Inhalt des Dreiecks zu bestimmen zwischen den drei Hyperbelpunkten α, β, γ.

Auflösung. In rechtwinkligen Coordinaten ist:

$$\pm 2J = x'''y'' - x''y''' + x'y''' - x'''y' + x''y' - x'y'',$$

wenn die drei Eckpunkte (x', y'), (x'', y''), (x''', y''') sind. Da nun

$$x' = a\sec\alpha, \quad x'' = a\sec\beta, \quad x''' = a\sec\gamma;$$

$$y' = b\tan\alpha, \quad y'' = b\tan\beta, \quad y''' = b\tan\gamma;$$

so ist der gesuchte Inhalt (indem wir das Zeichen — beibehalten):

$$2J = \frac{ab}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\beta-\gamma) + \sin(\gamma-\alpha))$$

oder mit theilweiser Einführung der halben Winkel, in derselben Weise, wie Aufgabe 5. S. 199 bei Salmon (Fiedler's Uebers. S. 255):

$$J = \frac{2ab\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

Aufgabe 3. Die Coordinaten p und q für den Mittelpunkt des Kreises zu finden, der durch die drei Punkte α, β, γ geht.

Auflösung. Für den Kreis durch die drei Punkte (x', y'), (x'', y''), (x''', y''') hat man, wenn r der Radius des Kreises:

$$x'^2 + y'^2 = 2px' + 2qy' + r^2 - p^2 - q^2,$$

$$x''^2 + y''^2 = 2px'' + 2qy'' + r^2 - p^2 - q^2,$$

$$x'''^2 + y'''^2 = 2px''' + 2qy''' + r^2 - p^2 - q^2;$$

oder nach Ersetzung der rechtwinkligen Coordinaten durch α, β, γ:

$$\frac{a^2 + b^2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{2pa + 2qb\sin\alpha}{\cos\alpha} + r^2 - p^2 - q^2$$

und noch zwei andere Gleichungen, in denen für α, β, resp. γ steht. Durch Subtraction der ersten und zweiten und der ersten und dritten erhält man nach einigen Transformationen:

$$a^2(\cos^2\beta - \cos^2\alpha) + b^2\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$$

$$= 2pa\cos\alpha\cos\beta(\cos\beta - \cos\alpha) + 2qb\cos\alpha\cos\beta\sin(\alpha-\beta),$$

$$a^2(\cos^2\gamma - \cos^2\alpha) + b^2\sin(\alpha+\gamma)\sin(\alpha-\gamma)$$

$$= 2pa\cos\alpha\cos\gamma(\cos\gamma - \cos\alpha) + 2qb\cos\alpha\cos\gamma\sin(\alpha-\gamma).$$

Nach Division mit dem Coeffizienten von p und theilweiser Einführung der halben Winkel erhält man:

$$(a^2+b^2).\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{2\cos\alpha\cos\beta}=pa+qb\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)},$$

$$(a^2+b^2).\frac{\cos\alpha+\cos\gamma}{2\cos\alpha\cos\gamma}=pa+qb\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)}.$$

Durch Subtraction dieser Gleichungen erhält man für q den Werth:

$$q=-\frac{a^2+b^2}{b}.\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\sin\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma},$$

woraus dann mit Benutzung einer der anfänglichen Gleichungen für p folgt:

$$p=\frac{a^2+b^2}{a}.\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\cos\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

Zur Prüfung der Richtigkeit der Rechnung kann Folgendes dienen. Ist $\alpha=\beta=\gamma=\varphi$, so sind p und q die Coordinaten des Krümmungscentrums für den Punkt φ; in diesem Falle ist:

$$p=\frac{a^2+b^2}{a}.\sec^3\varphi,$$

$$q=-\frac{a^2+b^2}{b}.\tan^3\varphi.$$

Die Elimination von φ zwischen diesen beiden Gleichungen liefert die bekannte Evolutengleichung der Hyperbel; nämlich:

$$\left(\frac{ap}{a^2+b^2}\right)^{\frac{2}{3}}=\sec^2\varphi,\quad\left(\frac{bq}{a^2+b^2}\right)^{\frac{2}{3}}=\tan^2\varphi;$$

folglich:

$$\left(\frac{ap}{a^2+b^2}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{bq}{a^2+b^2}\right)^{\frac{2}{3}}=1.$$

XI.

Analytisch-geometrische Parallelen.

Von

Herrn *M. Dietrich*,

Professor am Realgymnasium in Regensburg.

Einleitung.

Wenn man von irgend einem Punkte im Raum nach allen Punkten eines gegebenen Systems von Punkten Gerade zieht und senkrecht zu diesen Geraden Ebenen legt, deren Abstände von jenem willkürlich angenommenen Punkte bei beliebig gewählter Einheit die Reciproken der Abstände der Punkte des Systems von demselben Punkte sind; oder wenn man von einem beliebigen Punkte zu allen Ebenen eines gegebenen Ebenensystems Senkrechte zieht und auf diesen letzteren Punkte annimmt, deren Abstände von jenem willkürlichen Punkte die reciproken der Abstände der Ebenen von demselben sind, — so bestehen für die beiden Systeme von Punkten und Ebenen, welche man nach ihrer Erzeugung auseinander **reciproke Systeme** und den Punkt, bezüglich welchen dieselben reciprok sind, den **Mittelpunkt ihrer Reciprocität** nennen kann, folgende auf Elementar-Sätzen der Geometrie beruhende Beziehungen: **Die Verbindungslinie irgend zweier Punkte des einen Systems ist der Schnittlinie der entsprechenden Ebenen des andern Systems reciprok, d. h. die beiden Geraden sind senkrecht zu einander und die vom Reciprocitäts-Mittelpunkt an die eine von beiden gezogene Senkrechte schneidet auch die andere rechtwinklig und beide in Abständen von jenem Punkte, die einander reciprok sind. Die**

Ebene irgend dreier Punkte des einen Systems ist dem Schnittpunkte der entsprechenden Ebenen des andern reciprok, d. h. die vom Mittelpunkt nach jener Ebene gezogene Senkrechte geht durch den Schnittpunkt der andern Ebenen und es sind die Abstände beider vom Mittelpunkte einander reciprok. Liegen drei oder mehrere Punkte des einen Systems in einer Geraden oder in einer Ebene, so gehen die entsprechenden Ebenen des andern Systems durch die reciproke Gerade oder den reciproken Punkt; überdiess ist das Doppelverhältniss von irgend 4 Punkten einer Geraden dem Doppelverhältnisse der entsprechenden Ebenen des reciproken Ebenenbüschels gleich.

Diese Beziehungen erlauben ganze Klassen von Eigenschaften eines gegebenen Systems von Punkten oder Ebenen auf das reciproke System überzutragen, so dass gleichsam mit einer Theorie des einen Systems zugleich auch eine solche für das andere gegeben ist. So erhält man z. B., da, wie leicht einzusehen, der ebenen Kurve ein Kegel reciprok ist, dessen Spitze der der Ebene jener Kurve reciproke Punkt ist, aus dem Pascal'schen Satz von dem einer Kurve zweiten Grades eingeschriebenen Sechseck sogleich als reciproken Satz: „Wenn man an einen Kegel zweiten Grades irgend sechs Berührungsebenen legt, wodurch auch von der einen zur andern sechs Schnittlinien entstehen, so schneiden sich die drei Ebenen, welche durch die erste und vierte, die zweite und fünfte, die dritte und sechste dieser Schnittlinien gehen, in einer durch die Kegelspitze gehenden Geraden." Der bekannte Satz von Brianchon ist dann eine Folge dieser Eigenschaft.

Legt man ferner durch den Mittelpunkt zweier reciproken Systeme irgend drei zu einander senkrechte Ebenen als Coordinatentafeln und nimmt als Coordinaten eines Punktes dessen Abstände von diesen Tafeln, und als Coordinaten einer Ebene die reciproken Abstände ihrer Schnittpunkte mit den Coordinatenaxen vom Coordinatenanfang, so sind die Coordinaten eines Punktes und die der reciproken Ebene, die Gleichungen einer Geraden und die des reciproken Ebenenbüschels, die Gleichung eines Systems von Punkten und die des reciproken Ebenensystems beziehungsweise dieselben, so dass der analytische Ausdruck irgend einer Beziehung zwischen Theilen des einen von zwei reciproken Systemen auch eine entsprechende

Beziehung der reciproken Theile des andern Systems darstellt.

Man erkennt auch leicht, dass zwei reciproke Systeme zu einander polar sind bezüglich einer mit ihnen concentrischen Kugel, deren Halbmesser die Längeneinheit ist. Es lässt sich daher die Construktion dieser beiden Systeme als besonderer Fall der Bildung zweier Systeme von Punkten und Ebenen mittelst einer Oberfläche zweiter Ordnung betrachten, bezüglich welcher jene einander polar sind. Bei zwei solchen mittelst einer beliebigen Oberfläche zweiten Grades erzeugten Systemen besteht dasselbe Entsprechen von Punkten und Ebenen, von Geraden und Ebenenbüscheln, wie bei zwei reciproken Systemen, dagegen fehlt bei ihnen die bei letzteren statthabende Reciprocität der Richtungen und Abstände entsprechender Theile.

Die nachfolgenden Blätter haben nun die Bestimmung, die geometrische Thatsache des oben angegebenen Zusammenhanges eines gegebenen Systems von Punkten oder Ebenen mit unendlich vielen durch Reciprocität ihm zugeordneten Systemen von Ebenen oder Punkten durch eine getrennte Betrachtung des Punktes und der Ebene und eine nebeneinander gehende analytische Darstellung einiger wichtiger Eigenschaften von Punkt- und Ebenensystemen in möglichster Kürze zu bestätigen.*)

A. Der Punkt und die Ebene.

Wählt man als Coordinatenbasis drei gegen einander rechtwinkelige Ebenen, deren gleichfalls zu einander senkrechte Schnittlinien die Coordinatenaxen und deren Schnittpunkt der Coordinatenanfang heissen, so versteht man unter den Coordinaten x, y, z eines Punktes p dessen Abstände von den Coordinatenebenen. Für diese Coordinaten und den Abstand d desselben Punktes vom Coordi-

Wählt man als Caordinatenbasis drei gegen einander rechtwinkelige Ebenen, deren gleichfalls zu einander senkrechte Schnittlinien die Coordinatenaxen und deren Schnittpunkt der Coordinatenanfang heissen, so versteht man unter den Coordinaten x, y, z einer Ebene E die reciproken Werthe der Abstände ihrer Schnittpunkte mit den Coordinatenaxen vom Coordinatenanfang. Für diese Coor-

*) Eine eingehendere Betrachtung der Punkt-Systeme oder Flächen höherer Ordnung findet man in meiner in der Zeitschrift für Mathematik und Physik, Jahrgang 1862 erschienenen Abhandlung.

natenanfang gelten die Beziehungen:

dinaten und den reciproken Abstand $\frac{1}{d}$ derselben Ebene vom Coordinatenanfang gelten die Beziehungen:

$d =$ $\qquad$ $\frac{1}{d} =$

$$(1) \quad \frac{x}{\cos(x, d)} = \frac{y}{\cos(y, d)} = \frac{z}{\cos(z, d)} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Ist eine der Coordinaten eines Punktes Null, so liegt derselbe in der betreffenden Coordinatenebene; sind alle drei Coordinaten Null, so fällt er in den Coordinatenanfang. Ist dagegen eine der Coordinaten unendlich gross, so liegt der Punkt unendlich fern.

Ist eine der Coordinaten einer Ebene Null, so ist dieselbe zur betreffenden Coordinatenaxe parallel; sind alle drei Coordinaten Null, so liegt sie unendlich fern. Ist dagegen eine der Coordinaten einer Ebene unendlich gross, so geht sie durch den Coordinatenanfang.

Alle Punkte, welche eine ihrer Coordinaten gleich haben, liegen in einer Ebene, welche in dem durch diese Coordinate gegebenen Abstand der betreffenden Coordinatenebene parallel ist.

Alle Ebenen, welche eine ihrer Coordinaten gleich haben, gehen durch einen Punkt, welcher in dem durch diese Coordinate gegebenen Abstand vom Coordinatenanfang auf der betreffenden Coordinatenaxe liegt.

Alle Punkte, deren Coordinaten x, y, z durch die Gleichung:

Alle Ebenen, deren Coordinaten x, y, z durch die Gleichung:

$$(2) \qquad ax + by + cz - 1 = 0$$

verbunden sind, liegen in einer Ebene, deren Lage durch die Coefficienten a, b, c bestimmt ist. Man nennt daher obige Gleichung die **Gleichung der durch sie bestimmten Ebene**.

verbunden sind, gehen durch einen Punkt, dessen Lage durch die Coefficienten a, b, c bestimmt ist. Man nennt daher obige Gleichung die **Gleichung des durch sie bestimmten Punktes**.

Die Gleichungen:

Die Gleichungen:

$$(3) \qquad \begin{cases} ax + by + cz - 1 = 0 \\ a'x + b'y + c'z - 1 = 0 \end{cases}$$

oder die aus ihrer Verbindung sich ergebenden:

oder die aus ihrer Verbindung sich ergebenden:

$$(4)\quad \begin{cases} x = \dfrac{(bc'-b'c).z-(b-b')}{ab'-a'b}, \\ y = \dfrac{(ca'-c'a).z+(a-a')}{ab'-a'b}, \end{cases}$$

gelten für alle Punkte, welche in den beiden durch die Gleichungen (3) einzeln ausgedrückten Ebenen zugleich, also in der Schnittlinie dieser Ebenen liegen. Die Gesammtheit jener Punkte kann man eine gerade Punktfolge, die sie enthaltende Gerade die Gerade der Punktfolge nennen. Für irgend zwei Punkte p und p' dieser Punktfolge geben die Gleichungen (4)

gelten für alle Ebenen, welche durch die beiden durch die Gleichungen (3) einzeln ausgedrückten Punkte zugleich, also auch durch deren Verbindungsgerade gehen. Die Gesammtheit jener Ebenen nennt man ein Ebenenbüschel, die ihnen gemeinschaftliche Gerade die Axe des Büschels. Für irgend zwei Ebenen E und E' dieses Ebenenbüschels geben die Gleichungen (4)

$$(5)\quad \frac{x-x'}{bc'-b'c} = \frac{y-y'}{ca'-c'a} = \frac{z-z'}{ab'-a'b}$$

$$= \frac{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}{\sqrt{(bc'-b'c)^2+(ca'-c'a)^2+(ab'-a'b)^2}}.$$

Nun sind einerseits die Quotienten:

Nun sind einerseits die Quotienten:

$$\frac{bc'-b'c}{\sqrt{(bc'-b'c)^2+(ca'-c'a)^2+(ab'-a'b)^2}} = \alpha, \ldots.$$

den Cosinus der Winkel gleich, die eine den beiden durch die Gleichungen (3) gegebenen Ebenen zugleich, also auch deren Schnittlinie parallele Gerade, oder jene, die Gerade der Punktfolge, selbst mit den Axen macht; anderseits findet man, dass der Ausdruck

den Cosinus der Winkel gleich, die eine zu den Verbindungslinien der beiden durch die Gleichungen (3) gegebenen Punkte mit dem Coordinatenanfang zugleich, also auch zu deren Ebene, wie zur Büschelaxe senkrechte Gerade mit den Axen macht; anderseits findet man, dass der Ausdruck:

$$\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2} = \varrho$$

den Abstand pp' der beiden Punkte p und p' darstellt.* Hiedurch erscheint die Beziehung (5) in der Gestalt:

gleich ist dem Abstand der Fusspunkte der vom Coordinatenanfang auf die Ebenen E und E' gefällten Lothe, getheilt durch das Produkt letzterer, und in der Form

$$\frac{1}{\delta}\cdot\frac{\sin(E, E')}{\sin(E, \delta).\sin(E', \delta)}$$
$$= \frac{1}{\delta}\cdot\left(\frac{1}{\operatorname{tg}(E', \delta)} - \frac{1}{\operatorname{tg}(E, \delta)}\right)$$

dargestellt werden kann, wo δ den Abstand der Büschelaxe vom Coordinatenanfang bezeichnet. Hiedurch tritt die Beziehung (5) in die Form:

$$(6) \qquad \frac{x-x'}{\alpha} = \frac{y-y'}{\beta} = \frac{z-z'}{\gamma} = \varrho$$

wo die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \varrho$ die eben gegebene Bedeutung haben. Da durch die in dieser Beziehung enthaltenen Gleichungen offenbar auch eine Verbindung zwischen einem beliebigen Punkt p, der durch den festen Punkt p' und die Richtung (α, β, γ) gegebenen Geraden und diesen Bestimmungsstücken hergestellt ist, so nennt man sie die Gleichungen dieser Geraden. Nimmt man zur Bestimmung einer Geraden zwei Punkte p' und p'' an, durch die dieselbe gehen soll, so findet man aus (6) für irgend einen andern Punkt p dieser Geraden:

wo die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \varrho$ die eben gegebene Bedeutung haben. Da durch die Gleichungen, in welche diese Beziehung zerfällt, offenbar auch eine Verbindung zwischen einer beliebigen Ebene E des durch die feste Ebene E' und die Richtung (α, β, γ) der Büschelnormalen, wie eine Normale der durch den Coordinatenanfang gehenden Ebene des Büschels heissen mag, bestimmten Ebenenbüschels und diesen Bestimmungsstücken hergestellt ist, so nennt man sie die Gleichungen dieses Ebenenbüschels. Wählt man zur Bestimmung eines Ebenenbüschels zwei Ebenen E' und E'', welche dasselbe enthalten soll, so gibt (6) für irgend eine andere Ebene E dieses Büschels:

$$(7) \qquad \frac{x-x'}{x-x''} = \frac{y-y'}{y-y''} = \frac{z-z'}{z-z''} = \frac{\varrho}{\varrho_1},$$

wo hier

$$\frac{\varrho}{\varrho_1} = \frac{pp'}{pp''} = \frac{pp'}{pp''} : \frac{Pp'}{Pp''},$$

d. i. dem Doppelverhältniss des Punktes p und des unendlich fernen Punktes P der Geraden zu den gegebenen Punkten p' und p'' gleich ist.

Zu zwei gegebenen Punkten p_1 und p_2 einer Geraden lassen sich die übrigen Punkte in lauter Paare abordnen, deren Abstände von den gegebenen Punkten gleiches Verhältniss haben, wobei immer der eine $\mathfrak{p}$ ausserhalb, der andere $\mathfrak{p}'$ zwischen den Punkten p_1 und p_2 liegt. Zwei derartig zusammenhängende Punkte nennt man **einander bezüglich der Punkte p_1 und p_2 harmonisch zugeordnet.** Aus der solche Punkte verbindenden Gleichung

$$\frac{\mathfrak{p}p_1}{\mathfrak{p}p_2} = \frac{p_1\mathfrak{p}'}{\mathfrak{p}'p_2} = -\frac{\mathfrak{p}'p_1}{\mathfrak{p}'p_2}$$

folgt alsbald

$$\frac{\mathfrak{p}'p_1}{\mathfrak{p}p_1} + \frac{\mathfrak{p}'p_2}{\mathfrak{p}p_2} = 0,$$

wofür auch wegen

$$\mathfrak{p}'p = \mathfrak{p}p - \mathfrak{p}p'$$

geschrieben werden kann:

$$\frac{1}{\mathfrak{p}\mathfrak{p}'} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathfrak{p}p_1} + \frac{1}{\mathfrak{p}p_2}\right).$$

wo hier

$$\frac{\varrho}{\varrho_1} = \frac{\sin(E, E')}{\sin(E, E'')} : \frac{\sin(E', \delta)}{\sin(E'', \delta)},$$

d. i. dem Doppelverhältniss der Ebene E und der durch den Coordinaten-Anfang gehenden Ebene des Büschels zu den gegebenen Ebenen E' und E'' gleich ist.

Zu zwei gegebenen Ebenen E_1 und E_2 eines Ebenenbüschels ordnen sich die übrigen Ebenen in lauter Paare ab, deren durch die Neigungssinus gemessenen Abstände von den gegebenen Ebenen gleiches Verhältniss haben, wobei immer die eine Ebene $\mathfrak{E}$ ausserhalb, die andere $\mathfrak{E}'$ zwischen den Ebenen E_1 und E_2 liegt. Zwei derartig verbundene Ebenen heissen **einander bezüglich der Ebenen E_1 und E_2 harmonisch zugeordnet.** Aus der für solche Ebenen bestehenden Gleichung

$$\frac{\sin(\mathfrak{E}, E_1)}{\sin(\mathfrak{E}, E_2)} = \frac{\sin(E_1, \mathfrak{E}')}{\sin(\mathfrak{E}', E_2)} = -\frac{\sin(\mathfrak{E}', E_1)}{\sin(\mathfrak{E}', E_2)}$$

folgt alsbald

$$\frac{\sin(\mathfrak{E}', E_1)}{\sin(\mathfrak{E}, E_1)} + \frac{\sin(\mathfrak{E}', E_2)}{\sin(\mathfrak{E}, E_2)} = 0,$$

wofür auch wegen

$$\angle(\mathfrak{E}', E) = \angle(\mathfrak{E}, E) - \angle(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}')$$

sich schreiben lässt:

$$\frac{1}{\operatorname{tg}(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}')} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}(\mathfrak{E}, E_1)} + \frac{1}{\operatorname{tg}(\mathfrak{E}, E_2)}\right).$$

Beide Gleichungsformen geben bei mehreren Punkten $p_1, p_2, \ldots, p_n$, wo obige Definition harmonisch zugeordneter Punkte offenbar nicht mehr angewendet werden kann, sofort:

$$\frac{\mathfrak{p}'p_1}{\mathfrak{p}p_1} + \frac{\mathfrak{p}'p_2}{\mathfrak{p}p_2} + \ldots + \frac{\mathfrak{p}'p_n}{\mathfrak{p}p_n} = 0$$

oder identisch mit dieser:

$$\frac{1}{\mathfrak{p}\mathfrak{p}'} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\mathfrak{p}p_1} + \frac{1}{\mathfrak{p}p_2} + \ldots + \frac{1}{\mathfrak{p}p_n}\right),$$

wegen welcher Gleichung der Punkt $\mathfrak{p}'$ auch der harmonisch Mittlere der Punkte $p_1, p_2, \ldots, p_n$ bezüglich des Punktes $\mathfrak{p}$ genannt werden kann. Aus diesen Gleichungen folgt, wenn ϱ die vor (6) angegebene Bedeutung für die Punkte $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$, ϱ_x für $\mathfrak{p}$ und p_x, ϱ_x' für $\mathfrak{p}'$ und p_x hat,

Beide Gleichungsformen geben bei mehreren Ebenen $E_1, E_2, \ldots, E_n$, wo obige Definition harmonisch zugeordneter Ebenen offenbar nicht mehr ausreicht, sofort:

$$\frac{\sin(\mathfrak{E}', E_1)}{\sin(\mathfrak{E}, E_1)} + \frac{\sin(\mathfrak{E}', E_2)}{\sin(\mathfrak{E}, E_2)} + \ldots + \frac{\sin(\mathfrak{E}', E_n)}{\sin(\mathfrak{E}, E_n)} = 0$$

oder hiemit identisch:

$$\frac{1}{\operatorname{tg}(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}')} = \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{\operatorname{tg}(\mathfrak{E}, E_1)} + \frac{1}{\operatorname{tg}(\mathfrak{E}, E_2)} + \ldots + \frac{1}{\operatorname{tg}(\mathfrak{E}, E_n)}\right),$$

wegen welcher Gleichung die Ebene $\mathfrak{E}'$ auch die harmonisch Mittlere der Ebenen $E_1, E_2, \ldots, E_n$ bezüglich der Ebene $\mathfrak{E}$ genannt werden kann. Aus diesen Gleichungen folgt, wenn ϱ die vor (6) angegebene Bedeutung für die Ebenen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$, ϱ_x für $\mathfrak{E}$ und E_x, ϱ_x' für $\mathfrak{E}'$ und E_x hat,

$$(8) \qquad \frac{\varrho_1'}{\varrho_1} + \frac{\varrho_2'}{\varrho_2} + \ldots + \frac{\varrho_n'}{\varrho_n} = 0,$$

und — und

$$(9) \qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \ldots + \frac{1}{\varrho_n}\right),$$

und hiemit für die Coordinaten harmonisch zugeordneter Punkte — und hiemit für die Coordinaten harmonisch zugeordneter Ebenen

$$\frac{\mathfrak{x}' - x_1}{\mathfrak{x} - x_1} + \frac{\mathfrak{x}' - x_2}{\mathfrak{x} - x_2} + \ldots + \frac{\mathfrak{x}' - x_n}{\mathfrak{x} - x_n} = 0, \ldots$$

oder

$$\frac{1}{\mathfrak{x} - \mathfrak{x}'} = \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{\mathfrak{x} - x_1} + \frac{1}{\mathfrak{x} - x_2} + \ldots + \frac{1}{\mathfrak{x} - x_n}\right), \ldots$$

Da letztere Gleichungen die Coordinaten von $\mathfrak{p}'$ im ersten, die des Punktes $\mathfrak{p}$ aber im $(n-1)$ten Grade enthalten, so lässt sich leicht schliessen, dass während einem Punkt $\mathfrak{p}$ nur ein einziger als harmonisch Mittlerer von mehreren (n) gegebenen derselben Geraden entspricht, ein Punkt $\mathfrak{p}'$ harmonisch Mittlerer der gegebenen Punkte bezüglich $n-1$ anderer sein kann.

Da letztere Gleichungen die Coordinaten von $\mathfrak{E}'$ im ersten, die der Ebene $\mathfrak{E}$ aber im $(n-1)$ten Grade enthalten, so lässt sich leicht schliessen, dass während einer Ebene $\mathfrak{E}$ nur eine einzige als harmonisch Mittlere von mehreren (n) gegebenen desselben Büschels entspricht, eine Ebene $\mathfrak{E}'$ harmonisch Mittlere der gegebenen Ebenen bezüglich $n-1$ anderer sein kann.

B. Die algebraische Fläche, bestimmt durch das Gesetz ihrer Punkte und Berührungsebenen.

I.

Wie die Gleichung des ersten Grades zwischen den drei Coordinaten eines Punktes allen Punkten gemein ist, welche in derselben durch die Coefficienten der Gleichung bestimmten Ebene sich befinden, so wird durch eine Gleichung höheren, etwa $n$ten Grades zwischen drei Punktcoordinaten eine Fläche bestimmt, auf welcher alle Punkte liegen, deren Coordinaten jener Gleichung genügen, und welche nach dem Grade der Gleichung eine Fläche $n$ter Ordnung genannt wird. Die Gleichung selbst heisst die Gleichung dieser Fläche. Sei nun als Gleichung einer Fläche $n$ter Ordnung:

Wie die Gleichung des ersten Grades zwischen den drei Coordinaten einer Ebene allen Ebenen gemein ist, welche durch denselben durch die Coefficienten der Gleichung bestimmten Punkt gehen, so wird durch eine Gleichung höheren, etwa $n$ten Grades zwischen drei Ebenencoordinaten eine Fläche bestimmt, welche von allen Ebenen umhüllt oder berührt wird, deren Coordinaten jener Gleichung genügen, und welche nach dem Grade der Gleichung eine Fläche $n$ter Klasse genannt wird; die Gleichung selbst heisst die Gleichung dieser Fläche. Sei nun als Gleichung einer Fläche $n$ter Klasse:

$$10)\quad f(x, y, z) = f_n(x, y, z) + f_{n-1} + f_{n-2} + \ldots + f_1 + f_0 = 0$$

gegeben, wo die Funktionen f_n, f_{n-1}, f_{n-2}, ... bezüglich der Coordinaten x, y, z homogen und von den Graden $n, n-1, n-2, \ldots$ sind, und seien

gegeben, wo die Funktionen f_n, f_{n-1}, f_{n-2} ... bezüglich der Coordinaten x, y, z homogen und von den Graden $n, n-1, n-2, \ldots$ sind, und seien

$$(11)\qquad \frac{\mathfrak{x}-x}{\alpha}=\frac{\mathfrak{y}-y}{\beta}=\frac{\mathfrak{z}-z}{\gamma}=\varrho$$

die Gleichungen einer Geraden, welche durch den festen Punkt $\mathfrak{p}$ oder $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ geht und gegen die Coordinatenaxen Winkel macht, deren Cosinus durch die Zahlen α, β, γ ausgedrückt sind; ϱ ist dann der Abstand $\mathfrak{p}p$ des festen Punktes $\mathfrak{p}$ von einem andern Punkte p oder (x, y, z) der Geraden, $\mathfrak{p}$ in der Richtung der Geraden vor p liegend angenommen. Für die Punkte, welche diese Gerade mit der Fläche (10) gemein hat, also für die Schnittpunkte der Geraden mit der Fläche, für welche die Gleichungen (10) und (11) zusammen bestehen, erhält man durch Einsetzen der aus (11) gezogenen Werthausdrücke:

die Gleichungen eines Ebenenbüschels, welches die feste Ebene $\mathfrak{E}$ oder $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ enthält und dessen Normale gegen die Axen Winkel macht, deren Cosinus durch die Zahlen α, β, γ ausgedrückt sind; ϱ hat dann den Werth

$$\frac{1}{\delta}\cdot\frac{\sin(\mathfrak{E}, E)}{\sin(\mathfrak{E}, \delta).\sin(E, \delta)},$$

die Ebene $\mathfrak{E}$ des Büschels in der Richtung jener Normalen oberhalb der andern Büschelebene E angenommen, während δ den Abstand der Schnittlinie beider Ebenen, also der Büschelaxe vom Coordinatenanfang bedeutet. Für die Ebenen, welche dieses Büschel mit der Fläche (10) gemein hat, also für die durch die Büschelaxe gehenden Berührungsebenen der Fläche, für welche die Gleichungen (10) und (11) zusammenbestehen, erhält man durch Einsetzen der aus (11) gezogenen Werthe:

$$x=\mathfrak{x}-\alpha\varrho,\ y=\mathfrak{y}-\beta\varrho,\ z=\mathfrak{z}-\gamma\varrho$$

in die Gleichung (10):

in die Gleichung (10):

$$(12)\qquad f(x, y, z)=f(\mathfrak{x}-\alpha\varrho, \mathfrak{y}-\beta\varrho, \mathfrak{z}-\gamma\varrho)$$
$$=f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})-\varrho\cdot\left(\alpha\frac{d}{d\mathfrak{x}}+\beta\frac{d}{d\mathfrak{y}}+\gamma\frac{d}{d\mathfrak{z}}\right)f$$
$$+\frac{\varrho^2}{2!}\cdot\left(\alpha\frac{d}{d\mathfrak{x}}+\ldots\right)^2 f-\ldots\pm\frac{\varrho^n}{n!}\cdot\left(\alpha\frac{d}{d\mathfrak{x}}+\ldots\right)^n f=0.$$

wo für die Coefficienten der Potenzen von ϱ die Beziehungen bestehen:

wo für die Coefficienten der ve schiedenen Potenzen von ϱ d Beziehungen bestehen:

$$\frac{1}{n!}\cdot\left(\alpha\frac{d}{d\mathfrak{x}}+\beta\frac{d}{d\mathfrak{y}}+\gamma\frac{d}{d\mathfrak{z}}\right)^n f(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z}) = f_n(\alpha,\beta,\gamma),$$

$$\frac{1}{(n-1)!}\cdot\left(\alpha\frac{d}{d\mathfrak{x}}+\beta\frac{d}{d\mathfrak{y}}+\gamma\frac{d}{d\mathfrak{z}}\right)^{n-1} f(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z})$$

$$=\left(\mathfrak{x}\frac{d}{d\alpha}+\mathfrak{y}\frac{d}{d\beta}+\mathfrak{z}\frac{d}{d\gamma}\right)f_n(\alpha,\beta,\gamma)+f_{n-1}(\alpha,\beta,\gamma),$$

$$\frac{1}{(n-2)!}\cdot\left(\alpha\frac{d}{d\mathfrak{x}}+\ldots\right)^{n-2} f$$

$$\frac{1}{2!}\cdot\left(\mathfrak{x}\frac{d}{d\alpha}+\ldots\right)^2 f_n+\left(\mathfrak{x}\frac{d}{d\alpha}+\ldots\right)f_{n-1}+f_{n-2},$$

. . . . *)

---

*) Aus der für die homogene Funktion $k$ten Grades f_k bestehenden Identität:

$$f_k(a+\alpha\varrho,\ldots) = f_k(\alpha\varrho+a,\ldots)$$

folgt nämlich durch beiderseitige Entwicklung sofort:

$$f_k(a,\ldots)+\varrho\cdot\left(\alpha\frac{d}{da}+\ldots\right)f_k(a,\ldots)$$

$$+\frac{\varrho^2}{2!}\cdot\left(\alpha\frac{d}{da}+\ldots\right)^2 f_k(a,\ldots)+\ldots+\frac{\varrho^k}{k!}\cdot\left(\alpha\frac{d}{da}+\ldots\right)^k f_k(a,\ldots)$$

$$=\varrho^k\cdot f_k(\alpha,\ldots)+\varrho^{k-1}\cdot\left(a\frac{d}{d\alpha}+\ldots\right)f_k(\alpha,\ldots)$$

$$+\frac{\varrho^{k-2}}{2!}\cdot\left(a\frac{d}{d\alpha}+\ldots\right)^2 f_k(\alpha,\ldots)+\ldots+\frac{1}{k!}\cdot\left(a\frac{d}{d\alpha}+\ldots\right)^k f_k(\alpha,\ldots),$$

und dadurch für Coefficienten gleicher Potenzen von ϱ:

$$\frac{1}{i!}\cdot\left(\alpha\frac{d}{da}+\ldots\right)^i f_k(a,\ldots) = \frac{1}{(k-i)!}\cdot\left(a\frac{d}{d\alpha}+\ldots\right)^{k-i} f_k(\alpha,\ldots).$$

Folge hievon ist für $f=f_n+f_{n-1}+\ldots+f_1+f_0$ die Gleichung:

$$\frac{1}{i!}\cdot\left(\alpha\frac{d}{da}+\ldots\right)^i f(a,\ldots) = \frac{1}{(n-i)!}\cdot\left(a\frac{d}{d\alpha}+\ldots\right)^{n-i} f_n(\alpha,\ldots).$$

$$+\frac{1}{(n-i-1)!}\cdot\left(a\frac{d}{d\alpha}+\ldots\right)^{n-i-1} f_{n-1}(\alpha,\ldots)+\ldots+f_i(\alpha,\ldots)$$

welche der allgemeine Ausdruck obiger Beziehungen ist.

leichung (12) bezüg-
$n$ten Grade ist, also
ϱp durch sie n Lagen
s p als der Geraden
iche zugleich ange-
mmt sind, so zeigt
, dass eine Fläche
ung durch eine
n Allgemeinen in
hreren) Punkten,
e Ebene also nach
ve $n$ter Ordnung
en wird. Die ein-
Gleichung (12) ge-
Werthe von ϱ oder
der Schnittpunkte p
von den in den Coef-
ener Gleichung vor-
Zahlen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ und
i. von der Lage der
estimmten Geraden;
Beachtung verdienen
le, wo der erste oder
r ersten, der letzte
re der letzten Coef-
ir gewisse Werthe
$\mathfrak{z}$ und α, β, γ Null

Da die Gleichung (12) bezüglich ϱ vom $n$ten Grade ist, also wegen

$$\varrho = \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\sin(\mathfrak{E}, E)}{\sin(\mathfrak{E}, \delta) \cdot \sin(E, \delta)} = \frac{1}{\delta} \cdot \left(\frac{1}{\operatorname{tg}(E, \delta)} - \frac{1}{\operatorname{tg}(\mathfrak{E}, \delta)}\right)$$

durch sie n Lagen der Ebene E als dem Büschel und der Fläche zugleich angehörig bestimmt sind, so zeigt sich sogleich, dass eine Fläche $n$ter Klasse durch ein Ebenenbüschel mit n (nie mehreren) Ebenen, ein ebener Schnitt der Fläche in n Geraden berührt wird, letzterer also eine Kurve $n$ter Klasse ist. Die einzelnen der Gleichung (12) genügenden Werthe von ϱ oder die Lagen der Berührungsebenen E hängen ab von den in den Coefficienten jener Gleichung vorkommenden Zahlen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ und α, β, γ, d. i. von der Lage des hiedurch bestimmten Ebenenbüschels; besondere Beachtung verdienen hier die Fälle, wo der erste oder mehrere der ersten, der letzte oder mehrere der letzten Coefficienten für gewisse Werthe von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ und α, β, γ Null werden.

Der Fall

$$f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = 0$$

enn der feste Punkt $\mathfrak{p}$
iche selbst liegt: es
einer der Werthe von
, zu Null, wodurch
verschwindet, also ein
kt p_1 mit $\mathfrak{p}$ zusam-

tritt ein, wenn die feste Ebene $\mathfrak{E}$ selbst eine Berührungsebene der Fläche ist: es wird dann einer der Werthe von ϱ, etwa ϱ_1 zu Null, wodurch $\operatorname{tg}(E_1, \delta) = \operatorname{tg}(\mathfrak{E}, \delta)$ wird, also eine Be-

menfällt. Die übrigen Schnittpunkte, also die durch $\mathfrak{p}$ in der Richtung (α, β, γ) gehenden Sehnen der Fläche bestimmen sich aus der Gleichung:

rührungsebene E_1 mit $\mathfrak{E}$ zusammenfällt. Die übrigen zum Büschel gehörigen Berührungsebenen der Fläche bestimmen sich aus der Gleichung:

$$-\left(\alpha\frac{d}{d\mathfrak{x}}+\ldots\right)f(\mathfrak{x},\ldots)+\frac{\varrho}{2!}\cdot\left(\alpha\frac{d}{d\mathfrak{x}}+\ldots\right)^2 f(\mathfrak{x},\ldots)-\ldots$$
$$\ldots\pm\frac{\varrho^{n-1}}{n!}\cdot\left(\alpha\frac{d}{d\mathfrak{x}}+\ldots\right)^n f(\mathfrak{x},\ldots)=0.$$

Für diejenigen Werthe von α, β, γ, welche im gegebenen Falle auch noch die Gleichung

Für diejenigen Werthe von α, β, γ, welche im gegebenen Falle auch noch die Gleichung

$$(14)\qquad \left(\alpha\frac{d}{d\mathfrak{x}}+\beta\frac{d}{d\mathfrak{y}}+\gamma\frac{d}{d\mathfrak{z}}\right)f(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z})=0$$

erfüllen, rückt noch ein zweiter Schnittpunkt p_2 auf $\mathfrak{p}$ herein und die Gerade wird dann eine Tangente der Fläche in $\mathfrak{p}$. Da für irgend einen Punkt x, y, z dieser Geraden

erfüllen, fällt noch eine zweite Berührungsebene E_2 mit $\mathfrak{E}$ zusammen und die Büschelaxe selbst wird dann auch die Fläche berühren. Da für irgend eine Ebene x, y, z dieses Büschels

$$\frac{x-\mathfrak{x}}{\alpha}=\frac{y-\mathfrak{y}}{\beta}=\frac{z-\mathfrak{z}}{\gamma}$$

ist, wird obige Bedingung auch in der Form

ist, wird obige Bedingung auch in der Form

$$\left((x-\mathfrak{x})\frac{d}{d\mathfrak{x}}+(y-\mathfrak{y})\frac{d}{d\mathfrak{y}}+(z-\mathfrak{z})\frac{d}{d\mathfrak{z}}\right)f(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z})=0$$

geschrieben werden können, welche sich, da für $\varepsilon=1$

geschrieben werden können, welche sich, da für $\varepsilon=1$

$$f(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z})=f_n(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z})+\varepsilon f_{n-1}(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z})+\varepsilon^2 f_{n-2}+\ldots+\varepsilon^{n-1}.f_1+\varepsilon^n.f_0,$$

sonach homogen und dadurch

sonach homogen und dadurch

$$\left(\mathfrak{x}\frac{d}{d\mathfrak{x}}+\mathfrak{y}\frac{d}{d\mathfrak{y}}+\mathfrak{z}\frac{d}{d\mathfrak{z}}+\varepsilon\frac{d}{d\varepsilon}\right)f(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z},\varepsilon)=nf(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z},\varepsilon)=0$$

wird, vereinfacht in:

wird, vereinfacht in:

$$(15)\qquad \left(x\frac{d}{d\mathfrak{x}}+y\frac{d}{d\mathfrak{y}}+z\frac{d}{d\mathfrak{z}}+\varepsilon\frac{d}{d\varepsilon}\right)f(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z})=0.$$

Es ist diese Gleichung be-

Es ist diese Gleichung be-

züglich x, y, z vom ersten Grade **und zeigt** dadurch, dass alle **Geraden**, welche in dem Punkte $\mathfrak{p}$ **der Fläche** dieselbe berühren, **in einer** Ebene liegen, deren **Coordinaten** die Werthe

$$-\frac{df(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z})}{d\mathfrak{x}}:\frac{df(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z})}{d\varepsilon},$$

haben; diese Ebene heisst die **dem Punkte** $\mathfrak{p}$ entsprechende **Berührungsebene der Fläche.**

***Bei* besonderen** Flächengattungen jeder Ordnung gibt es einzelne Punkte, für welche mit der Gleichung (13) unabhängig von den Zahlen α, β, γ zugleich auch der Gleichung (14) Genüge geschieht. Sodann fallen in jeder Richtung der durchgehenden Geraden zwei Schnittpunkte zugleich mit $\mathfrak{p}$ zusammen und die Gerade wird erst eine Tangente der Fläche in $\mathfrak{p}$, wenn für gewisse Richtungen noch ein dritter Schnittpunkt auf $\mathfrak{p}$ hereinrückt, welche Richtungen durch die Gleichung:

züglich x, y, z vom ersten Grade und zeigt dadurch, dass alle Geraden, welche in der Berührungsebene $\mathfrak{E}$ der Fläche dieselbe berühren, sich in einem Punkte schneiden, dessen Coordinaten die Werthe

$$-\frac{df}{d\mathfrak{y}}:\frac{df}{d\varepsilon},\quad -\frac{df}{d\mathfrak{z}}:\frac{df}{d\varepsilon}$$

haben; dieser Punkt heisst der der Ebene $\mathfrak{E}$ entsprechende **Punkt der Fläche.**

Bei besondern Flächengattungen jeder Klasse gibt es einzelne Ebenen, für welche mit der Gleichung (13) unabhängig von den Zahlen α, β, γ zugleich auch der Gleichung (14) genügt wird. Sodann fallen für jede Lage des eine solche Ebene $\mathfrak{E}$ enthaltenden Büschels zwei Berührungsebenen zugleich mit dieser Ebene zusammen und die Büschelaxe wird erst selbst auch die Fläche berühren, wenn für gewisse Lagen noch eine dritte Berührungsebene mit $\mathfrak{E}$ zusammenfällt, was durch die Gleichung:

$$(16)\qquad \left(\alpha\frac{d}{d\mathfrak{x}}+\beta\frac{d}{d\mathfrak{y}}+\gamma\frac{d}{d\mathfrak{z}}\right)^2 f(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z})=0$$

angezeigt werden. Aus dieser Gleichung erhält man für die Coordinaten x, y, z eines beliebigen Punktes einer solchen Tangente in $\mathfrak{p}$ sogleich

angezeigt wird. Aus dieser Gleichung erhält man für die Coordinaten x, y, z einer beliebigen Ebene durch eine solche Tangente in $\mathfrak{E}$ sogleich:

$$\left((x-\mathfrak{x})\frac{d}{d\mathfrak{x}}+(y-\mathfrak{y})\frac{d}{d\mathfrak{y}}+(z-\mathfrak{z})\frac{d}{d\mathfrak{z}}\right)^2 f(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z})=0,$$

aus welcher Gleichung ersichtlich ist, dass diese Tangenten

aus welcher Gleichung ersichtlich ist, dass diese Tangenten

einen Kegel zweiter Ordnung beschreiben, dessen Spitze der Punkt $\mathfrak{p}$ ist.

eine ebene Curve zweit Klasse umhüllen, der Ebene $\mathfrak{E}$ ist.

Sollte für einzelne Punkte solcher besondern Flächengattungen mit der Gleichung (13) unabhängig von den Zahlen α, β, γ, sowohl der Gleichung (14), als auch der Gleichung (15) noch genügt werden, so würde erst die Gleichung

Sollte für einzelne Ebene solcher besonderen Flächenga tungen mit der Gleichung (1 unabhängig von den Zahlen α, β, γ, sowohl der Gleichung (14 als auch der Gleichung (15) noc genügt werden, so würde ers die Gleichung

$$\left(\alpha\frac{d}{d\mathfrak{x}}+\beta\frac{d}{d\mathfrak{y}}+\gamma\frac{d}{d\mathfrak{z}}\right)^3 f(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z})=0$$

die Richtungen bestimmen, in welchen eine durch einen solchen Punkt $\mathfrak{p}$ gehende Gerade die Fläche berührt, letztere würde also im Punkte $\mathfrak{p}$ von einem durch denselben gehenden Kegel dritter Ordnung berührt werden. Und ebenso weiter.

die Richtungen bestimmen, in welchen eine in einer solchen Ebene $\mathfrak{E}$ liegende Gerade die Fläche berührt, letztere würde also durch die Ebene $\mathfrak{E}$ in einer in letzterer liegenden Curve dritter Klasse berührt werden. Und ebenso weiter.

Wird für besondere Werthe von α, β, γ

Wird für besondere Werthe von α, β, γ

$$(16)\qquad f_n(\alpha,\beta,\gamma)=0,$$

so wird einer der Werthe von ϱ, etwa ϱ_1 unendlich gross, daher in der durch jene Werthe angezeigten Richtung gemäss der Bedeutung von ϱ_1 der Schnittpunkt p_1 ins Unendliche fällt. Für einzelne Lagen der in einer solchen Richtung gehenden Geraden wird noch ein zweiter Werth von ϱ, also ϱ_2 unendlich gross, also noch ein zweiter Schnittpunkt mit der Fläche in's Unendliche fallen und die Gerade dann eine **Asymptote der Fläche** sein. Diese Lagen sind bedingt durch die Gleichung

so wird einer der Werthe von ϱ, etwa ϱ_1 unendlich gross, daher in der durch jene Werthe angezeigten Richtung der Büschelnormale gemäss der Bedeutung von ϱ_1 und wegen $\operatorname{tg}(E_1,\delta)=0$ die Berührungsebene E_1 durch den Coordinatenanfang gehen. Für einzelne Lagen der durch eine solche Normale bestimmten Büschel wird noch ein zweiter Werth von ϱ, also ϱ_2 unendlich, also noch eine zweite Berührungsebene der Fläche durch den Coordinatenanfang gehen und d

Büschelaxe dann die Fläche gleichfalls berühren. Diese Lagen sind bedingt durch die Gleichung

$$(17)\quad \left(\mathfrak{x}\frac{d}{d\alpha}+\mathfrak{y}\frac{d}{d\beta}+\mathfrak{z}\frac{d}{d\gamma}\right)f_n(\alpha,\beta,\gamma)+f_{n-1}(\alpha,\beta,\gamma)=0,$$

welche zeigt, dass alle in gleicher Richtung gehenden Asymptoten einer Fläche in einer Ebene liegen. In besonderen Fällen kann sich als Ort der Asymptoten gleicher Richtung auch ein Cylinder zweiten oder höheren Grades ergeben.

welche zeigt, dass auch die Büschelaxen, welche in einer durch den Coordinatenanfang gehenden Berührungsebene der Fläche dieselbe berühren, sich in einem Punkt, dem Berührungspunkt jener Ebene mit der Fläche schneiden.

II.

Als nächste der Beziehungen der Punkte $p_1, p_2, \ldots, p_n$, in welchen die Gerade (11) die Fläche (10) schneidet, zu dem festen Punkte dieser Geraden findet man aus der Gleichung (12) alsbald:

Als nächste der Beziehungen der Ebenen $E_1, E_2, \ldots, E_n$, mit welchen das Büschel (11) die Fläche (10) berührt, zu der festen Ebene $\mathfrak{E}$ dieses Büschels findet man aus der Gleichung (12) alsbald:

$$\varrho_1\cdot\varrho_2\cdots\varrho_n=\frac{f(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z})}{f_n(\alpha,\beta,\gamma)}=$$

$$\mathfrak{p}p_1\cdot\mathfrak{p}p_2\cdots\mathfrak{p}p_n.$$

$$\frac{1}{(\delta\sin(\mathfrak{E},\delta))^n}\times\frac{\sin(\mathfrak{E},E_1).\sin(\mathfrak{E}.E_2)..\sin(\mathfrak{E},E_n)}{\sin(E_1,\delta)\sin(E_2,\delta)..\sin(E_n,\delta)},$$

wodurch ein Werthausdruck für das Produkt der Abstände jener Schnittpunkte vom festen Punkt $\mathfrak{p}$ gegeben ist. Ist $\mathfrak{p}'$ noch ein weiterer Punkt der Geraden (11), so gibt obige Beziehung ferner:

wodurch ein Werthausdruck für das Produkt der Neigungsverhältnisse jener Berührungsebenen gegen die feste Ebene $\mathfrak{E}$ und die Ebene durch den Coordinatenanfang gegeben ist. Ist $\mathfrak{E}'$ noch eine weitere Ebene des Büschels (11), so gibt obige Beziehung ferner:

$$(18)\qquad \frac{f(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z})}{f(\mathfrak{x}',\mathfrak{y}',\mathfrak{z}')}$$

$$= \frac{\mathfrak{p}p_1 \cdot \mathfrak{p}p_2 \ldots \mathfrak{p}p_n}{\mathfrak{p}'p_1 \cdot \mathfrak{p}'p_2 \ldots \mathfrak{p}'p_n},$$

$$= \left(\frac{\Delta'}{\Delta}\right)^n \times \frac{\sin(\mathfrak{E},E_1).\sin(\mathfrak{E},E_2)..\sin(\mathfrak{E},E_n)}{\left\{\begin{matrix}\sin(\mathfrak{E}',E_1)\\ \times\sin(\mathfrak{E}',E_2)\ldots\sin(\mathfrak{E}',E_n)\end{matrix}\right\}},$$

woraus man vorerst leicht folgern kann, dass je nachdem die Zahlen $f(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z})$ und $f(\mathfrak{x}',\mathfrak{y}',\mathfrak{z}')$ gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben, von den Schnittpunkten p in der Richtung der Geraden gleichzeitig eine gerade oder ungerade Anzahl vor $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ sich befindet oder nicht.

wo Δ und Δ' die Lothe vom Coordinatenanfang auf die Ebenen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ bedeuten und aus welcher vorerst folgt, dass, je nachdem die Zahlen $f(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z})$ und $f(\mathfrak{x}',\mathfrak{y}',\mathfrak{z}')$ gleiche Vorzeichen haben oder nicht, sich gleichzeitig eine gerade oder ungerade Anzahl der Berührungsebenen E in der Richtung der Büschelnormale ober $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ sich befindet oder nicht.

Werden drei beliebige nicht in einer Geraden liegende Punkte $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ paarweise durch Gerade verbunden und sind $p_1, p_2, \ldots, p_n$; $p'_1, p'_2, \ldots, p'_n$; $p''_1, p''_2, \ldots, p''_n$ die Schnittpunkte der Geraden $\mathfrak{p}\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}'\mathfrak{p}''$, $\mathfrak{p}''\mathfrak{p}$ mit der Fäche (10), so erhält man aus (18) nacheinander:

Werden durch die Schnittlinien von drei beliebigen Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{E}''$ Büschel gelegt, welche die Fläche (10) bezüglich mit den Ebenen $E_1, E_2, \ldots, E_n$; $E'_1, E'_2, \ldots, E'_n$; $E''_1, E''_2, \ldots, E''_n$ berühren, so gibt obige Beziehung nacheinander:

$$\frac{f(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z})}{f(\mathfrak{x}',\mathfrak{y}',\mathfrak{z}')}$$

$$= \frac{\mathfrak{p}p_1 \cdot \mathfrak{p}p_2 \ldots \mathfrak{p}p_n}{\mathfrak{p}'p_1 \cdot \mathfrak{p}'p_2 \ldots \mathfrak{p}'p_n},$$

$$= \left(\frac{\Delta'}{\Delta}\right)^n \times \frac{\sin(\mathfrak{E},E_1).\sin(\mathfrak{E},E_2).\sin(\mathfrak{E},E_n)}{\left\{\begin{matrix}\sin(\mathfrak{E}',E_1)\\ \times\sin(\mathfrak{E}',E_2)\ldots\sin(\mathfrak{E}',E_n)\end{matrix}\right\}},$$

$$\frac{f(\mathfrak{x}',\mathfrak{y}',\mathfrak{z}')}{f(\mathfrak{x}'',\mathfrak{y}'',\mathfrak{z}'')}$$

$$= \frac{\mathfrak{p}'p'_1 \cdot \mathfrak{p}'p'_2 \ldots \mathfrak{p}'p''_n}{\mathfrak{p}''p'_1 \cdot \mathfrak{p}''p'_2 \ldots \mathfrak{p}''p'_n},$$

$$= \left(\frac{\Delta''}{\Delta'}\right)^n \times \frac{\left\{\begin{matrix}\sin(\mathfrak{E}',E'_1)\\ \times\sin(\mathfrak{E}',E'_2)\ldots\sin(\mathfrak{E}',E'_n)\end{matrix}\right\}}{\left\{\begin{matrix}\sin(\mathfrak{E}'',E'_1)\\ \times\sin(\mathfrak{E}'',E'_2)..\sin(\mathfrak{E}'',E'_n)\end{matrix}\right\}},$$

$$\frac{f(\mathfrak{x}'', \mathfrak{y}'', \mathfrak{z}'')}{f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})}$$

$$= \frac{\mathfrak{p}''p''_1 \cdot \mathfrak{p}''p''_2 \ldots \mathfrak{p}''p''_n}{\mathfrak{p}p''_1 \cdot \mathfrak{p}p''_2 \ldots \mathfrak{p}p''_n}. \qquad = \left(\frac{\Delta}{\Delta''}\right)^n \times \frac{\left\{\begin{matrix}\sin(\mathfrak{E}'', E''_1) \\ \times \sin(\mathfrak{E}'', E''_2) \ldots \sin(\mathfrak{E}'', E''_n)\end{matrix}\right\}}{\left\{\begin{matrix}\sin(\mathfrak{E}, E''_1) \\ \times \sin(\mathfrak{E}, E''_2) \ldots \sin(\mathfrak{E}, E''_n)\end{matrix}\right\}}.$$

Durch Multiplikation dieser Gleichungen wird dann sogleich:

(19)

$$\frac{\mathfrak{p}p_1 \cdot \mathfrak{p}p_2 \ldots \mathfrak{p}p_n \cdot \mathfrak{p}'p'_1 \cdot \mathfrak{p}'p'_2 \ldots \mathfrak{p}'p'_n}{\mathfrak{p}p''_1 \cdot \mathfrak{p}p''_2 \ldots \mathfrak{p}p''_n \cdot \mathfrak{p}'p_1 \cdot \mathfrak{p}'p_2 \ldots \mathfrak{p}'p_n} \times \frac{\mathfrak{p}''p''_1 \cdot \mathfrak{p}''p''_2 \ldots \mathfrak{p}''p''_n}{\mathfrak{p}''p'_1 \cdot \mathfrak{p}''p'_2 \ldots \mathfrak{p}''p'_n} = 1,$$

welche Gleichung folgende Verallgemeinerung des bekannten Satzes vom Dreieck, dessen Seiten von einer Geraden geschnitten werden, ausspricht:

Wenn man irgend drei nicht in derselben Geraden liegende Punkte durch Gerade verbindet, welche eine algebraische Fläche in der ihrer Ordnung entsprechenden Anzahl von Punkten schneiden, und man von einer Geraden zur andern gehend die Abstände dieser Schnittpunkte von dem der entsprechen-

Durch Multiplikation dieser Gleichungen wird dann sogleich:

(19)

$$\frac{\sin(\mathfrak{E}, E_1) \cdot \sin(\mathfrak{E}, E_2) \ldots \sin(\mathfrak{E}, E_n)}{\sin(\mathfrak{E}, E''_1) \cdot \sin(\mathfrak{E}, E''_2) \cdot \sin(\mathfrak{E}, E''_n)} \times \frac{\left\{\begin{matrix}\sin(\mathfrak{E}', E'_1) \\ \times \sin(\mathfrak{E}', E'_2) \ldots \sin(\mathfrak{E}', E'_n)\end{matrix}\right\}}{\left\{\begin{matrix}\sin(\mathfrak{E}', E_1) \\ \times \sin(\mathfrak{E}', E_2) \ldots \sin(\mathfrak{E}', E_n)\end{matrix}\right\}} \times \frac{\left\{\begin{matrix}\sin(\mathfrak{E}'', E''_1) \\ \times \sin(\mathfrak{E}'', E''_2) \ldots \sin(\mathfrak{E}'', E''_n)\end{matrix}\right\}}{\left\{\begin{matrix}\sin(\mathfrak{E}'', E'_1) \\ \times \sin(\mathfrak{E}'', E'_2) \ldots \sin(\mathfrak{E}'', E'_n)\end{matrix}\right\}} = 1,$$

welche Gleichung folgende Verallgemeinerung des bekannten Satzes vom Dreieck, dessen Ecken mit einem beliebigen Punkte durch Gerade verbunden werden, ausspricht:

Wenn man durch die Schnittlinien von irgend drei Ebenen, die nicht durch dieselbe Gerade gehen, Ebenenbüschel legt, welche eine algebraische Fläche mit der ihrer Klasse entsprechenden Anzahl von Ebenen berühren, und man von Büschel zu Büschel die Neigungen dieser Berührungsebenen ge-

den Geraden und der vorausgegangenen, wie von dem der erstern und der nachfolgenden Geraden gemeinschaftlichen Punkte misst, so sind die Produkte der beiderseits gefundenen Abstände einander gleich.

Es braucht bloss erwähnt zu werden, dass in derselben Weise das Bestehen dieses Satzes bewiesen wird, wenn eine Fläche durch beliebig viele Gerade, die auf einander folgend paarweise einen Punkt gemein haben, geschnitten wird.

Von den Anwendungen obigen Satzes möge die Bestimmung der Berührungsebene einer algebraischen Fläche für einen gegebenen Punkt derselben hier Platz finden. Um nämlich die Ebene zu finden, welche eine gegebene Fläche in dem Punkte p derselben berührt, sei vorerst der Punkt $\mathfrak{p}$ dem gegebenen sehr nahe und ausserdem noch zwei Punkte $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}''$ angenommen, die mit $\mathfrak{p}$ und untereinander durch die Geraden $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{g}''$ und $\mathfrak{g}'''$ verbunden seien.

Sind nun p'_1 und p''_1 die Punkte, in welchen die Geraden $\mathfrak{g}'$ und $\mathfrak{g}''$ die Fläche dem Punkte $\mathfrak{p}$ am nächsten treffen, so gibt die Gleichung (19) sofort den Werth des Verhältnisses $\frac{\mathfrak{p}p'_1}{\mathfrak{p}p''_1}$ oder des ihm gleichen $\frac{\mathfrak{p}q'}{\mathfrak{p}q''}$, wo

gen die dem entsprече den mit dem vorausgega gangenen, wie gegen d dem ersteren mit dem nac folgenden Büschel gemei schaftliche Ebene mis so sind die Produkte d Sinus der beiderseits g fundenen Neigungen ei ander gleich.

Es braucht bloss erwähnt werden, dass dieser Satz au besteht und in gleicher Wei bewiesen wird, wenn eine Fläch durch beliebig viele Büschel die auf einander folgend paar weise eine Ebene gemein haben, berührt wird.

Von den Anwendungen obigen Satzes verdient die Bestimmung des Punktes, in welchem eine algebraische Fläche von einer gegebenen ihr zugehöriger Ebene berührt wird, Erwähnung Um nämlich den Punkt zu fin den, in welchem die Ebene E eine gegebene Fläche, der si angehört, berührt, sei vorers die Ebene $\mathfrak{E}$ der E sehr nah und ausserdem noch zwei Ebe nen $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{E}''$ angenommen welche die $\mathfrak{E}$ und sich selbs in den Geraden $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{g}''$ und $\mathfrak{g}'''$ schneiden. Sind nun E'_1 und E''_1, deren Schnittlinie g sei, die der E nächsten Berührungsebenen der Fläche in den Büscheln durch $\mathfrak{g}'$ und $\mathfrak{g}''$, so gibt die Gleichung (19) sofort den Werth des Verhältnisses $\frac{\sin(\mathfrak{E}, E'_1)}{\sin(\mathfrak{E}, E''_1)}$ oder des ihm gleichen $\frac{\sin(g, \mathfrak{g}'')}{\sin(g, \mathfrak{g}')}$.

und q'' die Schnittpunkte ei-
r zur Geraden $p'_1 p''_1$ Paral-
en mit $\mathfrak{g}'$ und $\mathfrak{g}''$ sind.
sst man nun $\mathfrak{p}$ mit dem ge-
benen Punkte p zusammen-
len, so wird das gleiche mit
t den nächsten Schnittpunkten
und p''_1, sowie mit der Ge-
len $p'_1 p''_1$ geschehen und
ztere die Fläche in p berüh-
. Die Richtung dieser Tan-
nte ist bestimmt durch die
eichung:

$$(20)\quad \frac{pq'}{pq''} = \frac{\left\{ \begin{array}{c} p''_2 \ldots pp''_n \cdot \mathfrak{p}''p'''_1 \cdot \mathfrak{p}''p'''_2 \ldots \mathfrak{p}''p'''_n \\ \times \mathfrak{p}'p \cdot \mathfrak{p}'p'_2 \ldots \mathfrak{p}'p'_n \end{array} \right\}}{\left\{ \begin{array}{c} p'_2 \ldots pp'_n \cdot \mathfrak{p}''p \cdot \mathfrak{p}''p''_2 \ldots \mathfrak{p}''p''_n \\ \times \mathfrak{p}'p'''_1 \cdot \mathfrak{p}'p'''_2 \ldots \mathfrak{p}'p'''_n \end{array} \right\}}$$

Es ist sonach die Bestimmung
eser Tangente auf die Con-
ruction einer Geraden zurück-
führt, welche zwei gegebene
erade in Punkten schneidet,
lche vom Schnittpunkt dieser
raden Abstände von gegebe-
n Verhältniss haben. Es lie-
rt die Lösung dieser Aufgabe
ei Richtungen der gesuchten
raden, also auch der Tangente,
ischen welchen man je nach
m Vorzeichen oben gegebenen
rhältnisswerthes, oder nach
r Anzahl der vor den Punk-
n $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}''$ liegenden Schnitt-
nkte mit der Fläche zu wäh-
n hat. — Durch eine zweite in
rselben Weise bestimmte Tan-

Lässt man dann die $\mathfrak{E}$ mit der gegebenen Ebene E zusammenfallen, so wird das gleiche mit den nächsten Berührungsebenen $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{E}''$ und der Geraden g geschehen und letztere eine Tangente der Fläche in E werden. Die Lage dieser Tangente zwischen $\mathfrak{g}'$ und $\mathfrak{g}''$ ist bestimmt durch die Gleichung:

$$(20)\quad \frac{\sin(g, \mathfrak{g}'')}{\sin(g, \mathfrak{g}')} = \frac{\left\{ \begin{array}{c} \sin(E, E''_2) \ldots \sin(E, E''_n) \\ \times (\mathfrak{E}'', E'''_1) \ldots \end{array} \right\}}{\left\{ \begin{array}{c} \sin(E, E'_2) \ldots \sin(E, E'_n) \\ \times \sin(\mathfrak{E}'', E) \ldots \end{array} \right\}} \times \frac{\left\{ \begin{array}{c} \sin(\mathfrak{E}'', E'''_n) \\ \times \sin(\mathfrak{E}', E) \ldots \sin(\mathfrak{E}', E'_n) \end{array} \right\}}{\left\{ \begin{array}{c} \sin(\mathfrak{E}'', E''_n) \\ \times \sin(\mathfrak{E}', E'''_1) \ldots \sin(\mathfrak{E}', E'''_n) \end{array} \right\}}$$

Es ist sonach die Bestimmung dieser Tangente zurückgeführt auf die Construktion einer durch den Schnittpunkt zweier gegebenem Geraden gehenden dritten Geraden, welche mit ersteren Winkel von gegebenem Sinusverhältniss bildet. Es ergeben sich dadurch zwei Richtungen der gesuchten Geraden, zwischen welchen man nach dem Vorzeichen des oben gegebenen Verhältnisswerthes, oder nach der Anzahl der oberhalb der Ebenen E, $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{E}''$ befindlichen Berührungsebenen der Fläche zu wählen hat. — Durch eine zweite in gleicher Weise bestimmte Gerade oder Tangente

gente ist dann auch die gesuchte Berührungsebene gegeben.

ist dann auch der gesuchte rührungspunkt gegeben.

III.

Der harmonisch mittlere Punkt $\mathfrak{p}'$ der Schnittpunkte der Geraden (11) mit der Fläche (10) in Bezug auf den Punkt $\mathfrak{p}$ dieser Geraden ergibt sich nach (9), da wegen der Gleichung (12)

Die harmonisch mittlere Eb $\mathfrak{E}'$ der zum Büschel (11) hörigen Berührungsebenen Fläche (10) in Bezug auf Ebene $\mathfrak{E}$ dieses Büschels erg sich nach (9), da die Gl chung (12)

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}+\dots+\frac{1}{\varrho_n}=\left(\alpha\frac{d}{d\mathfrak{x}}+\beta\frac{d}{d\mathfrak{y}}+\gamma\frac{d}{d\mathfrak{z}}\right)f(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z}):f(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z})$$

ist, mittelst der Gleichung

liefert, durch die Gleichung

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{\left(\alpha\frac{d}{d\mathfrak{x}}+\beta\frac{d}{d\mathfrak{y}}+\gamma\frac{d}{d\mathfrak{z}}\right)f(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z})}{nf(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z})},$$

woraus sogleich für die Coordinaten $\mathfrak{x}', \mathfrak{y}', \mathfrak{z}'$ desselben wegen

aus welcher für die Coordinate $\mathfrak{x}', \mathfrak{y}', \mathfrak{z}'$ derselben wegen

$$\varrho=\frac{\mathfrak{x}-\mathfrak{x}'}{\alpha}=\frac{\mathfrak{y}-\mathfrak{y}'}{\beta}=\frac{\mathfrak{z}-\mathfrak{z}'}{\gamma}$$

und durch Einführung der die Homogeneität von $f(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z})$ herstellenden Potenzen von $\varepsilon=1$ folgt:

und durch Einführung der ve schiedenen $f(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z})$ homoge machenden Potenzen von $\varepsilon=$ folgt:

$$\left((\mathfrak{x}-\mathfrak{x}')\frac{d}{d\mathfrak{x}}+(\mathfrak{y}-\mathfrak{y}')\frac{d}{d\mathfrak{y}}+(\mathfrak{z}-\mathfrak{z}')\frac{d}{d\mathfrak{z}}\right)f(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z})=nf(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z})$$
$$=\left(\mathfrak{x}\frac{d}{d\mathfrak{z}}+\mathfrak{y}\frac{d}{d\mathfrak{y}}+\mathfrak{z}\frac{d}{d\mathfrak{z}}+\varepsilon\frac{d}{d\varepsilon}\right)f(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z},$$

also auch

also auch

$$(21)\qquad\left(\mathfrak{x}'\frac{d}{d\mathfrak{x}}+\mathfrak{y}'\frac{d}{d\mathfrak{y}}+\mathfrak{z}'\frac{d}{d\mathfrak{z}}+\varepsilon\frac{d}{d\varepsilon}\right)f(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z},\varepsilon)=0.$$

Es ist diese Gleichung unabhängig von einer besonderen Richtung (α,β,γ) der Geraden und für die Coordinaten des

Es ist diese Gleichung una hängig von einer besonde Richtung (α,β,γ) der Büsch normalen und enthält die Co

es $\mathfrak{p}'$ vom ersten, für die von $n-1$ten Grade, wofolgender Satz gegeben Venn sich eine Gerade einen festen Punkt , welche eine Fläche)rdnung in jeder Richin der ihrer Ordnung mmenden Anzahl von ten schneidet, so beeibt der harmonisch lere dieser Schnittte bezüglich des n Punktes eine Ebene, der Punkt, bezüglich her letzterer selbst onisch Mittlerer der ittpunkte mit der he ist, eine Fläche ter Ordnung.

dinaten der Ebene $\mathfrak{E}'$ im ersten, die der $\mathfrak{E}$ im $n-1$ten Grade, wodurch man hat: Wenn sich ein Büschel durch eine feste Ebene bewegt, welches eine Fläche $n$ter Klasse in jeder Lage mit der dieser Klasse zukommenden Anzahl von Ebenen berührt, so geht die harmonische Mittlere dieser Berührungsebenen bezüglich der festen Ebene durch einen festen Punkt, und umhüllt die Ebene, bezüglich welcher letztere selbst harmonisch Mittlere der Berührungsebenen der Fläche ist, eine Fläche $n-1$ter Klasse.

ı festen Punkt, die ihm als der harmonisch mittleren e entsprechende Ebene lie Fläche, bezüglich weler selbst harmonisch Mittist, nennt man Pol, Polare und Polfläche. Letzist offenbar auch der Ort Pole, deren Polarebenen den festen Punkt gehen.

Die feste Ebene, der ihr als Schnittpunkt der harmonisch mittleren Ebenen entsprechende Punkt und die Fläche, bezüglich welcher sie selbst harmonisch Mittlere ist, heissen Polebene, Pol und Polfläche. Letztere wird offenbar auch von den Ebenen eingehüllt, deren Pole auf der festen Ebene liegen.

gt der Punkt auf der Fläche, rd wegen

Ist die Ebene $\mathfrak{E}$ eine Berührungsebene der Fläche, so wird wegen

$$\varrho = \frac{n f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})}{\left(\alpha \frac{d}{d\mathfrak{x}} + \beta \frac{d}{d\mathfrak{y}} + \gamma \frac{d}{d\mathfrak{z}}\right) f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})}$$

la dann $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ zu Null ϱ für alle Richtungen der len, bei welchen nicht auch lenner des Ausdrucks für l ist und welche also nicht

und da dann $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ zu Null wird, ϱ für alle Richtungen der Büschelnormalen, bei welchen nicht auch der Nenner obigen Ausdrucks Null ist und also die

in die Berührungebene der Fläche für den Punkt $\mathfrak{p}$ fallen, gleichfalls verschwinden, folglich $\mathfrak{p}'$ mit $\mathfrak{p}$ zusammenfallen. Es wird daher die Polarebene eines Flächenpunktes zugleich die Berührungsebene der Fläche in diesem Punkte sein, was schon aus der in diesem Fall eintretenden Uebereinstimmung der Gleichung (21) mit (15) geschlossen werden kann. Für die harmonisch Mittleren der übrigen Flächenpunkte auf jeder durch $\mathfrak{p}$ gehenden Geraden bezüglich $\mathfrak{p}$ findet man aus (12)

Büschelaxe nicht selbst Ta gente der Fläche wird, gleic falls verschwinden, folglich mit $\mathfrak{E}$ zusammenfallen. Es wi demnach der Pol einer Fl chenebene zugleich der Be rührungspunkt der Fläch und dieser Ebene sein, wa schon aus der in diesem Fall eintretenden Uebereinstimmun der Gleichung (21) mit (15) ge schlossen werden kann. Fü die harmonisch Mittleren de übrigen Berührungsebenen der Fläche in jedem durch $\mathfrak{E}$ gehenden Büschel bezüglich $\mathfrak{E}$ findet man aus (12)

$$\frac{1}{\varrho} = \tfrac{1}{2}\left(\alpha\frac{d}{d\mathfrak{x}}+\beta\frac{d}{d\mathfrak{y}}+\gamma\frac{d}{d\mathfrak{z}}\right)^2 f(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z}) : (n-1).\left(\alpha\frac{d}{d\mathfrak{x}}+\beta\frac{d}{d\mathfrak{y}}+\gamma\frac{d}{d\mathfrak{z}}\right) f(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z}),$$

also auch

also auch

(23)

$$\tfrac{1}{2}.\left((\mathfrak{x}-\mathfrak{x}')\frac{d}{d\mathfrak{x}}+(\mathfrak{y}-\mathfrak{y}')\frac{d}{d\mathfrak{y}}+(\mathfrak{z}-\mathfrak{z}')\frac{d}{d\mathfrak{z}}\right)^2 f(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z}) = (n-1).\left((\mathfrak{x}-\mathfrak{x}')\frac{d}{d\mathfrak{x}}+(\mathfrak{y}-\mathfrak{y}')\frac{d}{d\mathfrak{y}}+(\mathfrak{z}-\mathfrak{z}')\frac{d}{d\mathfrak{z}}\right) f(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z})$$

woraus folgt: **Dreht sich eine Gerade um einen Punkt einer Fläche $n$ter Ordnung, so beschreibt der harmonisch Mittlere der übrigen Schnittpunkte der Geraden mit der Fläche bezüglich jenes Flächenpunktes eine Fläche zweiter Ordnung, und ist er selbst harmonisch Mittlerer jener Schnittpunkte bezüglich der Schnittpunkte der Ge-**

woraus folgt: **Bewegt sich ei Büschel durch eine Berüh rungsebene einer Fläch $n$ter Klasse, so umhüllt di harmonisch Mittlere de übrigen zum Büschel ge hörigen Berührungsebe nen der Fläche bezüglic jener Ebene eine Fläch zweiter Klasse und ist s selbt harmonisch Mittle jener Berührungsebene bezüglich der dem Büsch**

iden mit einer Fläche —2ter Ordnung.

Jeder der Schnittpunkte einer gegebenen Fläche mit der einem gegebenen Punkte p bezüglich ner entsprechenden Polfläche at seinen harmonisch mittleren unkt bezüglich der gegebenen läche nach Obigem in der ihm ntsprechenden Berührungsbene letzterer, aber auch in p. Es folgt daraus sogleich, dass ie Schnittkurve einer gegebenen Fläche mit der inem gegebenen Punkte ezüglich ihrer zugehörigen Polfläche zugleich auch lie Berührungskurve des on jenem Punkt der gegegebenen Fläche umschriebenen Kegels ist. Sind ferner $f'=0$ und $f''=0$ lie Gleichungen der zwei Punken p' und p'' in Bezug auf die gegebene Fläche entsprechenlen Polflächen, so ist $\lambda f'+\mu f''=0$ die Gleichung der irgend inem andern Punkte der Verindungslinie von p' und p'' entprechenden Polfläche, welche ffenbar durch die den beiden rsten Polflächen gemeinschaftichen Punkte gleichfalls erfüllt ird. Man ersieht hieraus einnal, dass die sämmtlichen Punkten einer Geraden bezüglich einer gegebenen Fläche entsprechenden Polflächen dieselbe Schnittkurve haben; ferner gehen die Berührungskurven sämmtlicher von Punk

angehörigen Berührungsebenen einer Fläche n—2ter Klasse.

Jede der Ebenen, welche einer gegebenen Fläche und der einer gegebenen Ebene 𝔈 bezüglich ihrer entsprechenden Polfläche gemeinschaftlich sind, hat ihre harmonisch mittlere Ebene bezüglich der gegebenen Fläche nach Obigem durch den Punkt gehend, in welchem sie letztere berührt, aber auch in 𝔈 selbst. Man sieht hieraus, dass die Berührungskurve einer gegebenen Fläche und der abwickelbaren Fläche, welche durch die der gegebenen Fläche und der einer gegebenen Ebene bezüglich ihrer zugehörigen Polfläche gemeinschaftlichen Ebenen bestimmt ist, zugleich die Schnittkurve der gegebenen Fläche und Ebene ist. Sind ferner $f'=0$ und $f''=0$ die Gleichungen der zwei Ebenen 𝔈' und 𝔈'' in Bezug auf die gegebene Fläche entsprechenden Polflächen, so ist $\lambda f'+\mu f''=0$ die Gleichung der irgend einer andern Ebene durch die Schnittlinie von 𝔈' und 𝔈'' entsprechenden Polfläche, welche offenbar durch die den beiden ersten Polflächen gemeinschaftlichen Ebenen auch erfüllt wird. Hieraus ersieht man einmal, dass die sämmtlichen Ebenen eines Büschels bezüglich einer gegebenen Fläche entsprechenden Polflächen von derselben

ten einer Geraden aus einer Fläche $n$ter Ordnung umschriebenen Kegel durch dieselben $n(n-1)^2$ Punkte.

abwickelbaren Fläche b rührt werden; ferner hab die Schnittkurven sämm licher demselben Büsch angehörigen Ebenen mit ner Fläche $n$ter Klasse $n(n-1)^2$ Punkte an dense ben Berührungsebenen d Fläche.

Ist der Punkt $\mathfrak{p}$ im Unendlichen, also wenigstens eine seiner Coordinaten und hiemit ϱ unendlich gross, so haben in der Gleichung (21) bloss mehr die mit der höchsten Dimension dieser Coordinaten versehenen Glieder Bedeutung und dieselbe reduzirt sich dadurch, wenn die Zahlen λ, μ, ν die Verhältnisse der Coordinaten von $\mathfrak{p}$ zu dessen Abstand vom Coordinatenanfang, also die Cosinus der Winkel der diesem unendlich fernen Punkt zustrebenden Geraden gegen die Axen ausdrücken, auf

Geht die Ebene $\mathfrak{E}$ durch de Coordinatenanfang und ist als wenigstens eine ihrer Coordina ten unendlich gross, so habe in (21) bloss mehr die mit de höchsten Dimension dieser Coordinaten versehenen Glieder Bedeutung und dieselbe reduzirt sich daher, wenn die Zahlen λ, μ, ν die Verhältnisse der Coordinaten von $\mathfrak{E}$ zum reciproken Abstand dieser Ebene vom Coordinatenanfang, also die Cosinus der Winkel der Normalen von $\mathfrak{E}$ gegen die Axen ausdrücken auf

$$(24)\quad \left(\mathfrak{x}'\frac{d}{d\lambda}+\mathfrak{y}'\frac{d}{d\mu}+\mathfrak{z}'\frac{d}{d\nu}\right)f_n(\lambda,\mu,\nu)+f_{n-1}(\lambda,\mu,\nu)=0,$$

als die Gleichung der Polarebene eines in der Richtung (λ, μ, ν) liegenden unendlich fernen Punktes. Für die Schnittpunkte $\mathfrak{p}'$ dieser Ebene mit den letzterem Punkte zu strebenden parallelen Geraden gibt die Gleichung:

$$\frac{\mathfrak{p}'p_1}{\mathfrak{p}p_1}+\frac{\mathfrak{p}'p_2}{\mathfrak{p}p_2}+\ldots+\frac{\mathfrak{p}'p_n}{\mathfrak{p}p_n}=0$$

wegen $\mathfrak{p}p_1=\mathfrak{p}p_2=\ldots=\infty$ die besondere Beziehung:

$$\mathfrak{p}'p_1+\mathfrak{p}'p_2+\ldots+\mathfrak{p}'p_n=0,$$

wonach $\mathfrak{p}'$ so zwischen den Punk-

als die Gleichung des Poles einer durch den Coordinatenanfang gehenden Ebene.

ten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ liegt, dass seine Abstände von den auf seiner einen Seite liegenden dieser Punkte dieselbe Summe haben, wie seine Abstände von den auf der andern Seite liegenden. Nach dieser Eigenschaft nennt man die Ebene (24) auch die der Richtung (λ, μ, ν) zugehörige Diametralebene der Fläche.

Der in (22) gegebene Ausdruck für ϱ wird auch noch unabhängig von der Richtung (α, β, γ) unendlich für alle Lagen von p, welche den Gleichungen

$$\frac{df}{d\mathfrak{x}}=0,\quad \frac{df}{d\mathfrak{y}}=0,\quad \frac{df}{d\mathfrak{z}}=0$$

gleichzeitig genügen. Hiedurch sind im Allgemeinen $(n-1)^3$ Punkte bestimmt, für welche in jeder Richtung der durchgehenden Geraden

$$\frac{1}{\nu p_1}+\frac{1}{\nu p_2}+\ldots+\frac{1}{\nu p_n}=0,$$

also die Summe der reciproken Abstände eines solchen Punktes von den einerseits von ihm befindlichen Schnittpunkten der in beliebiger Richtung durchgehenden Geraden mit der Fläche dieselbe ist, wie die seiner reciproken Abstände von den auf der andern Seite liegenden Punkten. Nach dieser Eigenschaft nennt man die durch die Gleichung (25) bestimmten $(n-1)^3$ Punkte die harmonischen Mittelpunkte der Fläche.

Liegt die Ebene $\mathfrak{E}$ unendlich fern, sind also ihre Coordinaten Null, so erhält die Gleichung (21) die Gestalt:

$$\left(\mathfrak{x}'\frac{d}{d\mathfrak{x}}+\mathfrak{y}'\frac{d}{d\mathfrak{y}}+\mathfrak{z}'\frac{d}{d\mathfrak{z}}\right)f_1+f_0=0,$$

welche den Coordinaten des Poles von $\mathfrak{E}$ die Werthe gibt:

$$-\frac{df_1}{d\mathfrak{x}}:f_0,\ -\frac{df_1}{d\mathfrak{y}}:f_0,\ -\frac{df_1}{d\mathfrak{z}}:f_0,$$

die unabhängig sind von der Richtung der Normalen der unendlich fernen Ebene, also für alle diese Ebenen denselben Pol liefern. Da die Axe jedes durch eine unendlich ferne Ebene gelegten Büschels gleichfalls im Unendlichen liegt, so sind die innerhalb irgend welcher Grenzen liegenden Ebenen eines solchen Büschels parallel und geht für sie die Beziehung (8) über in:

$$\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_n=0,$$

wo $\delta_1, \delta_2, \ldots$ die Abstände der Parallelebenen $E_1, E_2, \ldots$ von $\mathfrak{E}'$ ausdrücken. Der durch obige Gleichungen bestimmte allen unendlich fern gelegenen Ebenen

gemeinschaftliche Pol bezüglich einer gegebenen Fläche hat daher für letztere die Eigenschaft, dass seine Abstände von den einerseits von ihm liegenden irgend einer Ebene parallelen Berührungsebenen der Fläche dieselbe Summe haben, wie seine Abstände von den auf der andern Seite befindlichen dieser Ebenen. Er ist also ein Mittelpunkt der Fläche. Diese von Chasles zuerst erkannte Eigenschaft zeigt, dass alle Systeme von parallelen Berührungsebenen einer durch Ebenen beschriebenen Fläche, so wie alle einer solchen umschriebenen Cylinder einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben.

Durch Erweiterung des Begriffes vom harmonisch mittleren Punkte oder der harmonisch mittleren Ebene eines Systems von Punkten oder Ebenen bezüglich eines gegebenen Punktes oder Ebene gelangt man zu einer Theorie der höheren Polarflächen, als deren Gleichung nach der für einen harmonisch mittleren Punkt der Ebene angenommenen Bedingung:

$$a_0 + a_1\left(\frac{\varrho'_1}{\varrho_1} + \frac{\varrho'_2}{\varrho_2} + \ldots\right) + a_2\cdot\left(\frac{\varrho'_1\varrho'_2}{\varrho_1\varrho_2} + \ldots + \frac{\varrho'_2\varrho'_3}{\varrho_2\varrho_3} + \ldots\right)$$
$$+ a_3\cdot\left(\frac{\varrho'_1\varrho'_2\varrho'_3}{\varrho_1\varrho_2\varrho_3} + \ldots\right) + \ldots = 0,$$

oder mit dieser identisch:

$$c_0 + c_1\varrho\cdot\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \ldots\right) + c_2\varrho^2\cdot\left(\frac{1}{\varrho_1\varrho_2} + \ldots\frac{1}{\varrho_2\varrho_3} + \ldots\right)$$
$$+ c_3\varrho^3\cdot\left(\frac{1}{\varrho_1\varrho_2\varrho_3} + \ldots\right) + \ldots = 0,$$

wo die Coefficienten gewisse Funktionen der Zahlen a sind, sich mittelst der Beziehung (12) ergibt:

$$c_0 f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) + c_1\left((\mathfrak{x}-\mathfrak{x}')\frac{d}{d\mathfrak{x}} + (\mathfrak{y}-\mathfrak{y}')\frac{d}{d\mathfrak{y}} + (\mathfrak{z}-\mathfrak{z}')\frac{d}{d\mathfrak{z}}\right)f$$
$$+ \tfrac{1}{2}c_2\left((\mathfrak{x}-\mathfrak{x}')\frac{d}{d\mathfrak{x}} + (\mathfrak{y}-\mathfrak{y}')\frac{d}{d\mathfrak{y}} + (\mathfrak{z}-\mathfrak{z}')\frac{d}{d\mathfrak{z}}\right)^2 f + \ldots = 0.$$

Eine Untersuchung dieser Flächen, von welchen die Salmon'schen Polaren, so wie eine andere für die Theorie der Krümmung der Flächen wichtige Klasse Specialitäten sind, muss hier des beschränkten Raumes wegen unterbleiben und bleibt einer andern Gelegenheit vorbehalten.

XIII.

Die Trägheitsmomente geradkantiger, krummkantiger und gewundener Prismen und Pyramiden.

Von

Herrn Dr. *Eduard Zetzsche*,

Lehrer an der königl. höhern Gewerbschule in Chemnitz.

---

§. 1. Begriffsbestimmungen.

Wenn man das Gesetz, nach welchem die Prismen und Pyramiden gebildet sind, erweitert, so führt es zu einer Klasse von Körpern, welche in der verallgemeinerten Bedeutung des Wortes Prismen oder Pyramiden genannt werden mögen, je nachdem bei ihnen die in einer gewissen Richtung parallel gelegten Querschnitte sämmtlich congruent oder blos ähnlich sind. Das Volumen dieser Körper wird stets überstrichen *), wenn sich ein solcher Querschnitt Q von veränderlicher oder unveränderlicher Grösse fortschreitend bewegt und nach Bedarf zugleich in seiner Ebene dreht. Nehmen wir an, dass ein Punkt (der Axialpunkt) des Querschnittes sich blos fortschreitend bewegt, so ist sein Weg eine gerade oder krumme Linie, welche Axiale heissen möge.

*) Doch werde dabei derselbe Raum nicht zwei oder mehr Mal überstrichen.

I. Dreht sich der Querschnitt bei seiner Bewegung nicht, sondern haben alle Querschnitte dieselbe Lage gegen ihren Axialpunkt, so entsteht:

1) bei unveränderlicher Grösse der Querschnitte ein gewöhnliches geradkantiges oder ein krummkantiges Prisma, je nachdem die Axiale gerade oder krumm ist;

2) bei veränderlicher Grösse der Querschnitte eine geradkantige oder krummkantige Pyramide*), je nach der Beschaffenheit der Axiale und dem Gesetz des Wachsens der Querschnitte. Dabei sind die Querschnitte unter einander ähnlich; vergl. dagegen §. 17.

II. Drehen sich dagegen die congruenten oder ähnlichen Querschnitte beim Fortschreiten auch gleichzeitig um ihren Axialpunkt, so entsteht ein gewundenes Prisma oder eine gewundene Pyramide**).

Die Masse dieser Körper ist nach einer einfachen Formel zu ermitteln, da das Volumendifferenzial ein Prisma über $Q = \iint dx'dy'$ und von der Höhe dh ist. Ist μ' die Masse des Raumelementes $dx'dy'dh$, so ist

$$dh \iint \mu' dx'dy' = \mu Q dh$$

die Masse des Volumendifferenzials $dV = Qdh$, und die Masse des ganzen Körpers beträgt:

$$1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad M = \int \mu Q dh,$$

wobei μ und Q Functionen der Coordinaten des Axialpunktes sind.

§. 2. Einige allgemeine Formeln für das Trägheitsmoment.

Bei Benutzung eines dreimal rechtwinkeligen Coordinatensystems findet man für eine durch den Coordinatenanfang O gelegte Drehaxe D, welche mit den drei Coordinatenaxen die Winkel α, β und γ macht, das Trägheitsmoment nach der Formel

$$2) \quad T = \iiint \mu \left[x^2 + y^2 + z^2 - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2\right] dx\,dy\,dz,$$

wobei μ die Masse im Punkte $P = (x, y, z)$ bedeutet.

*) Eine elementare Behandlung einzelner dieser Körper findet man in: Martus, kegelschnittkantige Pyramiden und kurvenkantige Prismen; Berlin 1863. Das Trägheitsmoment für einige solche Körper habe ich bereits früher (im 5. Jahrg. der Zeitschrift für Mathematik und Physik S. 204—206.) mitgetheilt.

**) Das Beiwort „gewunden" braucht auch Matzka für ähnliche Körper; vgl. Archiv für Mathem. u. Physik. 37. Theil. S. 164.

Errichtet man nun in O eine Normale $ON = \mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{a}^2+\mathfrak{b}^2+\mathfrak{c}^2}$ auf der Drehaxe D, wobei $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ die Coordinaten des Endpunktes N sind, so hat man:

$$3) \ldots \quad 0 = \mathfrak{p}\cos(\mathfrak{p}, D) = \mathfrak{a}\cos\alpha + \mathfrak{b}\cos\beta + \mathfrak{c}\cos\gamma.$$

Da nun für ein durch N gelegtes paralleles Coordinatensystem die Coordinaten von P

$$x_1 = x - \mathfrak{a}, \quad y_1 = y - \mathfrak{b}, \quad z_1 = z - \mathfrak{c}$$

sind, so erhält man als Trägheitsmoment desselben Körpers für eine durch N parallel zu D gelegte Drehaxe D':

$$T_1 = \iiint \mu [x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - (x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma)^2]\, dx\, dy\, dz,$$

und hieraus wegen 3):

$$T_1 = T - 2\int (\mathfrak{a}x + \mathfrak{b}y + \mathfrak{c}z)\, dM + (\mathfrak{a}^2+\mathfrak{b}^2+\mathfrak{c}^2)\int dM;$$

hat aber der Schwerpunkt des Körpers in Bezug auf O die Coordinaten ξ, η und ζ, so ergiebt sich:

$$4) \ldots \quad T_1 = T - 2(\mathfrak{a}\xi + \mathfrak{b}\eta + \mathfrak{c}\zeta) M + \mathfrak{p}^2 M$$
$$= T - [\mathfrak{a}(2\xi - \mathfrak{a}) + \mathfrak{b}(2\eta - \mathfrak{b}) + \mathfrak{c}(2\zeta - \mathfrak{c})] M.$$

Bezeichnet man mit $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ die Coordinaten eines andern Punktes O' der Geraden D', so wäre:

$$0 = \mathfrak{p}.O'N.\cos(\mathfrak{p}, D') = \mathfrak{a}(\mathfrak{x} - \mathfrak{a}) + \mathfrak{b}(\mathfrak{y} - \mathfrak{b}) + \mathfrak{c}(\mathfrak{z} - \mathfrak{c}),$$
$$\mathfrak{p}^2 = \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 = \mathfrak{a}\mathfrak{x} + \mathfrak{b}\mathfrak{y} + \mathfrak{c}\mathfrak{z};$$

ferner ist:

$$\overline{O'N}^2 = (\mathfrak{x} - \mathfrak{a})^2 + (\mathfrak{y} - \mathfrak{b})^2 + (\mathfrak{z} - \mathfrak{c})^2,$$
$$O'N = (\mathfrak{x} - \mathfrak{a})\cos\alpha + (\mathfrak{y} - \mathfrak{b})\cos\beta + (\mathfrak{z} - \mathfrak{c})\cos\gamma$$
$$= \mathfrak{x}\cos\alpha + \mathfrak{y}\cos\beta + \mathfrak{z}\cos\gamma,$$

und daher endlich:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{x} - (\mathfrak{x}\cos\alpha + \mathfrak{y}\cos\beta + \mathfrak{z}\cos\gamma)\cos\alpha,$$
$$\mathfrak{b} = \mathfrak{y} - (\mathfrak{x}\cos\alpha + \mathfrak{y}\cos\beta + \mathfrak{z}\cos\gamma)\cos\beta,$$
$$\mathfrak{c} = \mathfrak{z} - (\mathfrak{x}\cos\alpha + \mathfrak{y}\cos\beta + \mathfrak{z}\cos\gamma)\cos\gamma;$$

$$5) \ldots \quad T_1 = T - [\mathfrak{x}(2\xi - \mathfrak{x}) + \mathfrak{y}(2\eta - \mathfrak{y}) + \mathfrak{z}(2\zeta - \mathfrak{z})] M$$
$$+ [\mathfrak{x}\cos\alpha + \mathfrak{y}\cos\beta + \mathfrak{z}\cos\gamma][(2\xi - \mathfrak{x})\cos\alpha + (2\eta - \mathfrak{y})\cos\beta + (2\zeta - \mathfrak{z})\cos\gamma] M.$$

In dieser Formel, welche sich auch unmittelbar aus 2) entwickeln lässt, sind also T_1 und T die Trägheitsmomente dessel-

ben Körpers für zwei parallele Drehaxen D' und D, von denen D durch den Coordinatenanfang, D' durch den Punkt $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ geht.

Unter den Vereinfachungen der Formeln 4) und 5) sind besonders zwei bemerkenswerth, zu denen man u. A. auf folgende Weise gelangen kann: Fällt man von dem Schwerpunkte S des Körpers ein Perpendikel auf $\mathfrak{p}$ herab und subtrahirt man $\mathfrak{p}$ von dem Stücke von $\mathfrak{p}$, welches zwischen O und dem Fusspunkte des Perpendikels liegt, so bleibt die Entfernung k des Schwerpunktes des Körpers von einer durch N gelegten, auf ON senkrechten Ebene übrig; nun ist $k = OS.\cos(\mathfrak{p}, OS) - \mathfrak{p}$,

$$\mathfrak{a}\xi + \mathfrak{b}\eta + \mathfrak{c}\zeta = \mathfrak{p}.OS.\cos(\mathfrak{p}, OS) = \mathfrak{p}(\mathfrak{p} + k),$$

folglich wird:

$$6) \quad \ldots\ldots\ldots \quad T_1 = T - \mathfrak{p}(2k + \mathfrak{p})M.$$

Liegt nun der Schwerpunkt S des Körpers in der durch D gelegten und auf ON senkrechten Ebene, so wird $k = -\mathfrak{p}$ und

$$7) \quad \ldots\ldots\ldots \quad T_1 = T + \mathfrak{p}^2 M;$$

liegt dagegen der Schwerpunkt des Körpers in der durch N oder D' gelegten und auf ON senkrechten Ebene *), so wird $k = 0$ und

$$8) \quad \ldots\ldots\ldots \quad T_1 = T - \mathfrak{p}^2 M.$$

Aus 6) erkennt man zugleich, dass die Differenz $T_1 - T$ unverändert bleibt, so lange $\mathfrak{p}$ und k dieselben sind; man kann also D oder den Körper um ON drehen, ohne dass sich $T_1 - T$ ändert.

Die Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$, für welche die Formel 8) gilt, liegen zugleich auf der Ebene $\mathfrak{a}\cos\alpha + \mathfrak{b}\cos\beta + \mathfrak{c}\cos\gamma = 0$, welche durch O geht und auf D senkrecht steht, und auf der Fläche $\mathfrak{a}\xi + \mathfrak{b}\eta + \mathfrak{c}\zeta = \mathfrak{p}^2 = \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2$; verrückt man den Coordinatenanfang von O nach der Mitte von OS, so werden die Coordinaten von N:

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a} - \tfrac{1}{2}\xi,$$
$$\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b} - \tfrac{1}{2}\eta,$$
$$\mathfrak{c}_1 = \mathfrak{c} - \tfrac{1}{2}\zeta,$$

und die Gleichung der erwähnten Fläche $\mathfrak{a}\xi + \mathfrak{b}\eta + \mathfrak{c}\zeta = \mathfrak{p}^2$ wird nun $\mathfrak{a}_1^2 + \mathfrak{b}_1^2 + \mathfrak{c}_1^2 = \tfrac{1}{4}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$, woraus man erkennt, dass

---

*) Die Gleichung dieser Ebene lautet bekanntlich:

$$x\mathfrak{a} + y\mathfrak{b} + z\mathfrak{c} = \mathfrak{p}^2;$$

liegt nun der Schwerpunkt in dieser Ebene, so ist auch:

$$\xi\mathfrak{a} + \eta\mathfrak{b} + \zeta\mathfrak{c} = \mathfrak{p}^2 = \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2.$$

diese Fläche eine Kugelfläche um die Mitte der Geraden OS ist. Daher liegen die Punkte N, für welche die Formel 8) gilt, auf einem Kreise, der durch O geht und dessen Ebene zu D senkrecht liegt; oder die Drehaxen D', für welche $T_1 = T - \mathfrak{p}^2 M$ ist, bilden die Mantelfläche eines geraden Kreiscylinders, dessen Erzeugende die Drehaxe D ist, dessen geometrische Axe die Gerade OS halbirt und dessen Grundfläche den Halbmesser $= \frac{1}{2}\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2-(\xi\cos\alpha+\eta\cos\beta+\zeta\cos\gamma)^2}$ hat.

Soll dabei $\mathfrak{p}$ constant sein, so muss N im Durchschnitte der beiden Ebenen $\mathfrak{a}\cos\alpha+\mathfrak{b}\cos\beta+\mathfrak{c}\cos\gamma=0$ und $\mathfrak{a}\xi+\mathfrak{b}\eta+\mathfrak{c}\zeta=\mathfrak{p}^2$ und der Kugelfläche $\mathfrak{a}^2+\mathfrak{b}^2+\mathfrak{c}^2=\mathfrak{p}^2$ liegen; also giebt es nur zwei solche Punkte. Die Verbindungslinie beider Punkte steht senkrecht auf der Ebene DOS.

Soll dagegen allgemeiner die Differenz $T_1 - T$ constant, etwa $= C^2 M$ sein, so muss $\mathfrak{a}(2\xi-\mathfrak{a})+\mathfrak{b}(2\eta-\mathfrak{b})+\mathfrak{c}(2\zeta-\mathfrak{c})=-C^2$ sein; da diess die Gleichung einer Kugelfläche um S mit dem Halbmesser $=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2+C^2}$ ist und da gleichzeitig $\mathfrak{a}\cos\alpha+\mathfrak{b}\cos\beta+\mathfrak{c}\cos\gamma=0$ noch erfüllt sein muss, so liegen alle Axen D', für welche T_1-T constant ist, in gleicher Entfernung von der zu D und D' parallelen Schweraxe; diese Entfernung ist aber

$$=\sqrt{C^2+\xi^2+\eta^2+\zeta^2-(\xi\cos\alpha+\eta\cos\beta+\zeta\cos\gamma)^2}=\sqrt{C^2+e^2},$$

wenn e die Entfernung des Schwerpunktes von der Drehaxe D bedeutet.

Fällt man von N ein Perpendikel auf die Ebene DOS und zieht man von O aus nach irgend einem Punkte $N_0=(\mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_0, \mathfrak{c}_0)$ dieses Perpendikels die Gerade $\mathfrak{p}_0$, so ergiebt sich leicht:

$$0=NN_0 . OS\cos(NN_0, OS)=(\mathfrak{a}-\mathfrak{a}_0)\xi+(\mathfrak{b}-\mathfrak{b}_0)\eta+(\mathfrak{c}-\mathfrak{c}_0)\zeta,$$

$$\mathfrak{a}_0\xi+\mathfrak{b}_0\eta+\mathfrak{c}_0\zeta=\mathfrak{a}\xi+\mathfrak{b}\eta+\mathfrak{c}\zeta,$$

und es ist daher das Trägheitsmoment T_0 für eine parallele Drehaxe durch den andern Endpunkt von $\mathfrak{p}_0$:

$$9) \quad \ldots\ldots\ldots \quad T_0 = T_1 + (\mathfrak{p}_0{}^2 - \mathfrak{p}^2) M.$$

§. 3. Formel für das Trägheitsmoment geradkantiger, krummkantiger und gewundener Prismen und Pyramiden.

Mit Hilfe der in §. 2. entwickelten Formeln lässt sich leicht eine bequeme allgemeine Formel für das Trägheitsmoment der in

§. 1. charakterisirten Körper in Bezug auf eine unter den Winkeln α, β, γ gegen die Coordinatenaxen OX, OY, OZ geneigte, durch den Coordinatenanfang O gelegte Drehaxe D entwickeln. Bezeichnet man nämlich mit v den Abstand des Raumelementes $dV = dx'dy'dh$ von der Drehaxe, so ist das Trägheitsmoment eines zu der in Rede stehenden Klasse gehörigen Körpers:

$$T = \int dh \iint v^2 \mu' dx' dy' = \int T' dh,$$

wobei T' genau so zu entwickeln ist, wie das auf die Drehaxe D bezogene Trägheitsmoment der in dem Querschnitte Q vertheilten Masse

$$\mu Q = \iint \mu' dx' dy'.$$

Anstatt nun aber das Trägheitsmoment T' in Bezug auf D unmittelbar zu entwickeln, bestimmt man besser zuerst das Trägheitsmoment T'' derselben Masse μQ für eine durch den Axialpunkt $O' (= \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ gelegte Drehaxe D', welche zu D parallel ist. Man hat dabei den Vortheil, dass man bei der Entwickelung von T'' ein Coordinatensystem benutzen kann, bei welchem die Entwickelung selbst möglichst bequem wird, z. B. ein System $X'Y'Z'$, bei welchem $O'Z'$ in O' auf Q senkrecht steht, während die $O'X'$ und $O'Y'$ in Q selbst liegen; ist die Drehaxe D' gegen die Axen $O'X'$, $O'Y'$ und $O'Z'$ unter den Winkeln α', β' und γ' geneigt, so ist:

$$T'' = \iint \mu' [x'^2 + y'^2 - (x' \cos\alpha' + y' \cos\beta')^2] dx' dy' = \varrho^2 \mu Q.$$

Da nun alle Querschnitte ähnlich sind, so findet man nicht allein Q, sondern auch den Trägheitshalbmesser ϱ eines jeden Querschnittes nach derselben Formel und zwar ϱ als Function von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ und von α', β', γ'. Die Winkel α', β', γ' aber lassen sich durch α, β, γ und $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ ausdrücken, und dann kann man T' nach 5) aus T'' entwickeln; setzt man endlich T' in $T = \int T' dh$ ein, so erhält man:

$$10) \quad T = \int \mu Q dh [\varrho^2 + \mathfrak{x}(2\xi_1 - \mathfrak{x}) + \mathfrak{y}(2\eta_1 - \mathfrak{y}) + \mathfrak{z}(2\zeta_1 - \mathfrak{z})$$
$$- \{\mathfrak{x}\cos\alpha + \mathfrak{y}\cos\beta + \mathfrak{z}\cos\gamma\}\{(2\xi_1 - \mathfrak{x})\cos\alpha + (2\eta_1 - \mathfrak{y})\cos\beta + (2\zeta_1 - \mathfrak{z})\cos\gamma\}].$$

Auch die in dieser Formel enthaltenen, auf O sich beziehenden Coordinaten ξ_1, η_1, ζ_1 des Schwerpunktes S' des Querschnittes Q wird man in den meisten Fällen nicht unmittelbar, sondern bequemer aus den auf $O'X'$ und $O'Y'$ bezogenen Coordinaten ξ' und η' desselben Schwerpunktes S' bestimmen.

Machen nun $O'X'$, $O'Y'$ und $O'Z'$

welche mit der + Seite von OY ebenfalls den $\angle\varphi$ einschliesst, als positiv, so wird $\varphi_y = \frac{1}{2}\pi + \varphi$, $\chi_y = \varphi$, $\chi_x = -(\frac{1}{2}\pi - \varphi)$, daher:

$$12)\left\{\begin{array}{l} \cos\alpha' = \cos\alpha\cos\varphi + \cos\beta\sin\varphi = \sin\gamma\cos(\varphi_0 - \varphi), \\ \cos\beta' = -\cos\alpha\sin\varphi + \cos\beta\cos\varphi = \sin\gamma\sin(\varphi_0 - \varphi), \\ \cos\gamma' = \cos\gamma, \\ \zeta_1 = \mathfrak{z} = z, \\ -(\xi_1 - \mathfrak{x})\sin\varphi + (\eta_1 - \mathfrak{y})\cos\varphi = \eta' \quad \Big| \quad \xi_1 = \mathfrak{x} + \xi'\cos\varphi - \eta'\sin\varphi, \\ (\xi_1 - \mathfrak{x})\cos\varphi + (\eta_1 - \mathfrak{y})\sin\varphi = \xi' \quad \Big| \quad \eta_1 = \mathfrak{y} + \xi'\sin\varphi + \eta'\cos\varphi, \end{array}\right.$$

dabei ist φ_0 der Winkel zwischen OX und der Projection der Drehaxe auf die Ebene OXY.

I. Das Trägheitsmoment einiger Linien und Flächen.

§. 4. Homogene Gerade und Kreisbogen.

Den Ausgangspunkt für die nachfolgenden Betrachtungen bilden die Gerade und der Kreis. Bei beiden ist der Querschnitt ein Punkt, daher ist in 11) $\varrho = 0$, $\xi_1 = \mathfrak{x}$, $\eta_1 = \mathfrak{y}$ und $z = 0$ zu setzen, wenn die Gerade oder der Kreis in der XY-Ebene liegt; die Masse in der Länge 1 der Linie sei μ.

A. Läuft die Gerade parallel zu OY durch einen Punkt der X-Axe, welcher um x von O absteht, so ergiebt sich:

$$13)\quad T = M\left[x^2\sin^2\alpha + \frac{1}{3}\frac{y_1^3 - y_0^3}{y_1 - y_0}\sin^2\beta - x\frac{y_1^2 - y_0^2}{y_1 - y_0}\cos\alpha\cos\beta\right],$$

wenn die Endpunkte der Geraden um y_1 und y_0 von OX entfernt sind.

B. Aus dieser Formel lässt sich leicht das Trägheitsmoment des Umfangs eines regelmässigen Vielecks von n Seiten ableiten. Macht nämlich die Projection der durch den Mittelpunkt des Vieleckes gehenden Drehaxe D auf die Vielecksebene mit den von dem Mittelpunkte des Vielecks nach den Seitenmitteln gezogenen Geraden r die Winkel u_1, u_2, u_3, ... u_n, mit den Seiten selbst aber die Winkel w_1, w_2, w_3 .... w_n, so ist:

$$u_2 = u_1 + \frac{2\pi}{n}, \qquad w_1 = \frac{\pi}{2} + u_1,$$

$$u_3 = u_2 + \frac{2\pi}{n}, \qquad w_2 = \frac{\pi}{2} + u_2 \text{ etc.},$$

. . . .

$$u_n = u_{n-1} + \frac{2\pi}{n} = 2\pi + u_1 - \frac{2\pi}{n};$$

daher macht die Drehaxe D mit jenen Perpendikeln r die Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots\ldots \alpha_n$ und mit den Seiten die Winkel $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots\ldots \beta_n$, für welche

$$\cos\alpha_1 = \sin\gamma\cos u_1, \qquad \cos\beta_1 = \sin\gamma\cos w_1 = -\sin\gamma\sin u_1,$$

$$\cos\alpha_2 = \sin\gamma\cos u_2, \qquad \cos\beta_2 = -\sin\gamma\sin u_2 \text{ etc.}$$

ist, und man findet bei der Seitenlänge l nach 13):

$$T = \mu l r^2(\sin^2\alpha_1 + \sin^2\alpha_2 + \ldots + \sin^2\alpha_n) + \tfrac{1}{12}\mu l^3(\sin^2\beta_1 + \sin^2\beta_2 + \ldots + \sin^2\beta_n)$$

$$= n\mu l \left\{ r^2 + \tfrac{1}{12}l^2 - \frac{r^2\sin^2\gamma}{n}(\cos^2 u_1 + \cos^2 u_2 + \ldots\ldots \cos^2 u_n) - \tfrac{1}{12}\frac{l^2\sin^2\gamma}{n}(\sin^2 u_1 + \sin^2 u_2 + \ldots\ldots + \sin^2 u_n)] \right\}$$

$$= M\left\{ (r^2 + \tfrac{1}{12}l^2)(1 - \tfrac{1}{2}\sin^2\gamma) - \tfrac{1}{2}(r^2 - \tfrac{1}{12}l^2)\sin^2\gamma(\cos 2u_1 + \cos 2u_2 + \ldots\ldots + \cos 2u_n) \right\}.$$

Da nun die Winkel $2u_1, 2u_2 \ldots\ldots 2u_n$ eine arithmetische Reihe bilden, deren Differenz $\frac{4\pi}{n}$ und deren letztes Glied $2u_n = 2u_1 + 4\pi\frac{n-1}{n}$ ist, so wird $\cos 2u_1 + \cos 2u_2 + \ldots\ldots + \cos 2u_n = 0$ und man erhält:

$$14) \ldots\ldots \quad T = \tfrac{1}{24}M(l^2 + 12r^2)(2 - \sin^2\gamma)$$

$$= \tfrac{1}{6}MR^2\left(\sin^2\frac{\pi}{n} + 3\cos^2\frac{\pi}{n}\right)(2 - \sin^2\gamma) = \tfrac{1}{6}MR^2\left(2 + \cos\frac{2\pi}{n}\right)(2 - \sin^2\gamma),$$

wobei R den Halbmesser des umbeschriebenen Kreises bedeutet; das Trägheitsmoment dieses Kreises müsste also sein:

$$15) \ldots\ldots\ldots \quad T = \tfrac{1}{2}MR^2(2 - \sin^2\gamma).$$

C. Bei einem in der XY-Ebene mit dem Halbmesser R um O beschriebenen **Kreisbogen** kann man

$$\mathfrak{x} = R\cos u, \quad \mathfrak{y} = R\sin u, \quad dh = \sqrt{d\mathfrak{x}^2 + d\mathfrak{y}^2} = -R\,du$$

setzen und findet dann:

$$T = -\mu R^3\left[\sin^2\alpha\int_{u_0}^{u_1}\cos^2 u\,du + \sin^2\beta\int_{u_0}^{u_1}\sin^2 u\,du - 2\cos\alpha\cos\beta\int_{u_0}^{u_1}\sin u\cos u\,du\right],$$

und hieraus nach Einführung von $2u$ durch Integration:

16)

$$T = \tfrac{1}{4} MR^2 \Big[\sin^2\alpha + \sin^2\beta$$
$$+ \frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{2} \cdot \frac{\sin 2u_1 - \sin 2u_0}{u_1 - u_0} + \cos\alpha\cos\beta \frac{\cos 2u_1 - \cos 2u_0}{u_1 - u_0}\Big],$$

wobei u_1 und u_0 die Winkel sind, welche ein nach dem Bogenanfang und dem Bogenende gezogener Halbmesser mit OX einschliesst. Für $u_0 = u_1 + \pi$ ergiebt sich daraus wiederum 15).

§. 5. Homogene ebene Figuren.

Ist die in der XY-Ebene liegende Figur durch die Bewegung einer zur OY parallelen Geraden entstanden, so nimmt man für diese aus 13) am kürzesten gleich:

$$T = \mu\,(y_1 - y_0)\Big(x^2\sin^2\alpha - x\,\frac{y_1^2 - y_0^2}{y_1 - y_0}\cos\alpha\cos\beta + \tfrac{1}{3}\,\frac{y_1^3 - y_0^3}{y_1 - y_0}\sin^2\beta\Big)$$

und erhält dann, weil $dh = dx$ zu setzen ist, sofort:

17)

$$T = \mu\!\int\! dx\big[(y_1 - y_0)x^2\sin^2\alpha - (y_1^2 - y_0^2)\,x\cos\alpha\cos\beta + \tfrac{1}{3}(y_1^3 - y_0^3)\sin^2\beta\big],$$

eine Formel, welche man auch unmittelbar aus 2) herleiten kann.

Der spätern Benutzung wegen mögen einige Beispiele folgen:

A. Parallelogramm; Drehaxe durch die in O liegende Ecke; die Seite b liege in OY, die Höhe h sei parallel OX und die Seite a mache mit OX den Winkel A.

$$y_0 = x\tan A, \qquad y_1 = b + x\tan A,$$

18)

$$T = \tfrac{1}{6} M\big[2b^2\sin^2\beta + 3(\tan A\sin^2\beta - \cos\alpha\cos\beta)\,bh$$
$$+ 2(\sin^2\alpha - 2\tan A\cos\alpha\cos\beta + \tan^2 A\sin^2\beta)\,h^2\big].$$

Bezeichnet man den Winkel zwischen D und a mit α_1, so ist $\cos\alpha_1 = \cos\alpha\cos A + \cos\beta\sin A$ und desshalb:

19) $T = \tfrac{1}{6} M\big[2b^2\sin^2\beta + 3(\sin A - \cos\alpha_1\cos\beta)\,ab + 2a^2\sin^2\alpha_1\big].$

B. Dreieck; Drehaxe durch Spitze in O; die Höhe h liege in OX, die Grundlinie $b = b_1 - b_0$ sei parallel OY,

$$y_0 = \frac{b_0}{h}\,x, \qquad y_1 = \frac{b_1}{h}\,x,$$

20)

$$T = \frac{1}{6} M[h^2 \sin^2\alpha - h(b_1 + b_0)\cos\alpha\cos\beta + \frac{1}{3}(b_1^2 + b_1 b_0 + b_0^2)\sin^2\beta].$$

Bezeichnet man dagegen die Winkel, welche die Drehaxe mit den Seiten a und c des Dreiecks einschliesst mit α_1 und γ_1, so findet sich (vergl. S. 203. des 7. Jahrg. der Zeitschr. f. Mathem. und Physik):

$$21) \; . \; . \; . \; . \; T = \frac{1}{4} M[a^2 \sin^2\alpha_1 + c^2 \sin^2\gamma_1 - \frac{1}{3} b^2 \sin^2\beta].$$

Bei entsprechender Aenderung der Integrationsgrenzen gelangt man leicht zu einer Formel für das Trapez.

C. Ellipsenquadrant; wählt man die Ellipsenaxen als Coordinatenaxen und setzt man:

$$x = a\cos u, \quad dx = -a\sin u\,du, \quad y_0 = 0, \quad y_1 = b\sin u,$$

so wird:

$$T = -\mu ab \int_{\frac{1}{2}\pi}^{0} du[a^2 \sin^2\alpha \sin^2 u \cos^2 u - ab\cos\alpha\cos\beta\sin^3 u\cos u + \frac{1}{3} b^2 \sin^2\beta \sin^4 u],$$

$$22) \; . \; . \; . \; . \; T = \frac{1}{4} M[a^2 \sin^2\alpha + b^2 \sin^2\beta - \frac{4}{\pi} ab\cos\alpha\cos\beta].$$

D. Halbe Parabelfläche; Scheitel in O, Parabelaxe in OX, also für die Fläche von $x=0$ bis $x=a$,

$$y_0 = 0, \qquad y_1 = b\sqrt{\frac{x}{a}},$$

$$23) \; . \; . \; . \; T = M[\frac{3}{7} a^2 \sin^2\alpha + \frac{1}{5} b^2 \sin^2\beta - \frac{1}{2} ab\cos\alpha\cos\beta].$$

E. Regelmässiges Vieleck s. §. 7., 28.,

F. Kreisringfactor s. §. 8., 30.,

§. 6.

Homogene Mantelfläche geradkantiger Prismen.

Liegt die Grundfläche des n-seitigen Prisma parallel zur XY-Ebene und ist O der Schwerpunkt des in der XY-Ebene liegenden Querschnittes, dessen Seiten $l_1, l_2, \ldots l_n$ sein mögen; macht ferner die den Seiten parallele Schweraxe s des Mantels mit den Coordinatenaxen die Winkel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, und ist demnach:

$$x = \xi_1 = \sigma \cos \alpha_1, \quad \mathfrak{y} = \eta_1 = \sigma \cos \beta_1, \quad \mathfrak{z} = \sigma \cos \gamma_1,$$
$$\cos \vartheta = \cos (D, \sigma) = \cos \alpha \cos \alpha_1 + \cos \beta \cos \beta_1 + \cos \gamma \cos \gamma_1,$$

wenn der Punkt $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ um σ von O entfernt ist: bezeichnet man endlich mit ϱ_0 den Trägheitshalbmesser eines Querschnittsumfangs für eine parallele Drehaxe durch dessen Schwerpunkt und führt man noch in 11):

$$Q dh = d\sigma [l_1 \sin(\sigma, l_1) + l_2 \sin(\sigma, l_2) + \ldots + l_n \sin(\sigma, l_n)] = K d\sigma,$$

$$M = \mu K \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} d\sigma = \mu K s$$

ein, so findet sich sehr leicht:

$$24) \ldots\ldots \quad T = M \left[\varrho_0^2 + \tfrac{1}{3} \frac{\sigma_1^3 - \sigma_0^3}{s} \sin^2 \vartheta\right],$$

wobei die Schwerpunkte der beiden Grundflächen um σ_1 und σ_0 von O entfernt sind,

Wäre z. B. die Grundfläche regelmässig, so würde man für eine durch den Schwerpunkt des Prismenmantels gelegte Drehaxe erhalten:

$$25) \quad T = \tfrac{1}{6} M \left[R^2 \left(2 + \cos \frac{2\pi}{n}\right)(2 - \sin^2 \gamma) + \tfrac{1}{2} s^2 \sin^2 \vartheta \right].$$

§. 7.

Homogene Mantelfläche geradkantiger Pyramiden.

Die Spitze der Pyramide legt man nach O und die Grundfläche derselben parallel zur XY-Ebene; sind $l_1, l_2 \ldots, l_n$ die n-Seiten der Grundfläche und $h_1, h_2 \ldots h_n$ die Höhen der n-Dreiecke, welche den Mantel bilden, so ist:

$$M = \tfrac{1}{2} \mu [l_1 h_1 + l_2 h_2 + \ldots l_n h_n] = \tfrac{1}{2} \mu K.$$

Bezeichnet man die Höhe der Pyramide mit h, die Seiten des Schnittes in der Höhe z mit $l_1', l_2' \ldots l_n'$ und mit $dh_1, dh_2 \ldots dh_n$ die dz entsprechenden Stücke von $h_1, h_2 \ldots h_n$, dann hat man:

$$\frac{z}{h} = \frac{l_1'}{l_1} = \frac{l_2'}{l_2} = \frac{l_3'}{l_3} = \ldots = \frac{l_n'}{l_n},$$
$$\frac{dh_1}{dz} = \frac{h_1}{h}, \quad \frac{dh_2}{dz} = \frac{h_2}{h}, \ldots \frac{dh_n}{dz} = \frac{h_n}{h},$$

$$Qdh = l_1'dh_1 + l_2'dh_2 + \dots . l_n'dh_n$$

$$= \frac{zdz}{h^2}(l_1 h_1 + l_2 h_2 + \dots . l_n h_n) = \frac{Kzdz}{h^2}.$$

Sind ferner ϱ und ϱ_0 die Trägheitshalbmesser des Schnittes in der Höhe z und der Grundfläche und zwar für eine Drehaxe durch den Schwerpunkt des Umfangs des Schnittes und der Grundfläche; ist endlich der Schwerpunkt des Schnittes um σ und der Schwerpunkt der Grundfläche um s von der Spitze entfernt, so ergiebt sich, weil $\varrho = \frac{\varrho_0}{h} z$ und $\sigma = \frac{s}{h} z$, ähnlich wie in §. 6.

$$T = \frac{\mu K}{h^4}[\varrho_0^2 + s^2 \sin^2\vartheta]\int_0^h z^3 dz.$$

$$26) \dots \dots \quad T = \tfrac{1}{4} M[\varrho_0^2 + s^2 \sin^2\vartheta]$$

Wäre z. B. die Grundfläche regelmässig, so würde wegen 14)

$$27) \quad T = \tfrac{1}{4} M \left[\tfrac{1}{6} R^2 \left(2 + \cos\frac{2\pi}{n}\right)(2 - \sin^2\gamma) + s^2 \sin^2\vartheta \right].$$

Hieraus ergiebt sich aber sofort auch das Trägheitsmoment eines regelmässigen Vielecks von n-Seiten für eine beliebige Drehaxe durch den Schwerpunkt des Vielecks, sofern man nur $s = 0$ setzt; man erhält dann:

$$28) \dots . \quad T = \tfrac{1}{12} M R^2 \left(2 + \cos\frac{2\pi}{n}\right)(2 - \sin^2\gamma).$$

Für krummkantige und gewundene Prismen- und Pyramiden-Mäntel werden die Formeln verwickelt, weil man anstatt K einen längeren, nicht constanten Ausdruck erhält.

§. 8. Homogene Rotationsflächen.

Wählt man die Rotationsaxe als Z-Axe, so wird $x = y = 0$. Da die Querschnitte Kreisbogen sind, so ist ϱ aus 16) zu entnehmen, und zwar kann man, sofern von einem **Rotationsflächensector** die Rede ist und daher u_1 und u_0 constant sind, $\varrho = \frac{1}{4} C r^2$ setzen, wobei

$$C = \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{2} \cdot \frac{\sin 2u_1 - \sin 2u_0}{u_1 - u_0}$$

$$+ \cos\alpha \cos\beta \frac{\cos 2u_1 - \cos 2u_0}{u_1 - u_0}.$$

Die Coordinaten des Schwerpunktes eines Kreisbogens ergeben sich als

$$\xi_1 = \frac{r}{u_1 - u_0} \int_{u_0}^{u_1} \cos u du = \frac{\sin u_1 - \sin u_0}{u_1 - u_0} r = Ar,$$

$$\eta_1 = \frac{r}{u_1 - u_0} \int_{u_0}^{u_1} \sin u du = -\frac{\cos u_1 - \cos u_0}{u_1 - u_0} r = -Br.$$

Ist endlich $r = f(z)$ die Gleichung eines Meridians der Rotationsfläche und setzt man zur Abkürzung noch

$$N = (A\cos\alpha - B\cos\beta)\cos\gamma,$$

so erhält man $Qdh = -r(u_1 - u_0)\sqrt{dr^2 + dz^2}$, und deshalb:

29)

$$T = -\mu(u_1 - u_0) \int_{z_0}^{z_1} rdz \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2} [\tfrac{1}{4}Cr^2 + z^2\sin^2\gamma - 2rzN],$$

$$M = -\mu(u_1 - u_0) \int_{z_0}^{z_1} rdz \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2}.$$

A. Beim **Kreisring-Sector**, dessen innerer und äusserer Halbmesser r_0 und r_1 sind, ist $z=0$, wenn der Mittelpunkt in O liegt; daher ist:

$$Qdh = -r(u_1 - u_0)dr,$$

$$M = -\tfrac{1}{2}\mu(u_1 - u_0)(r_1^2 - r_0^2),$$

30) . . $T = -\mu(u_1 - u_0)\tfrac{1}{4}C \int_{r_0}^{r_1} r^3 dr = \tfrac{1}{8}M(r_1^2 + r_0^2)C.$

B. Bei der **Kreiscylinderfläche** ist $r = R$ constant, $dh = dz$,

31) . . . $T = M[\tfrac{1}{4}CR^2 + \tfrac{1}{3}\frac{z_1^3 - z_0^3}{z_1 - z_0}\sin^2\gamma + N\frac{z_1^2 - z_0^2}{z_1 - z_0}].$

C. Bei der **Kreiskegelfläche** liege die Spitze in O, sei die Höhe $= h$, der Halbmesser der Grundfläche $= R$; dann wird:

$$r = \frac{R}{h}z, \quad \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{R^2}{h^2}} = F,$$

$$M = -\tfrac{1}{2}\mu(u_1 - u_0)FRh,$$

32) . . . . . $T = \tfrac{1}{2}M[\tfrac{1}{4}CR^2 + h^2\sin^2\gamma - 2RhN].$

D. Bei der **Kugelfläche** vom Halbmesser R aus O ist:

$$r^2 = R^2 - z^2, \quad r\sqrt{1+\left(\frac{dr}{dz}\right)^2} = R,$$

$$M = -\mu(u_1 - u_0)\, R\,(z_1 - z_0).$$

$$33) \quad T = M\left[\tfrac{1}{2}CR^2 + \tfrac{1}{3}\frac{z_1^3 - z_0^3}{z_1 - z_0}(\sin^2\gamma - \tfrac{1}{2}C) + \tfrac{2}{3}N\frac{\sqrt{R^2 - z_1^2}^3 - \sqrt{R^2 - z_0^2}^3}{z_1 - z_0}\right].$$

E. Bei der **Rotationsparaboloidfläche** sei $r^2 = 2pz$; dann ergiebt sich:

$$r\sqrt{1+\left(\frac{dr}{dz}\right)^2} = \sqrt{r^2 + p^2} = \sqrt{p^2 + 2pz},$$

$$M = -\mu(u_1 - u_0)\int_0^h dz\,\sqrt{p^2 + 2pz}$$

$$= -\frac{1}{3p}\mu(u_1 - u_0)\,[\sqrt{p^2 + 2ph}^3 - p^3],$$

$$T = -\mu(u_1 - u_0)\int_0^h dz\,\sqrt{p^2 + 2pz}\,[Cpz + z^2\sin^2\gamma - 2Nz\sqrt{2pz}]$$

$$= \frac{3pM}{\sqrt{p^2 + 2ph}^3 - p^3}\Big[C\Big(\frac{1}{10p}\sqrt{p^2 + 2ph}^5 - \tfrac{1}{3}p\sqrt{p^2 + 2ph}^3 + \tfrac{1}{15}p^4\Big)$$

$$+ \sin^2\gamma\Big(\frac{1}{28p^3}\sqrt{p^2 + 2ph}^7 - \frac{1}{10p}\sqrt{p^2 + 2ph}^5 + \tfrac{1}{12}p\sqrt{p^2 + 2ph}^3 - \tfrac{2}{105}p^4\Big)$$

$$-2N\sqrt{2p}\Big(\frac{1}{6p}\sqrt{p^2h + 2ph^2}^3 - \tfrac{1}{4}p(\tfrac{1}{2}h + \tfrac{1}{8}p)\sqrt{p^2h + 2ph^2}$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{128}\sqrt{p^7}\,\text{lognat}\,\frac{4h + p + 2\sqrt{2ph + 4h^2}}{p}\Big)\Big].$$

Ist die letzte Parabelordinate $\sqrt{2ph} = b$ und setzt man $\sqrt{p^2 + 2ph} = W$, so ergiebt sich:

$$34) \quad T = \frac{M}{W^3 - p^3}\Big[C(\tfrac{3}{10}W^5 - \tfrac{1}{2}p^2W^3 + \tfrac{1}{5}p^5)$$

$$+ \sin^2\gamma\Big(\frac{3}{28p^2}W^7 - \tfrac{3}{10}W^5 + \tfrac{1}{4}p^2W^3 - \tfrac{3}{35}p^5\Big)$$

$$- bN(hW^3 - \tfrac{3}{4}(p^2h + \tfrac{1}{4}p^3)W) - \tfrac{3}{32}p^5N\,\text{lognat}\frac{4h + p + 2\sqrt{b^2 + 4h^2}}{p}\Big].$$

§. 9. Homogene Cylinderflächen.

Nimmt man die erzeugende Gerade von der Länge $y_1 - y_0$ rallel zu OY, als Leitcurve den Durchschnitt der Cylinderfläche it der Ebene XOY und die O' in der Leitcurve, so hat man s 13):

$$\varrho^2 = \tfrac{1}{3}\frac{y_1^3 - y_0^3}{y_1 - y_0}\sin^2\beta\,, \quad Qdh = (y_1 - y_0)\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx\,,$$

$$\xi_1 = x, \quad \eta_1 = \frac{y_1 + y_0}{2}, \quad \zeta_1 = z, \quad \mathfrak{y} = 0,$$

$$M = \mu\int(y_1 - y_0)\,dx\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,,$$

35)

$$' = \mu\int(y_1 - y_0)\,dx\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,\Big[\tfrac{1}{3}\frac{y_1^3 - y_0^3}{y_1 - y_0}\sin^2\beta$$

$$+ x^2\sin^2\alpha + z^2\sin^2\gamma - 2xz\cos\alpha\cos\gamma - (x\cos\alpha + z\cos\gamma)(y_1 + y_0)\cos\beta\Big].$$

A. Bei einem parabolischen Cylinder sei $z = \tfrac{1}{2}Ax^2$, da- r $\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + A^2x^2}$; wählt man nun $y_0 = 0$ und $= \frac{1}{\sqrt{1 + A^2x^2}}$, so erhält man:

$$M = \mu\int_0^x dx = \mu x,$$

$$= \mu\int_0^x dx\Big[\tfrac{1}{3}\frac{\sin^2\beta}{1 + A^2x^2} + x^2\sin^2\alpha + \tfrac{1}{4}A^2x^4\sin^2\gamma$$

$$- Ax^3\cos\alpha\cos\gamma - \frac{x\cos\alpha + \tfrac{1}{2}Ax^2\cos\gamma}{\sqrt{1 + A^2x^2}}\cos\beta\Big].$$

36)

$$= M\Big[\frac{\sin^2\beta\,\mathrm{Arctan}\,Ax}{3Ax} + \tfrac{1}{3}x^2\sin^2\alpha + \tfrac{1}{20}A^2x^4\sin^2\gamma - \tfrac{1}{4}Ax^3\cos\alpha\cos\gamma$$

$$- \frac{\sqrt{1 + A^2x^2}}{A^2x}\cos\alpha\cos\beta$$

$$- \frac{1}{4A^2}\cos\gamma\cos\beta\,\Big(A\sqrt{1 + A^2x^2} - \frac{1}{x}\,\mathrm{lognat}\,(Ax + \sqrt{1 + A^2x^2})\Big)\Big].$$

B. Bei einem Kreiscylinder, dessen Leitlinie durch die

Gleichung $x^2+z^2=R^2$ gegeben ist, sei $y_0=0$ und $y_1=z$; dann ist:

$$M=\mu R\int_0^x dx=\mu R x,$$

$$T=\mu R\int_0^x dx\,[(\tfrac{1}{2}\sin^2\beta+\sin^2\gamma-\cos\gamma\cos\beta)(R^2-x^2)$$

$$+x^2\sin^2\alpha-(2\cos\alpha\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta)x\sqrt{R^2-x^2}].$$

37)

$$T=M[(\tfrac{1}{2}\sin^2\beta+\sin^2\gamma-\cos\gamma\cos\beta)(R^2-\tfrac{1}{3}x^2)+\tfrac{1}{3}x^2\sin^2\alpha$$

$$+\tfrac{1}{3}\cos\alpha\,(2\cos\gamma+\cos\beta)\frac{\sqrt{R^2-x^2}^3}{x}].$$

II. Die Trägheitsmomente prismatischer Körper.

§. 10. Homogene geradkantige Prismen.

Am einfachsten gestalten sich die Formeln für eine Drehaxe durch den Schwerpunkt des Prismas; wählt man daher diesen als Coordinatenanfang O und zugleich die den Kanten parallele Schwerlinie s als Axiale, so wird:

$$x=\xi_1=\sigma\cos\alpha_2,\quad y=\eta_1=\sigma\cos\beta_2,\quad z=\sigma\cos\gamma_2,$$
$$dh=dz=\cos\gamma_2\,d\sigma,$$

wenn die Gerade $OO'=\sigma$ mit den Coordinatenaxen die Winkel α_2, β_2, γ_2 einschliesst; da nun der Winkel ϑ zwischen D und s durch die Gleichung

$$\cos\vartheta=\cos(D,\sigma)=\cos\alpha\cos\alpha_2+\cos\beta\cos\beta_2+\cos\gamma\cos\gamma_2$$

gegeben ist, so erhält man aus 11):

$$T=\mu Q\cos\gamma_2\int_{-\frac{1}{2}s}^{+\frac{1}{2}s} ds\,[\varrho^2+(\cos^2\alpha_2+\cos^2\beta_2+\cos^2\gamma_2)\,\sigma^2-\sigma^2\cos^2\vartheta].$$

Die Masse M des Prismas findet man nach 1):

$$M=\mu Q\cos\gamma_2\int_{-\frac{1}{2}s}^{+\frac{1}{2}s} ds=\mu Qs\cos\gamma_2\,;$$

da endlich alle Querschnitte nicht allein congruent und parallel sind, sondern auch sämmtlich die nämliche Lage gegen die durch

ihren Axialpunkt O' gelegte Drehaxe D' haben, so muss der Trägheitshalbmesser ϱ für alle Querschnitte derselbe sein und man kann dafür den Trägheitshalbmesser ϱ_1 des mittelsten Querschnittes für die Drehaxe D in obige Formel einsetzen; man erhält dadurch als Trägheitsmoment des Prismas

38) . . . . $T = M[\varrho_1^2 + \frac{1}{12} s^2 \sin^2\vartheta]$.

Ganz die nämliche Form hat die Formel aber auch dann noch, wenn die Drehaxe den mittelsten Querschnitt nicht gerade in dessen Schwerpunkte trifft. Vergl. 7) und 8).

A. **Parallelepiped**; das Trägheitsmoment für eine durch eine Ecke des mittelsten Querschnitts gelegte Drehaxe findet man sofort aus 19), nämlich:

39)

$$T = \frac{1}{12} M[4a^2 \sin^2\alpha_1 + 4b^2 \sin^2\beta + 3ab(\sin A - \cos\alpha_1 \cos\beta) + s^2 \sin^2\vartheta].$$

Hieraus aber findet man leicht als Trägheitsmoment für eine durch den Schwerpunkt des Parallelepipeds gehende Drehaxe:

40) . . . . $T = \frac{1}{12} M[a^2 \sin^2\alpha_1 + b^2 \sin^2\beta + s^2 \sin^2\vartheta]$.

B. **Dreiseitiges Prisma**; geht die Drehaxe durch die der Seite b gegenüberliegende Ecke des mittelsten Querschnitts, so ist nach 21):

41) $T = \frac{1}{12} M[3a^2 \sin^2\alpha_1 - b^2 \sin^2\beta + 3c^2 \sin^2\gamma_1 + s^2 \sin^2\vartheta]$;

geht dagegen die Drehaxe durch den Schwerpunkt des Prismas, so findet man hieraus:

42) $T = \frac{1}{36} M[a^2 \sin^2\alpha_1 + b^2 \sin^2\beta + c^2 \sin^2\gamma_1 + 3s^2 \sin^2\vartheta]$.

C. **Prisma mit regelmässiger Grundfläche**; für eine Axe durch den Schwerpunkt des Prismas ist nach 28):

43) $T = \frac{1}{12} M\left[R^2\left(2 + \cos\frac{2\pi}{n}\right)(2 - \sin^2\gamma) + s^2 \sin^2\vartheta\right]$.

D. **Prisma mit Kreisringsector als Grundfläche**; nach 30) hat man für eine durch den Mittelpunkt des mittelsten Ringsectors:

44) . . . . . $T = \frac{1}{4} M[(R_1^2 - R_0^2)C + \frac{1}{3} s^2 \sin^2\vartheta]$.

E. **Prisma mit elliptischer Grundfläche**; geht die Drehaxe durch den Mittelpunkt der mittelsten Ellipse, so erhält man aus 22):

$$45)\quad T = \tfrac{1}{4} M \left[a^2 \sin^2\alpha + b^2 \sin^2\beta - \frac{4}{\pi} ab \cos\alpha \cos\beta + \tfrac{1}{3} s^2 \sin^2\vartheta \right],$$

wenn die Querschnitte **Ellipsenquadranten** sind; wenn sie dagegen halbe oder ganze Ellipsen sind, wird:

$$46) \ldots\; T = \tfrac{1}{4} M \left[a^2 \sin^2\alpha + b^2 \sin^2\beta + \tfrac{1}{3} s^2 \sin^2\vartheta \right].$$

F. Besteht die Grundfläche des Prisma's (**Balancier**) aus 2 **congruenten Parabelflächen**, welche zu beiden Seiten der Parabelaxe liegen und mit ihren letzten Ordinaten zusammenstossen, und geht die Drehaxe durch den Schwerpunkt des Prisma's, so findet man aus 23) mit Benutzung von 7) und 8):

$$47) \ldots\; T = M \left[\tfrac{8}{35} a^2 \sin\alpha + \tfrac{1}{5} b^2 \sin^2\beta + \tfrac{1}{12} s^2 \sin^2\vartheta \right].$$

§. 11. Homogene krummkantige Prismen.

Da sämmtliche Querschnitte congruent und auch in gleicher Lage gegen die durch ihren Axialpunkt gelegte Drehaxe D' sind, so ist auch hier $\varrho = \varrho_1$ constant. Am bequemsten wählt man den **Weg des Querschnittschwerpunktes als Axiale** und erhält dann:

$$\mathfrak{x} = \xi_1 = f_1(z), \quad \mathfrak{y} = \eta_1 = f_2(z), \quad dh = dz,$$
$$M = \mu Q (z_1 - z_0).$$

$$48)\quad T = \frac{M}{z_1 - z_0} \int_{z_0}^{z_1} dz \left[\varrho_1^2 + \mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + z^2 - (\mathfrak{x} \cos\alpha + \mathfrak{y} \cos\beta + z \cos\gamma)^2 \right].$$

A. Die Querschnitte seien **Rechtecke**, deren Schwerpunkte auf einem aus O in XZ mit dem Halbmesser R geschlagenen **Halbkreise** liegen; hier ist:

$$\mathfrak{y} = 0, \quad \mathfrak{x} = \sqrt{R^2 - z^2}, \quad \varrho_1^2 = \tfrac{1}{12} (a^2 \sin^2\alpha + b^2 \sin^2\beta),$$
$$z_1 = -z_0 = R, \quad M = 2\mu Q R,$$

$$49)\quad T = M \left[\varrho_1^2 + R^2 \left(1 - \tfrac{2}{3} \cos^2\alpha - \tfrac{1}{3} \cos^2\gamma\right) \right] = M \left[\varrho_1^2 + \tfrac{1}{3} R^2 (2 \sin^2\alpha + \sin^2\gamma) \right].$$

B. Die Querschnitte seien **regelmässige Figuren** und der geometrische Ort ihrer Mittelpunkte sei der **Durchschnitt eines parabolischen und eines semicubisch-parabolischen Cylinders**, deren Gleichungen:

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{a^2} = \frac{z}{h} = \sqrt{\frac{\mathfrak{y}^3}{b}}$$

sein mögen. Aus 28) hat man:

$$\varrho_1^2 = \tfrac{1}{12} R^2 \left(2 + \cos\frac{2\pi}{n}\right)(2 - \sin^2\gamma);$$

nimmt man nun $z_0 = 0$, $z_1 = h$, dann wird $M = \mu Q h$ und:

$$T = \frac{M}{h}\int_0^h dz \Big[\varrho_1^2 + a^2 \sin^2\alpha\,\frac{z}{h} + b^2 \sin^2\beta \sqrt[3]{\frac{z}{h}^4}$$

$$+ z^2 \sin^2\gamma - 2a\cos\alpha\cos\gamma\sqrt{\frac{z^3}{h}}$$

$$- 2b\cos\beta\cos\gamma\sqrt[3]{\frac{z^5}{h^2}} - 2ab\cos\alpha\cos\beta\sqrt[6]{\frac{z}{h}^7}\Big].$$

50)

$$T = M[\varrho_1^2 + \tfrac{1}{2}a^2\sin^2\alpha + \tfrac{3}{7}b^2\sin^2\beta + \tfrac{1}{3}h^2\sin^2\gamma - \tfrac{4}{5}ah\cos\alpha\cos\gamma$$

$$- \tfrac{3}{4}bh\cos\beta\cos\gamma - \tfrac{12}{13}ab\cos\alpha\cos\beta].$$

§. 12. Homogene gewundene Prismen.

Bei der Entwickelung des Trägheitsmomentes gewundener Prismen sind die Werthe von ξ_1 und η_1, α', β' und γ' aus 12) in 11) einzusetzen.

Rücksichtlich der Werthe von α' und β' wird es oft von Vortheil sein, auf den Winkel $2(\varphi_0 - \varphi)$ überzugehen. In 11) sind ferner μ und Q constant, für dh aber ist dz zu schreiben.

A. Die Querschnitte seien gleichschenklige Dreiecke, die Axiale gehe durch die der Seite b gegenüberliegende Ecke und falle mit der Z-Axe zusammen, also sei $\mathfrak{x} = 0 = \mathfrak{y}$; vollendet nun das Dreieck bei gleichförmiger Drehung eine Umdrehung, während die Spitze in der OZ um $\frac{1}{2}h$ emporsteigt, so entspricht der Höhe z der Drehwinkel

$$\varphi = \frac{4\pi}{h} z = Nz;$$

wenn nun die Dreiecke die Höhe h_1 haben, also nach 20):

$$\varrho^2 = \tfrac{1}{2}(h_1^2 \sin^2\alpha' + \tfrac{1}{12} b^2 \sin^2\beta')$$

ist, so findet man weiter:

$$\sin^2\alpha' = 1 - \sin^2\gamma\cos^2(\varphi_0 - Nz) = \frac{2-\sin^2\gamma}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(2\varphi_0 - 2Nz)\sin^2\gamma,$$

$$\sin^2\beta' = 1 - \sin^2\gamma\sin^2(\varphi_0 - Nz) = \frac{2-\sin^2\gamma}{2} + \tfrac{1}{2}\cos(2\varphi_0 - 2Nz)\sin^2\gamma,$$

$$\varrho^2 = \frac{2-\sin^2\gamma}{4}(h_1^2 + \tfrac{1}{12}b^2) - \tfrac{1}{4}(h_1^2 - \tfrac{1}{12}b^2)\sin^2\gamma\cos(2\varphi_0 - 2Nz);$$

ausserdem ist $\xi' = \frac{2}{3}h_1$ und $\eta' = 0$, daher:

$$\xi_1 = \tfrac{2}{3}h_1\cos Nz, \quad \eta_1 = \tfrac{2}{3}h_1\sin Nz;$$

nimmt man endlich $z_1 = \frac{1}{2}h = -z_0$, so ergiebt sich:

$$T = \frac{M}{h}\int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} dz\Big[\tfrac{1}{4}(2-\sin^2\gamma)(h_1^2 + \tfrac{1}{12}b^2)$$
$$- \tfrac{1}{4}(h_1^2 - \tfrac{1}{12}b^2)\sin^2\gamma\cos(2\varphi_0 - 2Nz) + z^2\sin^2\gamma$$
$$- \tfrac{4}{3}h_1 z\cos\gamma(\cos\alpha\cos Nz + \cos\beta\sin Nz)\Big].$$

$$51)\quad T = M\Big[\tfrac{1}{4}(2-\sin^2\gamma)(h_1^2 + \tfrac{1}{12}b^2) + \tfrac{1}{12}h^2\sin^2\gamma + \frac{1}{3\pi}hh_1\cos\beta\cos\gamma\Big].$$

B. Ist jeder Querschnitt eine **Parabelfläche** zu beiden Seiten der Parabelaxe, dann ist $\xi' = \frac{3}{5}a$, $\eta' = 0$ und nach 23):

$$\varrho^2 = \tfrac{3}{7}a^2\sin^2\alpha' + \tfrac{1}{5}b^2\sin^2\beta';$$

schreitet nun der Scheitel der Parabel auf einer in der XZ-Ebene liegenden **cubischen Parabel** fort, deren Gleichung $x = Az^3$ lautet, und dreht sich die Parabelfläche beim Fortschreiten so, dass:

$$\sin\varphi = \frac{z}{h}$$

ist, dann wird:

$$\xi_1 = Az^3 + \frac{3a}{5h}\sqrt{h^2 - z^2}, \quad \eta_1 = \frac{3az}{5h},$$

$$\sin^2\alpha' = \sin^2\alpha + \frac{z^2}{h^2}\cos^2\alpha - \frac{2z}{h}\sqrt{h^2 - z^2}\cos\alpha\cos\beta - \frac{z^2}{h^2}\cos^2\beta,$$

$$\sin^2\beta' = \sin^2\beta - \frac{z^2}{h^2}\cos^2\alpha + \frac{2z}{h}\sqrt{h^2 - z^2}\cos\alpha\cos\beta + \frac{z^2}{h^2}\cos^2\beta;$$

nimmt man nun $z_0 = 0$ und $z_1 = h$, so ergiebt sich durch Einsetzung dieser Werthe in 11):

$$52)$$
$$T = M\Big[\tfrac{3}{7}a^2\sin^2\alpha + \tfrac{1}{5}b^2\sin^2\beta + (\tfrac{1}{7}a^2 - \tfrac{1}{15}b^2)(\cos^2\alpha - \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta)$$
$$+ \tfrac{2}{35}Aah^3(2\sin^2\alpha - 3\cos\alpha\cos\beta) + \tfrac{1}{3}h^2\sin^2\gamma + \tfrac{1}{7}A^2h^6\sin^2\alpha$$
$$- \tfrac{2}{5}Ah^4\cos\alpha\cos\gamma - \tfrac{3}{5}ah\cos\gamma(\cos\alpha + \cos\beta)\Big].$$

III. Die Trägheitsmomente pyramidaler Körper.

§. 13. Homogene geradkantige Pyramiden.

Bei diesen Pyramiden laufen sämmtliche Kanten in eine **Spitze** zusammen; diese wähle man als Coordinatenanfang O und lege die Grundfläche Q_1 parallel zur XY-Ebene; die Axiale ist dann eine Gerade durch O; mit den Coordinatenaxen mache die Axiale die Winkel $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, die durch die Spitze gehende Schweraxe s aber die Winkel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; man hat dann:

$$\mathfrak{x} = \frac{\cos\alpha_2}{\cos\gamma_2} z, \quad \mathfrak{y} = \frac{\cos\beta_2}{\cos\gamma_2} z,$$

$$\xi_1 = \frac{\cos\alpha_1}{\cos\gamma_1} z, \quad \eta_1 = \frac{\cos\beta_1}{\cos\gamma_1} z.$$

Die Querschnitte Q wachsen proportional den Quadraten ihrer Abstände z von der Spitze, die Trägheitshalbmesser dagegen einfach proportional diesen Abständen; ist nun die Höhe der ganzen Pyramide $= h$ und der Trägheitshalbmesser der Grundfläche Q_1 für eine durch deren Axialpunkt O_1 gelegte parallele Drehaxe $= \varrho_1$, so erhält man:

$$\varrho = \frac{\varrho_1}{h} z, \quad Q = \frac{Q_1}{h^2} z^2, \quad M = \frac{\mu Q_1}{h^2} \int_{z_0}^{z_1} z^2 dz,$$

$$53) \ldots\ldots \quad T = M\left(\frac{\varrho_1^2}{h^2} + K\right) \frac{\int_{z_0}^{z_1} z^4 dz}{\int_{z_0}^{z_1} z^2 dz},$$

$$K = 2\frac{\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2}{\cos\gamma_1 \cos\gamma_2} + 1 - \frac{\cos^2\alpha_2 + \cos^2\beta_2}{\cos^2\gamma_2}$$

$$- \frac{\cos\alpha\cos\alpha_2 + \cos\beta\cos\beta_2 + \cos\gamma\cos\gamma_2}{\cos\gamma_2} \left[\left(\frac{2\cos\alpha_1}{\cos\gamma_1} - \frac{\cos\alpha_2}{\cos\gamma_2}\right)\cos\alpha \right.$$

$$\left. + \left(\frac{2\cos\beta_1}{\cos\gamma_1} - \frac{\cos\beta_2}{\cos\gamma_2}\right)\cos\beta + \cos\gamma\right].$$

Macht aber die Drehaxe mit der Schweraxe und mit der Axiale die Winkel ϑ_1 und ϑ_2, die Axiale mit der Schweraxe aber den Winkel ϑ_3, dann wird:

$$K = \frac{2\cos\vartheta_3}{\cos\gamma_1\cos\gamma_2} - \frac{1}{\cos^2\gamma_2} - \frac{\cos\vartheta_2}{\cos\gamma_2}\left(\frac{2\cos\vartheta_1}{\cos\gamma_1} - \frac{\cos\vartheta_2}{\cos\gamma_2}\right)$$
$$= \frac{2\cos\vartheta_3 - 2\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2}{\cos\gamma_1\cos\gamma_2} - \frac{\sin^2\vartheta_2}{\cos^2\gamma_2}.$$

Wählt man die Schweraxe s als Axiale, so hat man $\vartheta_3 = 0$, $\vartheta_1 = \vartheta_2$, $\gamma_1 = \gamma_2$, $\cos\gamma_1 = \frac{h}{s}$ zu setzen, folglich:

$$K = \frac{1}{\cos^2\gamma_1} - \frac{\cos^2\vartheta_1}{\cos^2\gamma_1} = \frac{s^2\sin^2\vartheta_1}{h^2};$$

wählt man dagegen die Drehaxe selbst als Axiale, dann wird $\vartheta_2 = 0$, $\vartheta_3 = \vartheta_1$, $\gamma_2 = \gamma$ und:

$$K = 0.$$

Als Trägheitsmoment für die ganze Pyramide aber erhält man (bei $z_0 = 0$ und $z_1 = h$):

$$54) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad T = \tfrac{3}{5} M(\varrho_1^2 + Kh^2) = \tfrac{3}{5} M\varrho_0^2,$$

wobei ϱ_0 den Trägheitshalbmesser der Grundfläche für die Drehaxe D bedeutet.

§. 14. Homogene krummkantige Pyramiden mit gerader Axiale.

Am einfachsten legt man hier die Drehaxe D durch den Punkt der zu den Querschnitten parallelen XY-Ebene, in welchem die Axiale diese Ebene schneidet, wählt also diesen Punkt als Coordinatenanfang: macht nun die Axiale mit den Coordinatenaxen und der Drehaxe wieder die Winkel α_2, β_2, γ_2, ϑ_2, ist also wieder:

$$\mathfrak{r} = \frac{\cos\alpha_2}{\cos\gamma_2} z = Az \quad \text{und} \quad \mathfrak{y} = \frac{\cos\beta_2}{\cos\gamma_2} z = Bz,$$

dann erhält man, wenn $K = 2 - \frac{2\cos\vartheta_2\cos\gamma}{\cos\gamma_2} - \frac{\sin^2\vartheta_2}{\cos^2\gamma_2}$ gesetzt wird,

$$M = \mu\int_{z_0}^{z_1} Q dz,$$

55)

$$T = \mu\int_{z_0}^{z_1} Q dz\,[\varrho^2 + Kz^2 + \frac{2z}{\cos\gamma_2}\{\xi_1(\cos\alpha_2 - \cos\vartheta_2\cos\alpha)$$
$$+ \eta_1(\cos\beta_2 - \cos\vartheta_2\cos\beta)\}].$$

Wesentlich einfacher gestaltet sich die vorstehende Formel, wenn die Schwerpunkte der Querschnitte sämmtlich in der Axiale liegen, dann ergiebt sich nämlich wieder:

$$56) \;.\;.\;.\;.\;.\quad T = \mu \int_{z_0}^{z_1} Q dz \left[\varrho^2 + \frac{\sin^2\vartheta_2}{\cos^2\gamma_2} z^2\right].$$

A. Sind die Querschnitte **Rechtecke**, deren Eckpunkt A in der Z-Axe liegt, während die Enden der in A zusammenstossenden Seiten a und b auf semicubischen Parabeln liegen, deren Gleichungen

$$\frac{a^2}{a_1^2} = \frac{b^2}{b_1^2} = \frac{z^3}{h^3}$$

sind, wobei a_1 und b_1 die Seiten des Rechtecks in der Höhe h bedeuten. Hier ist $\gamma_2 = 0$, $\alpha_2 = \beta_2 = \frac{1}{2}\pi$, $\vartheta_2 = \gamma$,

$$\xi_1 = \tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}a_1 \sqrt{\frac{z^3}{h^3}}, \quad \eta_1 = \tfrac{1}{2}b = \tfrac{1}{2}b_1 \sqrt{\frac{z^3}{h^3}},$$

$$Q = ab = a_1 b_1 \frac{z^3}{h^3}, \quad M = \mu \frac{a_1 b_1}{h^3} \int_0^h z^3 dz = \tfrac{1}{4}\mu a_1 b_1 h,$$

$$\begin{aligned}\varrho^2 &= \tfrac{1}{6}(2a^2 \sin^2\alpha + 2b^2 \sin^2\beta - 3ab \cos\alpha \cos\beta)\\ &= \tfrac{1}{6}(2a_1 \sin^2\alpha + 2b_1 \sin^2\beta - 3a_1 b_1 \cos\alpha \cos\beta)\frac{z^3}{h^3},\\ &= \varrho_1^2 \frac{z^3}{h^3},\end{aligned}$$

$$57) \quad T = 4M\left[\tfrac{1}{7}\varrho_1^2 + \tfrac{1}{6}h^2 \sin^2\gamma - \tfrac{2}{13}h \cos\gamma(a_1 \cos\alpha + b_1 \cos\beta)\right].$$

B. Die Querschnitte seien **regelmässige Vielecke**; der Halbmesser des umschriebenen Kreises in der Höhe h sei R, in der Höhe z aber $r = R\sqrt{\frac{z}{h}}$, dann findet man nach 28) und 56):

$$\varrho^2 = \frac{1}{12}\left(2 + \cos\frac{2\pi}{n}\right)(2 - \sin^2\gamma) R^2 \frac{z}{h} = \varrho_1^2 \frac{z}{h},$$

$$M = \tfrac{1}{2}n \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \frac{R^2\mu}{h} \int_0^h z dz = \tfrac{1}{4}n \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \mu R^2 h,$$

$$58) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad T = M\left[\tfrac{2}{3}\varrho_1^2 + \tfrac{1}{2}h^2 \frac{\sin^2\vartheta_2}{\cos^2\gamma_2}\right].$$

§. 15. Homogene krummkantige Pyramiden mit krummer Axiale.

Für diese hat man in der allgemeinen Formel 11) $dh = dz$ zu setzen und μ als constant vor das Integralzeichen zu nehmen.

A. Die Querschnitte seien **Vollkreise**, deren Halbmesser r wie beim Kreiskegel nach dem Gesetze $\frac{r}{R}=\frac{z}{h}$ wachsen, deren Mittelpunkte aber auf dem Durchschnitt zweier parabolischer Cylinder liegen, so dass $\frac{\mathfrak{x}^2}{a^2}=\frac{z}{h}=\frac{\mathfrak{y}^2}{b^2}$; da ausserdem $\xi_1=\mathfrak{x}$ und $\eta_1=\mathfrak{y}$ ist, so ergiebt sich:

$$Q=\frac{\pi R^2 z^2}{h^2},\quad M=\frac{\pi R^2\mu}{h^2}\int_0^h z^2 dz=\tfrac{1}{3}\pi\mu R^2 h,$$

$$\varrho^2=\tfrac{1}{4}(2-\sin^2\gamma)\frac{R^2 z^2}{h^2}=\varrho_1{}^2\frac{z^2}{h^2},$$

$$T=\frac{3M}{h^3}\int_0^h z^2 dz\Big[\varrho_1{}^2\frac{z^2}{h^2}+\frac{a^2\sin^2\alpha+b^2\sin^2\beta}{h}z+z^2\sin^2\gamma-2ab\cos\alpha\cos\beta\frac{z}{h}$$
$$-2(a\cos\alpha+b\cos\beta)z\sqrt{\frac{z}{h}}\cos\gamma\Big],$$

$$\text{59)}\quad T=M\Big[\tfrac{3}{5}\varrho_1{}^2+\tfrac{3}{4}a^2\sin^2\alpha+\tfrac{3}{4}b^2\sin^2\beta+\tfrac{3}{5}h^2\sin^2\gamma-\tfrac{3}{2}ab\cos\alpha\cos\beta$$
$$-\tfrac{4}{3}(a\cos\alpha+b\cos\beta)h\cos\gamma\Big].$$

B. Sind die Querschnitte **gleichschenklige Dreiecke**, deren Grundlinie g parallel OY, deren Höhe k in OX' liegt und deren Spitzen sich auf dem Durchschnitte eines parabolischen und eines cubisch-parabolischen Cylinders befinden, so dass

$$\frac{\mathfrak{x}^3}{a^3}=\frac{z}{h}=\frac{\mathfrak{y}^2}{b^2},$$

und wachsen die Querschnitte nach dem Gesetze $\frac{g}{g_1}=\frac{k}{k_1}=\sqrt{\frac{z}{h}}$, dann erhält man:

$$Q=\tfrac{1}{2}g_1 k_1\frac{z}{h},\quad M=\tfrac{1}{4}\mu g_1 k_1 h,\quad \varrho^2=\tfrac{1}{3}[k_1{}^2\sin^2\alpha+\tfrac{1}{12}g_1\sin^2\beta]\frac{z}{h}=\varrho_1{}^2\frac{z}{h},$$

$$\eta_1=\mathfrak{y},\quad \xi_1=\mathfrak{x}+\tfrac{2}{3}k=\mathfrak{x}+\tfrac{2}{3}k_1\sqrt{\frac{z}{h}},$$

$$T=\tfrac{1}{3}\frac{\mu g_1 k_1}{h}\int_0^h z\,dz\Big[\varrho_1{}^2\frac{z}{h}+a\sqrt[3]{\frac{z}{h}}\Big(a\sqrt[3]{\frac{z}{h}}+\tfrac{4}{3}k_1\sqrt{\frac{z}{h}}\Big)\sin^2\alpha$$
$$+\frac{z}{h}b^2\sin^2\beta+z^2\sin^2\gamma-a\sqrt[3]{\frac{z}{h}}\cos\alpha\Big(\sqrt{\frac{z}{h}}b\cos\beta+z\cos\gamma\Big)$$
$$-\sqrt{\frac{z}{h}}b\cos\beta\Big\{\Big(a\sqrt[3]{\frac{z}{h}}+\tfrac{4}{3}k_1\sqrt{\frac{z}{h}}\Big)\cos\alpha+z\cos\gamma\Big\}$$
$$-z\cos\gamma\Big\{\Big(a\sqrt[3]{\frac{z}{h}}+\tfrac{4}{3}k_1\sqrt{\frac{z}{h}}\Big)\cos\alpha+\sqrt{\frac{z}{h}}b\cos\beta\Big\}\Big].$$

$$60)\quad T = M[\tfrac{2}{5}\varrho_1^2 + (\tfrac{3}{4}a^2 + \tfrac{16}{17}ak_1)\sin^2\alpha + \tfrac{2}{3}b^2\sin^2\beta$$
$$+ \tfrac{1}{2}h^2\sin^2\gamma - \tfrac{24}{17}ab\cos\alpha\cos\beta - \tfrac{6}{5}ah\cos\alpha\cos\gamma$$
$$- \tfrac{8}{9}bk_1\cos\alpha\cos\beta - \tfrac{4}{7}h\cos\gamma(2b\cos\beta + \tfrac{4}{3}k_1\cos\alpha)].$$

§. 16. Homogene gewundene Pyramiden.

Auch hier (wie in §. 12.) sind die Werthe von ξ_1 und η_1, α', β' und γ', aus 12) in Formel 11) einzusetzen, z. B.:

A. Wählt man **Ellipsen** als Querschnitte, lässt man die Halbaxen a und b derselben so wachsen, dass

$$\frac{a^2}{a_1^2} = \frac{c_1^2 - z^2}{c_1^2} = \frac{b^2}{b_1^2}$$

ist, *und* bestimmt man, dass die Mittelpunkte der Ellipsen auf der OZ liegen, so erhält man einen gewundenen Körper, welcher dem dreiaxigen Ellipsoid entspricht, und es wird:

$$x = y = 0 = \xi_1 = \eta_1,$$

$$Q = ab\pi = \frac{a_1 b_1 \pi}{c_1^2}(c_1^2 - z^2), \quad M = \mu\frac{a_1 b_1 \pi}{c_1^2}\int_{-c_1}^{c_1}(c_1^2 - z^2)dz = \tfrac{4}{3}\mu a_1 b_1 c_1 \pi,$$

$$\varrho^2 = \tfrac{1}{4}\frac{a_1^2\sin^2\alpha' + b_1^2\sin^2\beta'}{c_1^2}(c_1^2 - z^2).$$

Vollendet nun die Ellipse eine Umdrehung, während sie sich auf OZ um c_1 fortbewegt, so entspricht der Höhe z der Drehungswinkel

$$\varphi = \frac{2\pi}{c_1}z = \tfrac{1}{2}Nz,$$

und es ist ähnlich wie in §. 12. A.:

$$\varrho^2 = \frac{c_1^2 - z^2}{4c_1^2}[(a_1^2 + b_1^2)(1 - \tfrac{1}{2}\sin^2\gamma) - \tfrac{1}{2}(a_1^2 - b_1^2)\sin^2\gamma\cos(2\varphi_0 - Nz)]$$
$$= \frac{c_1^2 - z^2}{c_1^2}[A - B\cos(2\varphi_0 - Nz)],$$

$$T = \mu\frac{a_1 b_1 \pi}{c_1^2}\int_{-c_1}^{c_1}(c_1^2 - z^2)dz\left[\frac{c_1^2 - z^2}{c_1^2}\{A - B\cos(2\varphi_0 - Nz)\} + z^2\sin^2\gamma\right],$$

$$61)\quad T = M[\tfrac{1}{10}(a_1^2 + b_1^2)(2 - \sin^2\gamma) + \tfrac{1}{5}c_1^2\sin^2\gamma$$
$$+ \frac{9}{512\pi^4}(a_1^2 - b_1^2)\sin^2\gamma\cos 2\varphi_0].$$

B. Sind die Querschnitte **regelmässige Figuren**, deren

Mittelpunkte sämmtlich in der OZ und deren Eckpunkte auf der Kugelfläche $r^2 = R^2 - z^2$ liegen, so ist:

$$\xi_1 = \eta_1 = 0 = \mathfrak{x} = \mathfrak{y}, \quad Q = n \cos\frac{\pi}{n} \sin\frac{\pi}{n} r^2 = Ar^2, \quad M = \tfrac{4}{3}\mu A R^3;$$

da nun nach 28)

$$\varrho^2 = \tfrac{1}{12} r^2 \left(2 + \cos\frac{2\pi}{n}\right)(2 - \sin^2\gamma) = Br^2$$

ist, so hat die Drehung auf ϱ keinen Einfluss; es ergiebt sich demnach für irgend welches Gesetz der Drehung der Querschnitte:

$$T = \mu A \int_{-R}^{R} r^2 dz \left[Br^2 + z^2 \sin^2\gamma\right] = \tfrac{1}{5} M R^2 \left[4B + \sin^2\gamma\right].$$

§. 17. Schlusswort.

Ausser den bisher betrachteten Körpern (Prismen und Pyramiden) giebt es noch viele andere, bei denen sich durch die Anwendung der Formel 10) oder 11) die Ermittelung des Trägheitsmoments wesentlich vereinfacht. Einige Andeutungen über dieselben mögen hier genügen; zu einer weiteren Betrachtung derselben bietet sich vielleicht später eine Gelegenheit. Die Anwendung der Formel 10) oder 11) setzt voraus, dass sich die darin vorkommenden Grössen μ, Q, dh, ϱ, ξ_1, η_1, ζ_1 durch die Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ des Axialpunktes ausdrücken lassen. Diess ist nun unter Andern auch noch der Fall, wenn die Querschnitte zwar nicht congruent oder ähnlich, aber doch Figuren derselben Art, z. B. lauter Rechtecke, sind. Diese Körper würden bei parallelen Querschnitten als drittes Glied zu den eben betrachteten Prismen und Pyramiden kommen und etwa Pyramidoide genannt werden können. Es gehören zu ihnen z. B. gewisse Rotationskörper, welche den Raum zwischen zwei verschiedenen Rotationsflächen ausfüllen und bei denen also die Querschnitte senkrecht zur Rotationsaxe ringförmige Kreissectoren oder volle Kreise sein können; sonst lassen sich die Rotationskörper zu den in §. 14. betrachteten Körpern zählen. — Andere grosse Gruppen von Körpern erscheinen bei congruenten, ähnlichen oder wenigstens gleichartigen Querschnitten, wenn die Querschnitte z. B. sich sämmtlich in einer Geraden schneiden oder sämmtlich auf der Axiale senkrecht stehen und dergleichen mehr. Als besondere Unterarten der eben genannten beiden Klassen können die schraubenförmig gewundenen Körper und auch wieder die Rotationskörper angesehen werden.

besondere Aufmerksamkeit erfordert dabei zum Theil die Formel für das Volumendifferenzial $dV = Qdh$; mitunter kann man bei ihrer Aufstellung mit Vortheil von der Guldin'schen Regel Gebrauch machen.

Berichtigung. S. 240 Z. 7. v. u. lies $r = n = 0$ statt $x = y = 0$.

XIV.

Ueber die Berücksichtigung des Fehlers, welcher bei Berechnung der Auf- und Untergänge der Sonne und des Mondes dadurch entsteht, dass der zuerst auf- oder untergehende Punkt des Randes des Gestirns nicht genau die in den Ephemeriden angegebene Declination des Mittelpunkts desselben hat.

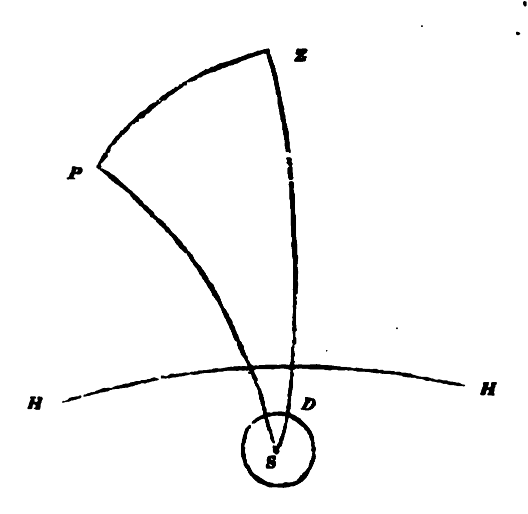
Von

Herrn Doctor *D. K. Kokides*,

Adjunct bei der Sternwarte in Athen.

Bei der Berechnung von Auf- und Untergängen der Sonne und des Mondes, wobei man Refraction und Halbmesser berücksichtigt, darf man, besonders an etwas weit vom Aequator entfernten Orten, eigentlich auch nicht unberücksichtigt lassen, dass der Punkt des Randes des Gestirnes, der zuerst aufgeht, nicht dieselbe Declination wie der Mittelpunkt hat, welche letztere in den astronomischen Ephemeriden angegeben wird, und aus der man mit einem angenommenen genäherten Momente des Auf- oder Unterganges die Declination des Mittelpunkts für die Zeit des Auf- oder Unterganges mit hinreichender Schärfe bestimmen kann. Den oben bezeichneten Fehler kann man aber durch folgendes Verfahren beseitigen, welches ich anderswo nicht angegeben gefunden habe.

In nachstehender Figur



seien HH der Horizont, P der Pol der täglichen Umdrehung, Z das Zenith des Ortes, also PZ der Meridian, S der Mittelpunkt des Gestirnes und D der Punkt des Gestirns, der zuerst aufgeht. Ferner sei φ die Polhöhe des Ortes, δ die Declination von S, gegeben in den Ephemeriden, also $90^0-\delta$ der Abstand vom Pole, θ der Betrag der Refraction im Horizonte, R der Halbmesser des Gestirns und π seine Parallaxe, welches sämmtlich bekannte Grössen sind. In dem Dreiecke PZS sind hiernach die drei Seiten bekannt, nämlich:

$$PZ=90^0-\varphi,\quad PS=90^0-\delta,\quad ZS=90^0+(\theta+R-\pi).$$

Durch diese Grössen wollen wir nun den Stundenwinkel $ZPD=T$, d. h. die Zeit des ersten Erscheinens der Sonne, bestimmen. Dazu nennen wir A den Winkel PZS im Dreiecke PZS. Um denselben zu bestimmen, haben wir in diesem Dreiecke:

$$\sin\delta=-\sin(\theta+R-\pi).\sin\varphi+\cos(\theta+R-\pi).\cos\varphi.\cos A,$$

woraus sich

$$\cos A=\frac{\sin\delta}{\cos(\theta+R-\pi).\cos\varphi}+\mathrm{tg}(\theta+R-\pi)\,\mathrm{tg}\,\varphi$$

ergiebt.

Indem nun im zweiten Gliede dieser Gleichung nur $\sin\delta$ veränderlich ist (wenn man die kleinen Aenderungen von R, π, wie auch die Veränderungen von θ, welche sich vorher nicht bestimmen lassen, unberücksichtigt lässt), kann man A, besonders mit

Hülfe der Gauss'schen Logarithmen, sehr schnell berechnen. Weiter sind nun in dem Dreiecke *PDZ* bekannt die Seiten $PZ = 90^0 - \varphi$, $ZD = 90^0 + \theta$ und der Winkel $PZD = A$. Um nun den Winkel T zu bestimmen, hat man mit Anwendung der Neper'schen Analogien, wenn Π den Winkel *PDZ* bezeichnet:

$$\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}(T+\Pi) = \mathrm{ctg}\tfrac{1}{2}A \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}[(90^0+\theta)-(90^0-\varphi)]}{\cos\frac{1}{2}[(90^0+\theta)+(90^0-\varphi)]}$$

und

$$\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}(T-\Pi) = \mathrm{ctg}\tfrac{1}{2}A \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}[(90^0+\theta)-(90^0-\varphi)]}{\sin\frac{1}{2}[(90^0+\theta)+(90^0-\varphi)]},$$

woraus man T schnell berechnen kann, indem in den zweiten Gliedern dieser Gleichungen für denselben Ort nur $\mathrm{ctg}\frac{1}{2}A$ veränderlich ist.

Um den Fehler zu bestimmen, welchen man begeht, wenn man den Unterschied der Declination des zuerst aufgehenden Randpunktes und des Mittelpunktes vernachlässigt, hat man aus dem Dreiecke *SZP*:

$$-\sin(R+\theta-\pi) = \sin\varphi.\sin\delta + \cos\varphi.\cos\delta.\cos T,$$

und durch Differenziirung dieser Formel, indem man δ und T als variabel ansieht:

$$0 = (\sin\varphi.\cos\delta - \cos\varphi.\sin\delta.\cos T).d\delta - \cos\varphi.\cos\delta.\sin T.dT$$

oder, weil

$$\sin\varphi.\cos\delta - \cos\varphi.\sin\delta.\cos T = \cos\Pi.\cos(\theta+R-\pi)$$

und

$$\cos(\theta+R-\pi)$$

sehr nahe $= 1$ ist:

$$dT = \frac{\cos\Pi.d\delta}{\cos\varphi.\cos\delta.\sin T},$$

woraus man sieht, dass für den Polen nahe Gegenden und in der Nähe der Solstitien, wo T beträchtlich von 90^0 abweicht, der Fehler bedeutend werden kann.

Um das Gesagte auf ein Beispiel anzuwenden, sei der Auf- und Untergang der Sonne für Athen. 1866. Januar 1 zu berechnen.

Um zuerst den genäherten Moment des Auf- und Unterganges der Sonne zu bestimmen, um dadurch die Declination scharf genug für die genauen Momente dieser Erscheinungen zu erhal-

ten, berechnet man diese Momente mit dem in den Tafeln für jeden Mittag gegebenen δ, den Stundenwinkel T ohne Berücksichtigung von θ, R und π und des Unterschiedes von δ zwischen Mittag und den Momenten des Auf- und Unterganges. Unter dieser Voraussetzung ist $ZS = 90^0$, folglich:

$$\cos T = -\operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\delta.$$

Für unser Beispiel haben wir aus dem Nautical Almanac für 1866 für Greenwicher wahren Mittag $\delta = -23^0\ 0',3$ oder für den wahren Mittag in Athen ($1^h\ 34^m,9$ östlich von Greenwich) mit der im N. A. für Januar gegebenen stündlichen Aenderung $12'',5$ von δ, $\delta = -23^0\ 0',6$.

Mit Hülfe dieses Werthes haben wir für das genäherte T_a des Aufgangs und T_u des Untergangs:

$$T_a = 12^h - 4^h 43^m \qquad \delta_a = -23^0\ 1',6$$

$$T_u = 12^h + 4^h 43^m \qquad \delta_u = -22^0\ 59',6$$

woraus für $\theta = 34',9$, $R = 16',0$, $\pi = 0',1$:

$$A_a = 118^0\ 59',6, \quad A_u = 118^0\ 57',0$$

die genauen

$$T_a = 4^h\ 47^m,9, \quad T_u = 4^h\ 48^m,1$$

folgen, und sich ergiebt, dass die Sonne in wahrer Zeit

aufgeht um $7^h\ 12^m,1$,
untergeht um $4^h\ 48^m,1$.

Will man diese Momente in mittlerer Zeit haben, so fügt man die Zeitgleichung $3^m,9$ für Januar 1 hinzu und erhält dadurch

für den Aufgang $7^h\ 16^m,0$,
für den Untergang $4^h\ 52^m,0$.

Hat man mehrere Werthe zu berechnen, so muss man schliesslich die Rechnung tabellarisch zusammenstellen.

XV.

Neue Entwickelung der Grundformeln der sphärischen Astronomie mit völliger Beseitigung jeder eigentlichen Parallaxen-Rechnung und mit verschiedenen Anwendungen.

Von
dem Herausgeber.

Einleitung.

Bei der Entwickelung der Grundformeln der sphärischen Astronomie werden nach der seit sehr alter Zeit jetzt allgemein üblichen Darstellungsweise die Dimensionen der Erde gegen die Entfernungen der übrigen Weltkörper von derselben als verschwindend klein angesehen, oder die Erde wird als ein blosser Punkt im Raume betrachtet, was allerdings für die Fixsterne mit einer Näherung zulässig und verstattet ist, welche so gross ist, dass man sie, was die praktische Anwendung betrifft, als völlige Genauigkeit ansehen kann. Für die übrigen Weltkörper ist jedoch die erwähnte Voraussetzung bekanntlich nicht mehr zulässig, vielmehr müssen für diese Weltkörper die Dimensionen der Erde und die Entfernungen der Weltkörper von derselben in Betracht gezogen und in Rechnung genommen werden, wodurch, wie Jeder weiss, schon seit sehr alter Zeit die Lehre von der Parallaxe in die Astronomie eingeführt worden ist, welche den Zweck hat, den Uebergang von dem ersten der beiden vorher genannten Fälle zu dem zweiten zu vermitteln.

Um diesen einleitenden Bemerkungen noch einen anderen Ausdruck zu geben, kann man auch sagen, dass jeder Beobachter die Grundformeln der Astronomie nur für und in Bezug auf seinen besonderen Standpunkt, den er auf der Oberfläche der

Erde einnimmt, also in Bezug auf seinen besonderen Beobachtungsort entwickelt, und sich dann der Lehre von der Parallaxe bedient, um seine Beobachtungen und Rechnungen auf den Mittelpunkt der Erde, gewissermassen als einen allgemeinen Standpunkt oder Beobachtungsort aller Beobachter zurückzuführen, wodurch denn in der That auch die astronomischen Beobachtungen und Rechnungen, ja die ganze astronomische Wissenschaft, erst zu einem wahren Gemeingut, und die Vergleichung und Combinirung der Beobachtungen verschiedener Beobachter unter einander ermöglicht wird, woraus die grosse Wichtigkeit der Lehre von der Parallaxe für unsere ganze Wissenschaft deutlich erhellet.

Ich weiss sehr wohl, dass es — um so zu sagen — mit einer gewissen wissenschaftlichen Gefahr verbunden ist, an solchen seit Jahrhunderten in der Wissenschaft eingebürgerten Lehren und Methoden, namentlich dann, wenn dieselben, wie es hier in der That der Fall ist, sich im Ganzen und im Allgemeinen für die Praxis als genügend und ausreichend, ja selbst vielfach als bequem erwiesen und bewährt haben, in irgend einer Weise zu rütteln und etwas ändern zu wollen. Diese Ueberlegung kann mich jedoch nicht abhalten, hier meine Ueberzeugung dahin auszusprechen, dass ich die vorher in der Kürze charakterisirte, seit undenklicher Zeit allgemein übliche Methode, und mit derselben also natürlich auch die ganze Lehre von der Parallaxe, so wie dieselbe jetzt in die Wissenschaft eingeführt ist, keineswegs einer wirklich strengen Wissenschaft entsprechend, sondern gewissermassen nur für einen Nothbehelf halten kann, indem man nach meiner Meinung vielmehr die Erde gleich von vorn herein als einen Körper von bestimmter Gestalt und Ausdehnung betrachten, und für diesen der Natur allein entsprechenden und in derselben wirklich Statt findenden Fall, natürlich zugleich mit gehöriger Berücksichtigung der Entfernungen der Weltkörper von der Erde, die astronomischen Grundformeln entwickeln muss, wenn die Astronomie auch in diesem ihrer Theile eine wirklich wissenschaftliche Gestalt erhalten soll, und wenn alle Aufgaben der sphärischen Astronomie mit wirklicher wissenschaftlicher Strenge und Allgemeinheit aufgelöst werden sollen. Schlägt man aber einen solchen, nach meiner Ueberzeugung, wie gesagt, allein streng wissenschaftlichen Weg gleich vom Anfange an ein, und bestimmt dann, als eine natürliche, nothwendige und unabweisbare Folge hieraus, auch die astronomischen Grundbegriffe in entsprechender, von der gewöhnlichen, wie es nicht anders sein kann, hin und wieder etwas abweichender Weise; so braucht man die eigentliche Lehre von der Parallaxe gar nicht mehr, und die

jedenfalls sehr lästigen Unterscheidungen zwischen wahrem und scheinbarem Azimuth, wahrer und scheinbarer Höhe, wahrer und scheinbarer Rectascension und Declination, u. s. w., welche durch die Lehre von der Parallaxe in die Wissenschaft gebracht worden sind, fallen dann ganz weg.

Wenn ich bis jetzt lediglich die rein wissenschaftliche Seite, den rein wissenschaftlichen Standpunkt festgehalten, und dem Nutzen der Lehre von der Parallaxe für die Praxis sein allerdings in gewisser Rücksicht nicht bestreitbares Recht gelassen habe; so stehe ich doch nicht an, selbst in dieser Beziehung noch einen Schritt weiter zu gehen, indem ich glaube behaupten zu dürfen und für die Richtigkeit dieser Behauptung durch das Folgende den deutlichen Beweis zu führen versuchen werde, dass ich es für möglich halte, die Formeln, durch welche die Hauptaufgaben der sphärischen Astronomie gelöst werden, mit Hülfe der im Folgenden zu entwickelnden neuen ganz allgemeinen Grundformeln in völliger Strenge so zu gestalten und darzustellen, dass man bei ihrer Anwendung besonderer Parallaxen-Formeln oder Parallaxen-Rechnungen gar nicht mehr bedarf, ohne dass — wenigstens für den wissenschaftlichen, mit dem allgemeinen und numerischen Calcul gehörig vertrauten Astronomen — an Bequemlichkeit etwas verloren geht, insofern er sich nicht mit blossen Näherungen begnügen, sondern vollkommene Schärfe erreichen will.

Alles, was ich jetzt im Allgemeinen angedeutet habe, will ich im Folgenden auf analytischem Wege vollständig entwickeln und ausführen, indem diese Abhandlung, um dies noch besonders hervorzuheben, den Zweck hat, die Lehre von der Parallaxe aus der Astronomie, wo möglich, ganz zu entfernen, und zunächst und vorzugsweise die wichtigsten Aufgaben der sphärischen Astronomie so aufzulösen, dass eigentliche, sogenannte Parallaxen-Rechnungen dabei gar nicht mehr nöthig sind, was ich selbst an in der gewöhnlichsten Praxis fast täglich zur Anwendung kommenden Aufgaben, wie der Bestimmung der Zeit aus einzelnen Sonnenhöhen und ähnlichen Aufgaben, zu zeigen hoffe.

Um nicht missverstanden zu werden, glaube ich noch bemerken zu müssen, dass es nicht meine Meinung sein kann, die Berücksichtigung der Parallaxe sei nicht nöthig oder überflüssig; gerade das Gegentheil ist meine Meinung, denn die Entfernung der Weltkörper von der Erde wird, soll und muss in allen zu entwickelnden Formeln vorkommen, und unter dieser Form also auch die sogenannte Parallachse; aber eigentliche Parallaxenrechnungen als Correctionsrechnungen in allen

solchen Fällen, wo man die Parallaxe ursprünglich der Kürze und Leichtigkeit wegen vorläufig vernachlässigte, sollen ganz wegfallen, die Parallaxe soll in allen Formeln schon selbst enthalten und diese Formeln sollen demnach ganz genau und völlig streng sein; nur Dieses ist meine Meinung und kann nur meine Meinung sein.

---

§. 1.

Wir betrachten die Erde als ein Rotations-Ellipsoid, welches durch Umdrehung einer Ellipse, deren grosse und kleine Halbaxe a und b sein mögen, um ihre kleine Axe entstanden ist. Die Drehungsaxe, also die kleine Axe $2b$ der erzeugenden Ellipse, heisst die Erdaxe; der Mittelpunkt der erzeugenden Ellipse oder des Ellipsoids, welcher durch O bezeichnet werden mag, heisst der Mittelpunkt der Erde; und die im Mittelpunkte auf der Erdaxe senkrecht stehende Ebene wird der Aequator genannt. Der Aequator theilt die Erde und ihre Oberfläche in zwei Hälften, welche wir die positive Erdhälfte und die negative Erdhälfte nennen werden; von der Erdaxe wird die Oberfläche der Erde in zwei Punkten geschnitten, welche die Pole heissen, und der positive Pol und der negative Pol genannt werden sollen, jenachdem sie in der positiven und negativen Erdhälfte liegen.

Denken wir uns nun auf der Erdoberfläche einen beliebigen Punkt A, welcher der Beobachtungsort genannt werden mag, und lassen von der Erdaxe eine durch diesen Punkt gehende Ebene ausgehen, so heisst diese Ebene der terrestrische Meridian des Beobachtungsorts. Die im Beobachtungsorte auf der Erdoberfläche, nämlich auf der dieselbe im Beobachtungsorte berührenden Ebene, senkrecht stehende Gerade wird die Normale oder auch die Vertikale des Beobachtungsorts genannt. Der 90^0 nicht übersteigende Neigungswinkel dieser Normale oder Vertikale gegen die Ebene des Aequators, indem man diesen Winkel, jenachdem der Beobachtungsort in der positiven oder negativen Erdhälfte liegt, als positiv oder negativ betrachtet, heisst die Polhöhe des Beobachtungsorts und soll im Folgenden durch $\bar{\omega}$ bezeichnet werden. Die von dem Mittelpunkte O der Erde nach dem Beobachtungsorte A gezogene Gerade OA heisst der dem Beobachtungsorte entsprechende Erdhalbmesser und wird im Folgenden durch ϱ bezeichnet werden. Der 90^0 nicht übersteigende Neigungswinkel dieses dem Beobachtungsorte ent-

sprechenden Erdhalbmessers gegen die Ebene des Aequators, indem wir auch diesen Winkel als positiv oder negativ betrachten, jenachdem der Beobachtungsort in der positiven oder negativen Erdhälfte liegt, wird die **Breite** des Beobachtungsorts genannt und soll im Folgenden durch φ bezeichnet werden. Polhöhe und Breite des Beobachtungsorts, deren absolute Werthe 90° nicht übersteigen, haben hiernach immer gleiche Vorzeichen.

Die Ebene, welche im Beobachtungsorte auf dessen Normale oder Vertikale senkrecht steht, und folglich die Erdoberfläche im Beobachtungsorte berührt, wird der **Horizont** des Beobachtungsorts genannt, und die durch die Normale und die Erdaxe gelegte, überhaupt also durch diese beiden Geraden bestimmte Ebene in ihrer ganzen Ausdehnung nach allen Seiten hin, welche jedoch von der Normale nach zwei entgegengesetzten Seiten hin ausgehend gedacht und demzufolge von der Normale in zwei, im Folgenden bestimmt von einander zu unterscheidende Theile getheilt wird, heisst der **astronomische Meridian** des Beobachtungsorts. In die Ebene desselben fällt natürlich auch der terrestrische Meridian; dessenungeachtet sind beide Meridiane wohl von einander zu unterscheiden. Die Durchschnittslinie des astronomischen Meridians mit dem Horizont wird die **Mittagslinie** des Beobachtungsorts genannt und von diesem letzteren in zwei nach entgegengesetzten Seiten hin liegende Theile getheilt, die wir, so wie die beiden vorher näher bezeichneten Theile des astronomischen Meridians, im folgenden Paragraphen noch näher und bestimmter unterscheiden werden.

§. 2.

Durch den Mittelpunkt O der Erde und den Beobachtungsort A als Anfangspunkte legen wir nun zwei rechtwinklige Coordinatensysteme der xyz und $x'y'z'$, deren Ebenen und Axen wir auf folgende Art bestimmen.

Die Ebene der xy sei die Ebene des Aequators der Erde; der positive Theil der Axe der x sei der Halbmesser des Aequators, in welchem derselbe von dem terrestrischen Meridiane des Beobachtungsorts geschnitten wird; den positiven Theil der Axe der y nehmen wir so an, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, im entgegengesetzten Sinne von der Drehung der Erde um ihre

Axe *) bewegen muss; der positive Theil der Axe der z sei von dem Mittelpunkte der Erde nach dem positiven Erdpole hin gerichtet.

Die Ebene der $x'y'$ sei die Ebene des Horizonts des Beobachtungsorts; der positive Theil der Axe der x' sei derjenige der beiden Theile, in welche die Mittagslinie von dem Beobachtungsorte getheilt wird, von dem der positive Theil der Axe der z geschnitten oder nicht geschnitten wird, jenachdem der Beobachtungsort in der positiven oder negativen Erdhälfte liegt; der positive Theil der Axe der y' werde so angenommen, dass er mit dem positiven Theile der Axe der y auf derselben Seite der Ebene des astronomischen oder terrestrischen Meridians des Beobachtungsorts liegt; der positive Theil der Axe der z' sei der ausserhalb des Erdellipsoids liegende Theil der Normale oder Vertikale des Beobachtungsorts.

Die beiden Theile, in welche die Mittagslinie des Beobachtungsorts durch diesen letzteren getheilt wird, sollen, jenachdem sie mit dem positiven oder negativen Theile der Axe der x' zusammenfallen, der positive oder negative Theil der Mittagslinie genannt werden; auf ähnliche Weise heissen die beiden Theile, in welche der astronomische Meridian des Beobachtungsorts durch dessen Normale oder Vertikale getheilt wird, jenachdem in ihnen der positive oder negative Theil der Axe der x' liegt, der positive oder negative Theil des astronomischen Meridians.

§. 3.

Zunächst wollen wir nun die Coordinaten x, y, z und x', y', z' eines ganz beliebigen Punkts im Raume, natürlich unter Zugrundelegung der beiden im vorhergehenden Paragraphen genau charakterisirten Coordinatensysteme, im Allgemeinen mit einander vergleichen.

Wenn der Beobachtungsort in der positiven Erdhälfte liegt, welchem Falle Fig. 1. entspricht, wo die Ebene des Papiers die Ebene des astronomischen oder terrestrischen Meridians ist; so ist offenbar:

$$(xx')=90^0-\bar{\omega},\quad (xy')=90^0,\quad (xz')=\bar{\omega};$$
$$(yx')=90^0,\quad (yy')=0,\quad (yz')=90^0;$$
$$(zx')=180^0-\bar{\omega},\quad (zy')=90^0,\quad (zz')=90^0-\bar{\omega};$$

*) Dass eine solche Drehung Statt finde, nehmen wir hier, wo wir kein Lehrbuch der Astronomie schreiben, ohne Weiteres an.

wenn dagegen der Beobachtungsort in der negativen Erdhälfte liegt, welchem Falle Fig. 2. entspricht, wo wiederum die Ebene des Papiers die Ebene des astronomischen oder terrestrischen Meridians ist; so ist offenbar:

$$(xx') = 90^0 - \bar{\omega}, \quad (xy') = 90^0, \quad (xz') = -\bar{\omega};$$
$$(yx') = 90^0, \quad (yy') = 0, \quad (yz') = 90^0;$$
$$(zx') = 180^0 + \bar{\omega}, \quad (zy') = 90^0, \quad (zz') = 90^0 - \bar{\omega};$$

also ist, wie sogleich erhellet, in beiden Fällen, und folglich in völliger Allgemeinheit:

$$\cos(xx') = \sin\bar{\omega}, \quad \cos(xy') = 0, \quad \cos(xz') = \cos\bar{\omega};$$
$$\cos(yx') = 0, \quad \cos(yy') = 1, \quad \cos(yz') = 0;$$
$$\cos(zx') = -\cos\bar{\omega}, \quad \cos(zy') = 0, \quad \cos(zz') = \sin\bar{\omega}.$$

Bezeichnen wir jetzt die Coordinaten des Beobachtungsorts im Systeme der xyz durch f, 0, g, so ist nach den bekannten allgemeinen Formeln der Coordinatenverwandlung:

$$x = f + x'\cos(xx') + y'\cos(xy') + z'\cos(xz'),$$
$$y = \quad x'\cos(yx') + y'\cos(yy') + z'\cos(yz'),$$
$$z = g + x'\cos(zx') + y'\cos(zy') + z'\cos(zz');$$

also, weil offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$1) \ldots\ldots\ldots \quad f = \varrho\cos\varphi, \quad g = r\sin\varphi$$

ist, nach dem Vorhergehenden:

$$2) \ldots \left\{ \begin{array}{l} x = \varrho\cos\varphi + x'\sin\bar{\omega} + z'\cos\bar{\omega}, \\ y = y', \\ z = \varrho\sin\varphi - x'\cos\bar{\omega} + z'\sin\bar{\omega}; \end{array} \right.$$

woraus durch gewöhnliche algebraische Elimination sogleich umgekehrt erhalten wird:

$$3) \ldots \left\{ \begin{array}{l} x' = -\varrho\sin(\bar{\omega} - \varphi) + x\sin\bar{\omega} - z\cos\bar{\omega}, \\ y' = \quad y, \\ z' = -\varrho\cos(\bar{\omega} - \varphi) + x\cos\bar{\omega} + z\sin\bar{\omega}. \end{array} \right.$$

Weil die Gleichung der Ellipse

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{b}\right)^2 = 1,$$

und folglich:

$$\frac{x}{a^2}+\frac{z}{b^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{b^2x}{a^2z}$$

ist; so ist die Gleichung der Normale des Beobachtungsorts:

$$z-g=\frac{a^2g}{b^2f}(x-f),$$

und nach den Lehren der analytischen Geometrie ist *folglich* i dem in Fig. 1. dargestellten Falle:

$$\operatorname{tang}\bar{\omega}=\frac{a^2g}{b^2f}=\frac{a^2}{b^2}\operatorname{tang}\varphi,$$

in dem in Fig. 2. dargestellten Falle:

$$\operatorname{tang}(180^0+\bar{\omega})=\operatorname{tang}\bar{\omega}=\frac{a^2g}{b^2f}=\frac{a^2}{b^2}\operatorname{tang}\varphi;$$

also völlig allgemein:

$$4)\ \ldots\ldots\ \operatorname{tang}\bar{\omega}=\frac{a^2g}{b^2f}=\frac{a^2}{b^2}\operatorname{tang}\varphi,$$

woraus, in Verbindung mit der Gleichung

$$\left(\frac{f}{a}\right)^2+\left(\frac{g}{b}\right)^2=1,$$

leicht folgt:

$$5)\ \ldots\ldots\ \begin{cases} f=\dfrac{a^2\cos\bar{\omega}}{\sqrt{a^2\cos\bar{\omega}^2+b^2\sin\bar{\omega}^2}}, \\ g=\dfrac{b^2\sin\bar{\omega}}{\sqrt{a^2\cos\bar{\omega}^2+b^2\sin\bar{\omega}^2}}; \end{cases}$$

wobei man nicht zu übersehen hat, dass f und $\cos\bar{\omega}$ beide stet positiv sind; oder:

$$6)\quad f=\frac{a\cos\bar{\omega}}{\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin\bar{\omega}^2}},\quad g=\frac{b\sin\bar{\omega}}{\sqrt{1+\frac{a^2-b^2}{b^2}\cos\bar{\omega}^2}};$$

oder auch:

$$6^*)\quad f=\frac{a\cos\bar{\omega}}{\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin\bar{\omega}^2}},\quad g=\frac{b^2\sin\bar{\omega}}{a\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin\bar{\omega}^2}};$$

also, weil $\varrho=\sqrt{f^2+g^2}$ ist:

$$7).\quad \varrho=\frac{\sqrt{a^4\cos\overline{\omega}^2+b^4\sin\overline{\omega}^2}}{\sqrt{a^2\cos\overline{\omega}^2+b^2\sin\overline{\omega}^2}}=a\frac{\sqrt{1-\frac{a^4-b^4}{a^4}\sin\overline{\omega}^2}}{\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin\overline{\omega}^2}};$$

folglich nach 5):

$$8)\ldots\ldots\begin{cases} f=\dfrac{a^2\varrho\cos\overline{\omega}}{\sqrt{a^4\cos\overline{\omega}^2+b^4\sin\overline{\omega}^2}},\\ g=\dfrac{b^2\varrho\sin\overline{\omega}}{\sqrt{a^4\cos\overline{\omega}^2+b^4\sin\overline{\omega}^2}};\end{cases}$$

oder:

$$9)\quad f=\frac{\varrho\cos\overline{\omega}}{\sqrt{1-\frac{a^4-b^4}{a^4}\sin\overline{\omega}^2}},\quad g=\frac{\varrho\sin\overline{\omega}}{\sqrt{1+\frac{a^4-b^4}{b^4}\cos\overline{\omega}^2}}$$

erhalten wird.

Nach 1) und 8) ist:

$$10)\ldots\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{a^2\cos\overline{\omega}}{\sqrt{a^4\cos\overline{\omega}^2+b^4\sin\overline{\omega}^2}},\\ \sin\varphi=\dfrac{b^2\sin\overline{\omega}}{\sqrt{a^4\cos\overline{\omega}^2+b^4\sin\overline{\omega}^2}};\end{cases}$$

oder nach 1) und 9):

$$11)\quad \cos\varphi=\frac{\cos\overline{\omega}}{\sqrt{1-\frac{a^4-b^4}{a^4}\sin\overline{\omega}^2}},\quad \sin\varphi=\frac{\sin\overline{\omega}}{\sqrt{1+\frac{a^4-b^4}{b^4}\cos\overline{\omega}^2}};$$

woraus man leicht:

$$12)\ldots\begin{cases}\sin(\overline{\omega}-\varphi)=\dfrac{(a^2-b^2)\sin\overline{\omega}\cos\overline{\omega}}{\sqrt{a^4\cos\overline{\omega}^2+b^4\sin\overline{\omega}^2}},\\ \cos(\overline{\omega}-\varphi)=\dfrac{a^2\cos\overline{\omega}^2+b^2\sin\overline{\omega}^2}{\sqrt{a^4\cos\overline{\omega}^2+b^4\sin\overline{\omega}^2}};\end{cases}$$

oder:

13)

$$\sin(\overline{\omega}-\varphi)=\frac{\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin\overline{\omega}\cos\overline{\omega}}{\sqrt{1-\frac{a^4-b^4}{a^4}\sin\overline{\omega}^2}},\quad \cos(\overline{\omega}-\varphi)=\frac{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin\overline{\omega}^2}{\sqrt{1-\frac{a^4-b^4}{a^4}\sin\overline{\omega}^2}}$$

erhält.

Nach 2), 11) und 3), 13) haben wir also zwischen den Coordinaten x, y, z und x', y', z' die folgenden Gleichungen:

14)

$$x=\frac{\varrho\cos\overline{\omega}}{\sqrt{1-\frac{a^4-b^4}{a^4}\sin\overline{\omega}^2}}+x'\sin\overline{\omega}+z'\cos\overline{\omega},$$

$$y=y',$$

$$z=\frac{\varrho\sin\overline{\omega}}{\sqrt{1+\frac{a^4-b^4}{b^4}\cos\overline{\omega}^2}}-x'\cos\overline{\omega}+z'\sin\overline{\omega};$$

und:

15)

$$x'=-\frac{\frac{a^2-b^2}{a^2}\varrho\sin\overline{\omega}\cos\overline{\omega}}{\sqrt{1-\frac{a^4-b^4}{a^4}\sin\overline{\omega}^2}}+x\sin\overline{\omega}-z\cos\overline{\omega},$$

$$y'=y,$$

$$z'=-\frac{(1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin\overline{\omega}^2)\varrho}{\sqrt{1-\frac{a^4-b^4}{a^4}\sin\overline{\omega}^2}}+x\cos\overline{\omega}+z\sin\overline{\omega}.$$

Die Grösse $\frac{a-b}{a}$ nennt man die Abplattung der Erde, von welcher man in den vorstehenden Formeln auch mehrfachen Gebrauch machen könnte, was aber hier einer weiteren Erläuterung nicht bedarf.

§. 4.

Der im vorhergehenden Paragraphen im Allgemeinen betrachtete Punkt (xyz) oder $(x'y'z')$ im Raume sei jetzt ein beliebiger Weltkörper, dessen Entfernung von dem Mittelpunkte der Erde und von dem Beobachtungsorte wir respective durch R und r bezeichnen wollen.

Lassen wir von der Erdaxe eine durch diesen Weltkörper gehende Ebene ausgehen, so heisst der Winkel, welchen die Durchschnittslinie dieser Ebene mit der Ebene des Aequators mit dem positiven Theile der Axe der x einschliesst, indem wir die-

sen Winkel von dem positiven Theile der Axe der x an durch den rechten Winkel (xy) hindurch nach dem positiven Theile der Axe der y hin von 0 bis 360° zählen, der **Stundenwinkel** des Weltkörpers, und soll im Folgenden durch σ bezeichnet werden; denken wir uns aber von dem Mittelpunkte der Erde nach dem Weltkörper eine Gerade gezogen, so heisst der, absolut genommen, 90° nicht übersteigende Winkel, unter welchem diese Gerade gegen die Ebene des Aequators geneigt ist, indem man diesen Winkel als positiv oder negativ betrachtet, jenachdem sich der Weltkörper auf der positiven oder negativen Seite des Aequators befindet, die **Declination** des Weltkörpers, und soll im Folgenden durch δ bezeichnet werden. Unter diesen Voraussetzungen haben wir offenbar die folgenden ganz allgemein gültigen Gleichungen:

$$1) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} x = R\cos\sigma\cos\delta, \\ y = R\sin\sigma\cos\delta, \\ z = R\sin\delta. \end{cases}$$

Lassen wir ferner von der Normale oder Vertikale des Beobachtungsorts eine durch den Weltkörper gehende Ebene ausgehen, so heisst der Winkel, welchen die Durchschnittslinie dieser Ebene mit der Ebene des Horizonts mit dem positiven Theile der Axe der x' einschliesst, indem man diesen Winkel von dem positiven Theile der Axe der x' an durch den rechten Winkel $(x'y')$ hindurch nach dem positiven Theile der Axe der y' hin von 0 bis 360° zählt, das **Azimuth** des Weltkörpers, und soll im Folgenden durch ω bezeichnet werden; denken wir uns aber von dem Beobachtungsorte aus eine Gerade nach dem Weltkörper gezogen, so heisst der, absolut genommen, 90° nicht übersteigende Winkel, unter welchem diese Gerade gegen die Ebene des Horizonts geneigt ist, indem man diesen Winkel als positiv oder negativ betrachtet, jenachdem der Weltkörper sich auf der positiven oder negativen Seite des Horizonts befindet, die **Höhe** des Weltkörpers, und soll im Folgenden durch h bezeichnet werden. Unter diesen Voraussetzungen haben wir offenbar die folgenden ganz allgemein gültigen Gleichungen:

$$2) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} x' = r\cos\omega\cos h, \\ y' = r\sin\omega\cos h, \\ z' = r\sin h. \end{cases}$$

Nach den vorstehenden Gleichungen 1) und 2) und nach den Gleichungen §. 3. 14), 15) haben wir also jetzt die folgenden Gleichungen:

3)

$$R\cos\sigma\cos\delta = \frac{\varrho\cos\bar{\omega}}{\sqrt{1-\frac{a^4-b^4}{a^4}\sin\bar{\omega}^2}} + r(\cos\omega\cos h\sin\bar{\omega} + \sin h\cos$$

$$R\sin\sigma\cos\delta = r\sin\omega\cos h,$$

$$R\sin\delta = \frac{\varrho\sin\bar{\omega}}{\sqrt{1+\frac{a^4-b^4}{b^4}\cos\bar{\omega}^2}} - r(\cos\omega\cos h\cos\bar{\omega} - \sin h\sin$$

und:

4)

$$r\cos\omega\cos h = -\frac{\frac{a^2-b^2}{a^2}\varrho\sin\bar{\omega}\cos\bar{\omega}}{\sqrt{1-\frac{a^4-b^4}{a^4}\sin\bar{\omega}^2}} + R(\cos\sigma\cos\delta\sin\bar{\omega} - \sin\delta\cos\bar{\omega})$$

$$r\sin\omega\cos h = R\sin\sigma\cos\delta,$$

$$r\sin h = -\frac{(1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin\bar{\omega}^2)\varrho}{\sqrt{1-\frac{a^4-b^4}{a^4}\sin\bar{\omega}^2}} + R(\cos\sigma\cos\delta\cos\bar{\omega} + \sin\delta\sin\bar{\omega});$$

oder:

5)

$$\cos\sigma\cos\delta = \frac{\varrho}{R}\cdot\frac{\cos\bar{\omega}}{\sqrt{1-\frac{a^4-b^4}{a^4}\sin\bar{\omega}^2}} + \frac{r}{R}(\sin h\cos\bar{\omega} + \cos\omega\cos h\sin\bar{\omega}),$$

$$\sin\sigma\cos\delta = \frac{r}{R}\sin\omega\cos h,$$

$$\sin\delta = \frac{\varrho}{R}\cdot\frac{\sin\bar{\omega}}{\sqrt{1+\frac{a^4-b^4}{b^4}\cos\bar{\omega}^2}} + \frac{r}{R}(\sin h\sin\bar{\omega} - \cos\omega\cos h\cos$$

und:

6)

$$\frac{r}{R}\cos\omega\cos h = -\frac{\varrho}{R}\cdot\frac{\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin\bar{\omega}\cos\bar{\omega}}{\sqrt{1-\frac{a^4-b^4}{a^4}\sin\bar{\omega}^2}} + \cos\sigma\cos\delta\sin\bar{\omega} - \sin\delta\cos$$

$$\frac{r}{R}\sin\omega\cos h = \sin\sigma\cos\delta,$$

$$\frac{r}{R}\sin h = -\frac{\varrho}{R}\cdot\frac{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin\bar{\omega}^2}{\sqrt{1-\frac{a^4-b^4}{a^4}\sin\bar{\omega}^2}} + \cos\sigma\cos\delta\cos\bar{\omega} + \sin\delta\sin$$

Nach §. 3. 7) ist:

$$7) \dots\dots \frac{\varrho}{R}=\frac{a}{R}\cdot\frac{\sqrt{1-\frac{a^4-b^4}{a^4}\sin\varpi^2}}{\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin\varpi^2}};$$

und setzt man nun, indem man zugleich überlegt, dass offenbar

$$\frac{\sqrt{1-\frac{a^4-b^4}{a^4}\sin\varpi^2}}{\sqrt{1+\frac{a^4-b^4}{b^4}\cos\varpi^2}}=\frac{b^2}{a^2}$$

ist:

$$8) \dots\dots \begin{cases} G_\varpi=\frac{\cos\varpi}{\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin\varpi^2}}, \\ G_\varpi'=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{\sin\varpi}{\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin\varpi^2}} \end{cases}$$

und:

$$9) \dots\dots \begin{cases} K_\varpi=\frac{\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin\varpi\cos\varpi}{\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin\varpi^2}}, \\ K_\varpi'=\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin\varpi^2}; \end{cases}$$

so ist nach 5) und 6):

10)

$$\cos\sigma\cos\delta=\frac{a}{R}G_\varpi+\frac{r}{R}(\sin h\cos\varpi+\cos\omega\cos h\sin\varpi),$$

$$\sin\sigma\cos\delta=\frac{r}{R}\sin\omega\cos h,$$

$$\sin\delta=\frac{a}{R}G_\varpi'+\frac{r}{R}(\sin h\sin\varpi-\cos\omega\cos h\cos\varpi)$$

und:

11)

$$\frac{r}{R}\cos\omega\cos h = -\frac{a}{R}K_{\varpi} + \cos\sigma\cos\delta\sin\bar{\omega} - \sin\delta\cos\bar{\omega},$$

$$\frac{r}{R}\sin\omega\cos h = \sin\sigma\cos\delta,$$

$$\frac{r}{R}\sin h = -\frac{a}{R}K_{\varpi}' + \cos\sigma\cos\delta\cos\bar{\omega} + \sin\delta\sin\bar{\omega}.$$

Der Bruch $\frac{a}{R}$ oder eigentlich der Winkel, dessen Sinus dieser Bruch ist, ist die sogenannte Aequatorial-Horizontal-Parallaxe des Weltkörpers zu der Zeit, wo R seine Entfernung vom Mittelpunkte der Erde ist, und findet sich in der einen oder anderen Form für jeden Weltkörper und die verschiedenen Zeiten in den astronomischen Tafeln oder Ephemeriden. Für die Fixsterne wird dieser Bruch seiner grossen Kleinheit wegen, weil die Entfernung derselben von dem Mittelpunkte der Erde im Verhältniss zu der halben Hauptaxe der die sphäroidische Erde erzeugenden Ellipse ungeheuer gross ist, meistens als verschwindend betrachtet, was aber immer nur als eine Näherung gelten kann.

In diesem Falle nehmen die Fundamental-Gleichungen 10) und 11) eine einfachere Gestalt an, wie in §. 6. 15) und §. 6. 16) gezeigt werden wird.

§. 5.

Die vorher durch G_{ϖ}, G_{ϖ}' und K_{ϖ}, K_{ϖ}' bezeichneten Grössen sind für jeden bestimmten Beobachtungsort Constanten, und für jeden Ort nach meiner Meinung von grosser Wichtigkeit, weshalb wir dieselben jetzt etwas näher betrachten, namentlich verschiedene zwischen ihnen Statt findende Relationen entwickeln wollen. Diese Constanten müssen für jeden Beobachtungsort zu weiterem Gebrauch ein für alle Mal berechnet werden, und zur Erleichterung dieser Rechnung werden auch die folgenden Relationen dienen.

Aus den in 8) und 9) des vorhergehenden Paragraphen gegebenen Ausdrücken dieser Constanten erhellet zuvörderst, dass dieselben sich auch auf folgende Art ausdrücken lassen:

1)

$$G_{\varpi} = \frac{a\cos\bar{\omega}}{\sqrt{a^2\cos\bar{\omega}^2 + b^2\sin\bar{\omega}^2}},\quad G_{\varpi}' = \frac{b^2\sin\bar{\omega}}{a\sqrt{a^2\cos\bar{\omega}^2 + b^2\sin\bar{\omega}^2}}$$

und:

$$2) \ldots\ldots \begin{cases} K_\varpi = \dfrac{(a^2-b^2)\sin\varpi\cos\varpi}{a\sqrt{a^2\cos\varpi^2+b^2\sin\varpi^2}}, \\ K_\varpi' = \dfrac{\sqrt{a^2\cos\varpi^2+b^2\sin\varpi^2}}{a}. \end{cases}$$

Also ist offenbar:

$$3) \ldots\ldots \begin{cases} K_\varpi = G_\varpi\sin\varpi - G_\varpi'\cos\varpi, \\ K_\varpi' = G_\varpi\cos\varpi + G_\varpi'\sin\varpi; \end{cases}$$

und folglich umgekehrt:

$$4) \ldots\ldots \begin{cases} G_\varpi = K_\varpi'\cos\varpi + K_\varpi\sin\varpi, \\ G_\varpi' = K_\varpi'\sin\varpi - K_\varpi\cos\varpi; \end{cases}$$

woraus sich sogleich:

$$5) \ldots\ldots\ldots G_\varpi^2 + G_\varpi'^2 = K_\varpi^2 + K_\varpi'^2$$

ergiebt.

Setzt man:

$$6) \ldots\ldots\ldots e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}, \quad \varepsilon^2 = \frac{a^2-b^2}{b^2};$$

so erhält man aus den Formeln 1) und 2) ferner leicht:

$$7)$$

$$\frac{G_\varpi}{G_\varpi'} = \frac{a^2}{b^2}\cot\varpi = \frac{\cot\varpi}{1-e^2},$$

$$K_\varpi K_\varpi' = \frac{a^2-b^2}{a^2}\sin\varpi\cos\varpi = e^2\sin\varpi\cos\varpi;$$

$$G_\varpi K_\varpi' = \cos\varpi,$$

$$G_\varpi' K_\varpi' = \frac{b^2}{a^2}\sin\varpi = (1-e^2)\sin\varpi;$$

$$\frac{K_\varpi}{G_\varpi} = \frac{a^2-b^2}{a^2}\sin\varpi = e^2\sin\varpi,$$

$$\frac{K_\varpi}{G_\varpi'} = \frac{a^2-b^2}{b^2}\cos\varpi = \varepsilon^2\cos\varpi.$$

Drückt man alle Constanten durch e aus, so erhält man ganz unmittelbar aus den Formeln §. 4. 8), 9):

$$8) \ldots G_\varpi = \frac{\cos\varpi}{\sqrt{1-e^2\sin\varpi^2}}, \quad G_\varpi' = \frac{(1-e^2)\sin\varpi}{\sqrt{1-e^2\sin\varpi^2}}$$

und:

$$9) \ldots K_{\varpi} = \frac{e^2 \sin\varpi \cos\varpi}{\sqrt{1-e^2\sin\varpi^2}}, \quad K_{\varpi}' = \sqrt{1-e^2\sin\varpi^2}.$$

Nach §. 3. 6*) und §. 4. 8) ist:

$$10) \ldots\ldots\ldots f = aG_{\varpi}, \quad g = aG_{\varpi}';$$

also:

$$11) \quad \varrho = \sqrt{f^2+g^2} = a\sqrt{G_{\varpi}^2 + G_{\varpi}'^2} = a\sqrt{K_{\varpi}^2 + K_{\varpi}'^2}.$$

Durch Einführung eines zwischen -90^0 und $+90^0$ liegen mittelst der Formel

$$12) \ldots\ldots\ldots \sin\psi = e\sin\varpi$$

zu bestimmenden Hülfswinkel ψ kann man die Constanten lei berechnen. Weil nämlich allgemein

$$\cos\psi = \sqrt{1-e^2\sin\varpi^2}$$

ist, so ist nach dem Obigen offenbar:

$$13) \ldots\ldots G_{\varpi} = \frac{\cos\varpi}{\cos\psi}, \quad G_{\varpi}' = \frac{(1-e^2)\sin\varpi}{\cos\psi}$$

und:

$$14) \ldots\ldots K_{\varpi} = \frac{e^2\sin\varpi\cos\varpi}{\cos\psi}, \quad K_{\varpi}' = \cos\psi.$$

Auch ist, wie man leicht findet:

$$15) \ldots\ldots G_{\varpi}' = \frac{\sin(\varpi+\psi)\sin(\varpi-\psi)}{\sin\varpi\cos\psi}$$

und:

$$16) \ldots\ldots\ldots K_{\varpi} = \cot\varpi\sin\psi\,\mathrm{tang}\,\psi.$$

Für $a=b$ oder $e=0$, wenn man also die Erde als eine K betrachtet, ist nach dem Vorhergehenden:

$$17) \ldots\ldots G_{\varpi} = \cos\varpi, \quad G_{\varpi}' = \sin\varpi$$

und:

$$18) \ldots\ldots\ldots K_{\varpi} = 0, \quad K_{\varpi}' = 1.$$

Zugleich wollen wir hier noch bemerken, dass man zu rechnung von φ aus ϖ nach §. 3. 10) die sehr bequeme Fo

$$19) \ldots\ldots\ldots \mathrm{tang}\,\varphi = \frac{b^2}{a^2}\mathrm{tang}\,\varpi$$

t. Also ist:

$$1+\operatorname{tang}\overline{\omega}\operatorname{tang}\varphi=\frac{\cos(\overline{\omega}-\varphi)}{\cos\overline{\omega}\cos\varphi}=\frac{a^2\cos\overline{\omega}^2+b^2\sin\overline{\omega}^2}{a^2\cos\overline{\omega}^2},$$

glich:

$$\sqrt{a^2\cos\overline{\omega}^2+b^2\sin\overline{\omega}^2}=a\sqrt{\frac{\cos\overline{\omega}\cos(\overline{\omega}-\varphi)}{\cos\varphi}};$$

d weil nun ferner nach 19):

$$\sqrt{a^4\cos\overline{\omega}^2+b^4\sin\overline{\omega}^2}=a^2\frac{\cos\overline{\omega}}{\cos\varphi}$$

, so hat man nach §. 3. 7) zur Berechnung von ϱ offenbar die queme Formel:

$$20)\ \ldots\ldots\ \varrho=a\sqrt{\frac{\cos\overline{\omega}}{\cos\varphi\cos(\overline{\omega}-\varphi)}}.$$

Auch für die Constanten $G_{\overline{\omega}}$, $G_{\overline{\omega}}'$ und $K_{\overline{\omega}}$, $K_{\overline{\omega}}'$ kann man rch Einführung der mittelst der Formel 19) leicht aus der Polhe $\overline{\omega}$ zu berechnenden Breite φ bemerkenswerthe Ausdrücke den. Weil nämlich nach 19):

$$\cos\overline{\omega}^2+\frac{b^2}{a^2}\sin\overline{\omega}^2=\cos\overline{\omega}^2+\frac{\operatorname{tang}\varphi}{\operatorname{tang}\overline{\omega}}\sin\overline{\omega}^2$$

$$=\cos\overline{\omega}^2(1+\operatorname{tang}\overline{\omega}\operatorname{tang}\varphi)=\frac{\cos\overline{\omega}\cos(\overline{\omega}-\varphi)}{\cos\varphi}$$

l

$$1-\frac{b^2}{a^2}=1-\frac{\operatorname{tang}\varphi}{\operatorname{tang}\overline{\omega}}=\frac{\sin(\overline{\omega}-\varphi)}{\sin\overline{\omega}\cos\varphi}$$

, so ist nach 1):

$$G_{\overline{\omega}}=\frac{\cos\overline{\omega}}{\sqrt{\cos\overline{\omega}^2+\frac{b^2}{a^2}\sin\overline{\omega}^2}}=\sqrt{\frac{\cos\overline{\omega}\cos\varphi}{\cos(\overline{\omega}-\varphi)}},$$

$$G_{\overline{\omega}}'=\frac{\frac{b^2}{a^2}\sin\overline{\omega}}{\sqrt{\cos\overline{\omega}^2+\frac{b^2}{a^2}\sin\overline{\omega}^2}}=\operatorname{tang}\varphi\sqrt{\frac{\cos\overline{\omega}\cos\varphi}{\cos(\overline{\omega}-\varphi)}}$$

l nach 2):

$$K_{\overline{\omega}}=\frac{(1-\frac{b^2}{a^2})\sin\overline{\omega}\cos\overline{\omega}}{\sqrt{\cos\overline{\omega}^2+\frac{b^2}{a^2}\sin\overline{\omega}^2}}=\sin(\overline{\omega}-\varphi)\sqrt{\frac{\cos\overline{\omega}}{\cos\varphi\cos(\overline{\omega}-\varphi)}}$$

$$=\frac{\sin(\overline{\omega}-\varphi)}{\cos\varphi}\sqrt{\frac{\cos\overline{\omega}\cos\varphi}{\cos(\overline{\omega}-\varphi)}},$$

$$K_{\varpi}'=\sqrt{\cos\varpi^2+\frac{b^2}{a^2}\sin\varpi^2}=\sqrt{\frac{\cos\varpi\cos(\varpi-\varphi)}{\cos\varphi}}$$

$$=\frac{\cos(\varpi-\varphi)}{\cos\varphi}\sqrt{\frac{\cos\varpi\cos\varphi}{\cos(\varpi-\varphi)}},$$

indem bei der absoluten Kleinheit von $\varpi-\varphi$ jedenfalls $\cos(\varpi-\varphi)$ eben so wie $\cos\varphi$ eine positive Grösse ist. Hiernach hat man also zur Berechnung der Constanten

$$G_{\varpi},\ G_{\varpi}' \text{ und } K_{\varpi},\ K_{\varpi}'$$

aus der Polhöhe ϖ und der Breite φ die folgenden, jedenfalls sehr bemerkenswerthen Ausdrücke:

$$21)\left\{\begin{aligned}
G_{\varpi}&=\sqrt{\frac{\cos\varpi\cos\varphi}{\cos(\varpi-\varphi)}},\\
G_{\varpi}'&=\tang\varphi\sqrt{\frac{\cos\varpi\cos\varphi}{\cos(\varpi-\varphi)}}=G_{\varpi}\tang\varphi;\\
K_{\varpi}&=\sin(\varpi-\varphi)\sqrt{\frac{\cos\varpi}{\cos\varphi\cos(\varpi-\varphi)}}\\
&=G_{\varpi}\frac{\sin(\varpi-\varphi)}{\cos\varphi}=G_{\varpi}'\frac{\sin(\varpi-\varphi)}{\sin\varphi},\\
K_{\varpi}'&=\sqrt{\frac{\cos\varpi\cos(\varpi-\varphi)}{\cos\varphi}}\\
&=G_{\varpi}\frac{\cos(\varpi-\varphi)}{\cos\varphi}=G_{\varpi}'\frac{\cos(\varpi-\varphi)}{\sin\varphi}=K_{\varpi}\cot(\varpi-\varphi).
\end{aligned}\right.$$

§. 6.

Wir wollen jetzt mittelst der im Vorhergehenden entwickelten Grundformeln zuvörderst einige Ausdrücke der Grösse $\frac{r}{R}$ entwickeln, auf welche, wie es mir scheint, in der Astronomie bisher nicht die ihnen gebührende Aufmerksamkeit gerichtet gewesen ist.

Wenn man die Gleichungen §. 4. 10) auf folgende Art darstellt:

$$\cos\sigma\cos\delta-\frac{a}{R}G_{\varpi}=\frac{r}{R}(\sin h\cos\varpi+\cos\omega\cos h\sin\varpi),$$

$$\sin\sigma\cos\delta=\frac{r}{R}\sin\omega\cos h,$$

$$\sin\delta-\frac{a}{R}G_{\varpi}'=\frac{r}{R}(\sin h\sin\varpi-\cos\omega\cos h\cos\varpi);$$

und sie dann quadrirt und zu einander addirt, so erhält man auf der Stelle die folgende Formel:

$$1)\quad \frac{r}{R}=\sqrt{1-2\frac{a}{R}(G_{\varpi}\cos\sigma\cos\delta+G_{\varpi}'\sin\delta)+\left(\frac{a}{R}\right)^2(G_{\varpi}^2+G_{\varpi}'^2)},$$

in welche man nun leicht noch alle aus dem vorhergehenden Paragraphen bekannten Ausdrücke der Constanten G_{ϖ}, G_{ϖ}' einführen könnte.

Ferner haben wir nach §. 4. 11) die folgenden Gleichungen:

$$\frac{r}{R}\cos\omega\cos h=-\frac{a}{R}K_{\varpi}+\cos\sigma\cos\delta\sin\varpi-\sin\delta\cos\varpi,$$

$$\frac{r}{R}\sin\omega\cos h=\quad\sin\sigma\cos\delta,$$

$$\frac{r}{R}\sin h=-\frac{a}{R}K_{\varpi}'+\cos\sigma\cos\delta\cos\varpi+\sin\delta\sin\varpi;$$

aus denen sich sogleich die beiden folgenden Gleichungen ergeben:

$$\left(\frac{r}{R}\right)^2\cos h^2=\cos\delta^2\sin\sigma^2+(\sin\delta\cos\varpi+\frac{a}{R}K_{\varpi}-\cos\delta\sin\varpi\cos\sigma)^2,$$

$$\left(\frac{r}{R}\right)^2\sin h^2=(\sin\delta\sin\varpi-\frac{a}{R}K_{\varpi}'+\cos\delta\cos\varpi\cos\sigma)^2.$$

Eliminirt man nun $\frac{r}{R}$ aus diesen beiden Gleichungen, so erhält man die Gleichung:

$$\{\cos\delta^2\sin\sigma^2+(\sin\delta\cos\varpi+\frac{a}{R}K_{\varpi}-\cos\delta\sin\varpi\cos\sigma)^2\}\sin h^2$$

$$=(\sin\delta\sin\varpi-\frac{a}{R}K_{\varpi}'+\cos\delta\cos\varpi\cos\sigma)^2\cos h^2,$$

oder:

$$\sin h^2\cos\delta^2\sin\sigma^2$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\cos h^2(\sin\delta\sin\varpi-\frac{a}{R}K_{\varpi}'+\cos\delta\cos\varpi\cos\sigma)^2\\ -\sin h^2(\sin\delta\cos\varpi+\frac{a}{R}K_{\varpi}-\cos\delta\sin\varpi\cos\sigma)^2,\end{array}\right.$$

oder:

$$\sin h^2 \cos\delta^2$$

$$= \sin h^2 \cos\delta^2 \cos\sigma^2 + \cos h^2 (\sin\delta \sin\overline{\omega} - \frac{a}{R} K_{\overline{\omega}}' + \cos\delta \cos\overline{\omega} \cos\sigma)^2$$

$$- \sin h^2 (\sin\delta \cos\overline{\omega} + \frac{a}{R} K_{\overline{\omega}} - \cos\delta \sin\overline{\omega} \cos\sigma)^2.$$

Um nun diese Gleichung in Bezug auf $\cos\sigma$ als unbekannte Grösse aufzulösen, entwickele man die Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens nach den Potenzen der unbekannten Grösse $\cos\sigma$; so findet man als Factor oder Coefficienten von $\cos\sigma^2$ die Grösse:

$$\sin h^2 \cos\delta^2 + \cos h^2 \cos\delta^2 \cos\overline{\omega}^2 - \sin h^2 \cos\delta^2 \sin\overline{\omega}^2$$

$$= \sin h^2 \cos\delta^2 \cos\overline{\omega}^2 + \cos h^2 \cos\delta^2 \cos\overline{\omega}^2 = \cos\delta^2 \cos\overline{\omega}^2,$$

und die aufzulösende Gleichung wird also:

$$\cos\delta^2 \cos\overline{\omega}^2 \cos\sigma^2 + 2\cos\delta \left\{ \begin{array}{c} \cos h^2 \cos\overline{\omega} (\sin\delta \sin\overline{\omega} - \frac{a}{R} K_{\overline{\omega}}') \\ + \sin h^2 \sin\overline{\omega} (\sin\delta \cos\overline{\omega} + \frac{a}{R} K_{\overline{\omega}}) \end{array} \right\} \cos\sigma$$

$$= \sin h^2 \cos\delta^2 - \cos h^2 (\sin\delta \sin\overline{\omega} - \frac{a}{R} K_{\overline{\omega}}')^2 + \sin h^2 (\sin\delta \cos\overline{\omega} + \frac{a}{R} K_{\overline{\omega}})^2.$$

Weil aber:

$$\sin h^2 \cos\delta^2 - \cos h^2 \sin\delta^2 \sin\overline{\omega}^2 + \sin h^2 \sin\delta^2 \cos\overline{\omega}^2$$

$$= \sin h^2 \cos\delta^2 - \cos h^2 \sin\delta^2 \sin\overline{\omega}^2 + \sin h^2 \sin\delta^2 - \sin h^2 \sin\delta^2 \sin\overline{\omega}^2$$

$$= \sin h^2 - \sin\delta^2 \sin\overline{\omega}^2$$

ist, so kann man vorstehende Gleichung auch auf folgende Art:

$$\cos\delta^2 \cos\overline{\omega}^2 \cos\sigma^2 + 2\cos\delta \left\{ \begin{array}{c} \cos h^2 \cos\overline{\omega} (\sin\delta \sin\overline{\omega} - \frac{a}{R} K_{\overline{\omega}}') \\ + \sin h^2 \sin\overline{\omega} (\sin\delta \cos\overline{\omega} + \frac{a}{R} K_{\overline{\omega}}) \end{array} \right\} \cos\sigma$$

$$= \sin h^2 - \sin\delta^2 \sin\overline{\omega}^2 + 2\frac{a}{R} \sin\delta (K_{\overline{\omega}} \sin h^2 \cos\overline{\omega} + K_{\overline{\omega}}' \cos h^2 \sin\overline{\omega})$$

$$+ \left(\frac{a}{R}\right)^2 (K_{\overline{\omega}}^2 \sin h^2 - K_{\overline{\omega}}'^2 \cos h^2)$$

oder, wenn der Kürze wegen:

2)

$$M = \cos h^2 \cos\varpi (\sin\delta \sin\varpi - \frac{a}{R} K_\varpi') \quad .$$

$$+ \sin h^2 \sin\varpi (\sin\delta \cos\varpi + \frac{a}{R} K_\varpi)$$

$$= \sin\delta \sin\varpi \cos\varpi + \frac{a}{R}(K_\varpi \sin h^2 \sin\varpi - K_\varpi' \cos h^2 \cos\varpi),$$

$$N = \sin h^2 - \sin\delta^2 \sin\varpi^2 + 2\frac{a}{R}\sin\delta(K_\varpi \sin h^2 \cos\varpi + K_\varpi' \cos h^2 \sin\varpi)$$

$$+ \left(\frac{a}{R}\right)^2 (K_\varpi^2 \sin h^2 - K_\varpi'^2 \cos h^2)$$

gesetzt wird, auf folgende Art darstellen:

$$3) \ldots . (\cos\delta\cos\sigma)^2 + 2\frac{M}{\cos\varpi^2}\cos\delta\cos\sigma = \frac{N}{\cos\varpi^2}.$$

Um diese quadratische Gleichung in Bezug auf die unbekannte Grösse $\cos\delta\cos\sigma$ aufzulösen, entwickeln wir zuerst die Grösse

$$M^2 + N\cos\varpi^2$$

$$= \{\sin\delta\sin\varpi\cos\varpi + \frac{a}{R}(K_\varpi \sin h^2 \sin\varpi - K_\varpi' \cos h^2 \cos\varpi)\}^2$$

$$+ \cos\varpi^2 \left\{ \begin{array}{l} \sin h^2 - \sin\delta^2 \sin\varpi^2 + 2\frac{a}{R}\sin\delta(K_\varpi \sin h^2 \cos\varpi + K_\varpi' \cos h^2 \sin\varpi) \\ \qquad + \left(\frac{a}{R}\right)^2 (K_\varpi^2 \sin h^2 - K_\varpi'^2 \cos h^2) \end{array} \right\}$$

nach Potenzen von $\frac{a}{R}$. Der von $\frac{a}{R}$ unabhängige Theil ist:

$$\sin\delta^2 \sin\varpi^2 \cos\varpi^2 + \cos\varpi^2 (\sin h^2 - \sin\delta^2 \sin\varpi^2) = \sin h^2 \cos\varpi^2.$$

Der Factor oder Coefficient von $2\frac{a}{R}$ ist:

$$\sin\delta\sin\varpi\cos\varpi(K_\varpi \sin h^2 \sin\varpi - K_\varpi' \cos h^2 \cos\varpi)$$

$$+ \sin\delta\cos\varpi^2 (K_\varpi \sin h^2 \cos\varpi + K_\varpi' \cos h^2 \sin\varpi) = K_\varpi \sin\delta \sin h^2 \cos\varpi.$$

Der Factor oder Coefficient von $\left(\frac{a}{R}\right)^2$ ist:

$$(K_\varpi \sin h^2 \sin\varpi - K_\varpi' \cos h^2 \cos\varpi)^2 + (K_\varpi^2 \sin h^2 - K_\varpi'^2 \cos h^2)\cos\varpi^2$$

$$= K_\varpi^2 \sin h^2 (\cos\varpi^2 + \sin h^2 \sin\varpi^2)$$

$$- K_\varpi'^2 \sin h^2 \cos h^2 \cos\varpi^2 - 2K_\varpi K_\varpi' \sin h^2 \cos h^2 \sin\varpi \cos\varpi$$

$$= K_\varpi^2 \sin h^2 (1 - \cos h^2 \sin\varpi^2)$$

$$- K_\varpi'^2 \sin h^2 \cos h^2 \cos\varpi^2 - 2K_\varpi K_\varpi' \sin h^2 \cos h^2 \sin\varpi \cos\varpi$$

$$= K_\varpi^2 \sin h^2 - \sin h^2 \cos h^2 (K_\varpi^2 \sin\varpi^2 + 2K_\varpi K_\varpi' \sin\varpi\cos\varpi + K_\varpi'^2 \cos\varpi^2)$$

$$= \sin h^2 \{ K_\varpi^2 - \cos h^2 (K_\varpi \sin\varpi + K_\varpi' \cos\varpi)^2 \}$$

$$= \sin h^2 (K_\varpi^2 - G_\varpi^2 \cos h^2).$$

Also ist:

$$\mathrm{M}^2 + \mathrm{N}\cos\varpi^2$$

$$= \sin h^2 \cos\varpi^2 + 2\frac{a}{R} K_\varpi \sin\delta \sin h^2 \cos\varpi + \left(\frac{a}{R}\right)^2 \sin h^2 (K_\varpi^2 - G_\varpi^2 \cos h^2),$$

und folglich für:

4)

$$\mathrm{M} = \sin\delta \sin\varpi \cos\varpi + \frac{a}{R}(K_\varpi \sin h^2 \sin\varpi - K_\varpi' \cos h^2 \cos\varpi),$$

$$\mathrm{H} = \cos\varpi^2 + 2\frac{a}{R} K_\varpi \sin\delta \cos\varpi + \left(\frac{a}{R}\right)^2 (K_\varpi^2 - G_\varpi^2 \cos h^2);$$

oder auch:

5)

$$\mathrm{M} = \sin\delta \sin\varpi \cos\varpi + \frac{a}{R}(K_\varpi \sin\varpi - G_\varpi \cos h^2),$$

$$\mathrm{H} = \cos\varpi^2 + 2\frac{a}{R} K_\varpi \sin\delta \cos\varpi + \left(\frac{a}{R}\right)^2 (K_\varpi^2 - G_\varpi^2 \cos h^2);$$

nach 3) offenbar:

6) . . . . . . $(\cos\delta\cos\sigma + \frac{\mathrm{M}}{\cos\varpi^2})^2 = \frac{\mathrm{H}\sin h^2}{\cos\varpi^4}$,

also:

7) . . . . . . $\cos\delta\cos\sigma = \frac{-\mathrm{M} \pm \sin h\sqrt{\mathrm{H}}}{\cos\varpi^2}$,

oder:

8) . . . . $\cos\sigma = \frac{-\mathrm{M} \pm \sin h\sqrt{\mathrm{H}}}{\cos\delta\cos\varpi^2}$.

Nach §. 4. 11) ist nun:

$$\frac{a}{R}K_{\varpi}'+\frac{r}{R}\sin h=\cos\sigma\cos\delta\cos\varpi+\sin\delta\sin\varpi,$$

also nach 7):

$$\frac{a}{R}K_{\varpi}'+\frac{r}{R}\sin h=\frac{-\mathrm{M}\pm\sin h\sqrt{\mathrm{H}}}{\cos\varpi}+\sin\delta\sin\varpi$$

$$=\frac{\sin\delta\sin\varpi\cos\varpi-\mathrm{M}\pm\sin h\sqrt{\mathrm{H}}}{\cos\varpi},$$

folglich, wenn man für M seinen Werth aus 5) einführt:

$$\frac{a}{R}K_{\varpi}'+\frac{r}{R}\sin h=\frac{-\frac{a}{R}(K_{\varpi}\sin\varpi-G_{\varpi}\cos h^2)\pm\sin h\sqrt{\mathrm{H}}}{\cos\varpi}.$$

Es ist aber nach den in §. 5. entwickelten Formeln und Relationen:

$$K_{\varpi}\sin\varpi-G_{\varpi}\cos h^2=\frac{a^2-b^2}{b^2}G_{\varpi}'\sin\varpi\cos\varpi-\frac{\cos h^2\cos\varpi}{K_{\varpi}'}$$

$$=\frac{\frac{a^2-b^2}{b^2}G_{\varpi}'K_{\varpi}'\sin\varpi-\cos h^2}{K_{\varpi}'}\cos\varpi$$

$$=\frac{\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin\varpi^2-\cos h^2}{K_{\varpi}'}\cos\varpi$$

$$=-\frac{\cos h^2-e^2\sin\varpi^2}{K_{\varpi}'}\cos\varpi$$

und

$$\mathrm{H}=\cos\varpi^2+2\frac{a}{R}K_{\varpi}\sin\delta\cos\varpi+\left(\frac{a}{R}\right)^2(K_{\varpi}^2-G_{\varpi}^2\cos h^2)$$

$$=\cos\varpi^2+2\frac{a}{R}\cdot\frac{a^2-b^2}{b^2}G_{\varpi}'\sin\delta\cos\varpi^2$$

$$+\left(\frac{a}{R}\right)^2\left\{\left(\frac{a^2-b^2}{b^2}\right)^2G_{\varpi}'^2-\frac{\cos h^2}{K_{\varpi}'^2}\right\}\cos\varpi^2$$

$$=\cos\varpi^2\left\{1+2\frac{a}{R}\cdot\frac{a^2-b^2}{b^2}G_{\varpi}'\sin\delta+\left(\frac{a}{R}\right)^2\cdot\frac{\left(\frac{a^2-b^2}{b^2}\right)^2G_{\varpi}'^2K_{\varpi}'^2-\cos h^2}{K_{\varpi}'^2}\right\}$$

$$= \cos\varpi^2 \left\{ 1 + 2\frac{a}{R} \cdot \frac{\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin\delta\sin\varpi}{K_\varpi'} + \left(\frac{a}{R}\right)^2 \cdot \frac{\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)^2 \sin\varpi^2 - \cos h^2}{K_\varpi'^2} \right\}$$

$$= \cos\varpi^2 \left\{ 1 + 2\frac{a}{R} \cdot \frac{e^2\sin\delta\sin\varpi}{K_\varpi'} + \left(\frac{a}{R}\right)^2 \cdot \frac{e^4\sin\varpi^2 - \cos h^2}{K_\varpi'^2} \right\}$$

$$= \cos\varpi^2 \left\{ 1 + 2\frac{a}{R} \cdot \frac{e^2\sin\delta\sin\varpi}{K_\varpi'} + \left(\frac{a}{R}\right)^2 \cdot \frac{e^4\sin\delta^2\sin\varpi^2}{K_\varpi'^2} + \left(\frac{a}{R}\right)^2 \cdot \frac{e^4\sin\varpi^2 - \cos h^2}{K_\varpi'^2} - \left(\frac{a}{R}\right)^2 \cdot \frac{e^4\sin\delta^2\sin\varpi^2}{K_\varpi'^2} \right\}$$

$$= \cos\varpi^2 \left\{ \left(1 + \frac{a}{R} \cdot \frac{e^2\sin\delta\sin\varpi}{K_\varpi'}\right)^2 - \left(\frac{a}{R}\right)^2 \cdot \frac{\cos h^2 - e^4\cos\delta^2\sin\varpi^2}{K_\varpi'^2} \right\}$$

Also ist nach dem Obigen:

$$\frac{a}{R} K_\varpi' + \frac{r}{R}\sin h$$

$$= \frac{a}{R} \cdot \frac{\cos h^2 - e^2\sin\varpi^2}{K_\varpi'}$$

$$\pm \sin h \sqrt{\left(1 + \frac{a}{R} \cdot \frac{e^2\sin\delta\sin\varpi}{K_\varpi'}\right)^2 - \left(\frac{a}{R}\right)^2 \cdot \frac{\cos h^2 - e^4\cos\delta^2\sin\varpi^2}{K_\varpi'^2}},$$

wobei man zu beachten hat, dass $\cos\varpi$ stets positiv ist, und daher in der ganzen obigen Betrachtung überall die oberen und unteren Vorzeichen in genauer Beziehung zu einander stehen. Aus dieser Gleichung ergiebt sich nun unmittelbar:

$$\frac{r}{R}\sin h = \frac{a}{R} \cdot \frac{\cos h^2 - e^2\sin\varpi^2 - K_\varpi'^2}{K_\varpi'}$$

$$\pm \sin h \sqrt{\left(1 + \frac{a}{R} \cdot \frac{e^2\sin\delta\sin\varpi}{K_\varpi'}\right)^2 - \left(\frac{a}{R}\right)^2 \cdot \frac{\cos h^2 - e^4\cos\delta^2\sin\varpi^2}{K_\varpi'^2}},$$

was, weil

$$\cos h^2 - e^2\sin\varpi^2 - K_\varpi'^2$$

$$= \cos h^2 - e^2\sin\varpi^2 - 1 + e^2\sin\varpi^2 = -\sin h^2$$

ist, endlich zu der folgenden, nach meiner Meinung sehr bemerkenswerthen Formel führt:

$$9) \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{r}{R} = -\frac{a}{R} \cdot \frac{\sin h}{K_{\varpi}'}$$

$$\pm \sqrt{(1 + \frac{a}{R} \cdot \frac{e^2 \sin\delta \sin\varpi}{K_{\varpi}'})^2 - \left(\frac{a}{R}\right)^2 \cdot \frac{\cos h^2 - e^4 \cos\delta^2 \sin\varpi^2}{K_{\varpi}'^2}},$$

durch welche das wichtige Verhältniss $\frac{r}{R}$ bloss durch h, δ, ϖ und andere als bekannt vorauszusetzende Grössen ausgedrückt wird.

Bemerken wollen wir noch, dass sich aus den vorhergehenden Entwickelungen für die beiden oben durch M, H bezeichneten Grössen die folgenden Ausdrücke ergeben:

10)

$$M = \cos\varpi \{\sin\delta \sin\varpi - \frac{a}{R} \cdot \frac{\cos h^2 - e^2 \sin\varpi^2}{K_{\varpi}'}\},$$

$$H = \cos\varpi^2 \{(1 + \frac{a}{R} \cdot \frac{e^2 \sin\delta \sin\varpi}{K_{\varpi}'})^2 - \left(\frac{a}{R}\right)^2 \cdot \frac{\cos h^2 - e^4 \cos\delta^2 \sin\varpi^2}{K_{\varpi}'^2}\}.$$

Hauptsächlich entsteht nun die Frage, wie in allen vorhergehenden Formeln die Vorzeichen zu nehmen sind, in welcher Beziehung sich Folgendes mit aller Strenge beweisen lässt.

Es ist offenbar:

$$\frac{\frac{b}{a}}{1 - \frac{b^2}{a^2}} > \frac{b}{a} \geqq \frac{\frac{b}{a}}{1 + \frac{a^2 - b^2}{a^2}},$$

oder:

$$\frac{ab}{a^2 - b^2} > \frac{b}{a} \geqq \frac{\frac{b}{a}}{1 + \frac{a^2 - b^2}{a^2}},$$

oder:

$$\frac{1}{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}} > \frac{b}{a} \geqq \frac{\frac{b}{a}}{1 + \frac{a^2 - b^2}{a^2}}.$$

Unserer ganzen folgenden Betrachtung legen wir die Voraussetzung zu Grunde, dass immer

$$\frac{a}{R} < \frac{\frac{b}{a}}{1 + \frac{a^2 - b^2}{a^2}}$$

sei.

Wenn nun

$$\left(\frac{a}{R}\right)^2 \cdot \frac{e^4 \sin\delta^2 \sin\bar{\omega}^2}{K_{\bar{\omega}}'^2} \underset{>}{=} 1$$

wäre, so wäre:

$$\left(\frac{a}{R}\right)^2 \underset{>}{=} \frac{K_{\bar{\omega}}'^2}{e^4 \sin\delta^2 \sin\bar{\omega}^2}, \quad \left(\frac{a}{R}\right)^2 \underset{>}{=} \frac{1 - e^2 \sin\bar{\omega}^2}{e^4 \sin\delta^2 \sin\bar{\omega}^2}.$$

Es ist aber:

$$e^4 \sin\delta^2 \sin\bar{\omega}^2 \underset{<}{=} e^4,$$

also:

$$\frac{1 - e^2 \sin\bar{\omega}^2}{e^4 \sin\delta^2 \sin\bar{\omega}^2} \underset{>}{=} \frac{1 - e^2 \sin\bar{\omega}^2}{e^4},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\left(\frac{a}{R}\right)^2 \underset{>}{=} \frac{1 - e^2 \sin\bar{\omega}^2}{e^4}.$$

Weil ferner

$$e^2 \sin\bar{\omega}^2 \underset{<}{=} e^2,$$

und folglich

$$1 - e^2 \sin\bar{\omega}^2 \underset{>}{=} 1 - e^2$$

ist, so ist:

$$\frac{1 - e^2 \sin\bar{\omega}^2}{e^4} \underset{>}{=} \frac{1 - e^2}{e^4},$$

also nach dem Obigen:

$$\left(\frac{a}{R}\right)^2 \underset{>}{=} \frac{1 - e^2}{e^4},$$

folglich:

$$\frac{a}{R} \underset{>}{=} \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e^2}, \quad \frac{a}{R} \underset{>}{=} \frac{\sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}}}{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}, \quad \frac{a}{R} \underset{>}{=} \frac{\frac{b}{a}}{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$$

oder:

$$\frac{a}{R} \underset{>}{=} \frac{ab}{a^2 - b^2}, \quad \frac{a}{R} \underset{>}{=} \frac{1}{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}},$$

und daher, weil nach dem Obigen

$$\frac{1}{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}} > \frac{\frac{b}{a}}{1+\frac{a^2-b^2}{a^2}}$$

ist:

$$\frac{a}{R} > \frac{\frac{b}{a}}{1+\frac{a^2-b^2}{a^2}},$$

was gegen die obige, allem Folgenden zu Grunde liegende Voraussetzung streitet. Daher kann nie

$$\left(\frac{a}{R}\right)^2 \cdot \frac{e^4 \sin\delta^2 \sin\varpi^2}{K_\varpi'^2} \overset{=}{>} 1$$

sein, und es ist folglich immer:

$$\left(\frac{a}{R}\right)^2 \cdot \frac{e^4 \sin\delta^2 \sin\varpi^2}{K_\varpi'^2} < 1,$$

also offenbar stets:

$$1 + \frac{a}{R} \cdot \frac{e^2 \sin\delta \sin\varpi}{K_\varpi'} > 0,$$

möge $\sin\delta \sin\varpi$ eine positive oder eine negative Grösse sein.

Wenn nun

$$\left(\frac{a}{R}\right)^2 \cdot \frac{1-e^4\cos\delta^2\sin\varpi^2}{K_\varpi'^2} \overset{=}{>} \left(1+\frac{a}{R}\cdot\frac{e^2\sin\delta\sin\varpi}{K_\varpi'}\right)^2$$

wäre, so wäre, eben weil nach dem so eben Bewiesenen die quadrirte Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens eine nicht verschwindende positive Grösse ist:

$$\frac{a}{R} \cdot \frac{\sqrt{1-e^4\cos\delta^2\sin\varpi^2}}{K_\varpi'} \overset{=}{>} 1 + \frac{a}{R} \cdot \frac{e^2\sin\delta\sin\varpi}{K_\varpi'},$$

also:

$$\frac{a}{R} \cdot \frac{\sqrt{1-e^4\cos\delta^2\sin\varpi^2} - e^2\sin\delta\sin\varpi}{K_\varpi'} \overset{=}{>} 1,$$

folglich:

$$\frac{a}{R} \overset{=}{>} \frac{K_\varpi'}{\sqrt{1-e^4\cos\delta^2\sin\varpi^2} - e^2\sin\delta\sin\varpi},$$

weil, wie aus der vorstehenden Ungleichung sich ganz von selbst ergiebt:

$$\sqrt{1-e^4\cos\delta^2\sin\overline{\omega}^2}-e^2\sin\delta\sin\overline{\omega}>0$$

ist. Wenn nun

$$\sin\delta\sin\overline{\omega}\overset{=}{>}0$$

ist, so ist offenbar:

$$\sqrt{1-e^4\cos\delta^2\sin\overline{\omega}^2}-e^2\sin\delta\sin\overline{\omega}\overset{=}{<}1,$$

also:

$$\frac{K_{\overline{\omega}}'}{\sqrt{1-e^4\cos\delta^2\sin\overline{\omega}^2}-e^2\sin\delta\sin\overline{\omega}}\overset{=}{>}K_{\overline{\omega}}',$$

folglich nach dem Obigen:

$$\frac{a}{R}\overset{=}{>}K_{\overline{\omega}}',\quad \frac{a}{R}\overset{=}{>}\sqrt{1-e^2\sin\overline{\omega}^2},\quad \frac{a}{R}\overset{=}{>}\sqrt{1-e^2},$$

weil offenbar

$$\sqrt{1-e^2\sin\overline{\omega}^2}\overset{=}{>}\sqrt{1-e^2}.$$

ist; also:

$$\frac{a}{R}\overset{=}{>}\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}},\quad \frac{a}{R}\overset{=}{>}\frac{b}{a};$$

und folglich, weil nach dem Obigen

$$\frac{b}{a}\overset{=}{>}\frac{\frac{b}{a}}{1+\frac{a^2-b^2}{a^2}}$$

ist:

$$\frac{a}{R}\overset{=}{>}\frac{\frac{b}{a}}{1+\frac{a^2-b^2}{a^2}},$$

was wieder gegen die obige Voraussetzung streitet. Wenn fern

$$\sin\delta\sin\overline{\omega}<0$$

ist, so ist:

$$-e^2\sin\delta\sin\overline{\omega}\overset{=}{<}e^2,$$

wo die Grösse auf der linken Seite positiv ist; also ist offenb

$$\sqrt{1-e^4\cos\delta^2\sin\overline{\omega}^2}-e^2\sin\delta\sin\overline{\omega}\overset{=}{<}1+e^2,$$

lglich:

$$\frac{K\varpi'}{\sqrt{1-e^4\cos\delta^2\sin\varpi^2}-e^2\sin\delta\sin\varpi} \overline{>} \frac{K\varpi'}{1+e^2},$$

nd daher nach dem Obigen:

$$\frac{a}{R} \overline{>} \frac{K\varpi'}{1+e^2}, \quad \frac{a}{R} \overline{>} \frac{\sqrt{1-e^2\sin\varpi^2}}{1+e^2};$$

also offenbar um so mehr:

$$\frac{a}{R} \overline{>} \frac{\sqrt{1-e^2}}{1+e^2},$$

oder:

$$\frac{a}{R} \overline{>} \frac{\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}}}{1+\frac{a^2-b^2}{a^2}}, \quad \frac{a}{R} \overline{>} \frac{\frac{b}{a}}{1+\frac{a^2-b^2}{a^2}},$$

was wiederum gegen die Voraussetzung streitet. Hiernach kann also nie

$$\left(\frac{a}{R}\right)^2 \cdot \frac{1-e^4\cos\delta^2\sin\varpi^2}{K\varpi'^2} \overline{>} \left(1+\frac{a}{R}\cdot\frac{e^2\sin\delta\sin\varpi}{K\varpi'}\right)^2$$

sein, und es ist also immer:

$$\left(\frac{a}{R}\right)^2 \cdot \frac{1-e^4\cos\delta^2\sin\varpi^2}{K\varpi'^2} < \left(1+\frac{a}{R}\cdot\frac{e^2\sin\delta\sin\varpi}{K\varpi'}\right)^2,$$

oder:

$$\left(\frac{a}{R}\right)^2 \cdot \frac{1-e^4\cos\delta^2\sin\varpi^2}{K\varpi'^2} - \left(1+\frac{a}{R}\cdot\frac{e^2\sin\delta\sin\varpi}{K\varpi'}\right)^2 < 0.$$

Weil also:

$$\left(1+\frac{a}{R}\cdot\frac{e^2\sin\delta\sin\varpi}{K\varpi'}\right)^2 - \left(\frac{a}{R}\right)^2 \cdot \frac{1-e^4\cos\delta^2\sin\varpi^2}{K\varpi'^2} > 0$$

ist, so ist:

$$\left(1+\frac{a}{R}\cdot\frac{e^2\sin\delta\sin\varpi}{K\varpi'}\right)^2 + \left(\frac{a}{R}\right)^2 \cdot \frac{e^4\cos\delta^2\sin\varpi^2}{K\varpi'^2} > \left(\frac{a}{R}\right)^2 \cdot \frac{1}{K\varpi'^2},$$

also um so mehr:

$$\left(1+\frac{a}{R}\cdot\frac{e^2\sin\delta\sin\varpi}{K\varpi'}\right)^2 + \left(\frac{a}{R}\right)^2 \cdot \frac{e^4\cos\delta^2\sin\varpi^2}{K\varpi'^2} > \left(\frac{a}{R}\right)^2 \cdot \frac{\cos h^2}{K\varpi'^2}$$

oder:



$$\frac{a}{R} < 0{,}9900$$

sei, und dass sich dies in der Astronomie immer wird vorau setzen lassen, ist klar.

Für die Kugel ist $a = b$, also

$$\frac{\frac{b}{a}}{1+\frac{a^2-b^2}{a^2}} = 1,$$

und daher die im Vorhergehenden immer zu Grunde gelegte Be dingung

$$\frac{a}{R} < 1.$$

Weil in diesem Falle bekanntlich $e = 0$ und $K_{\varpi}' = 1$ ist, so is nach 12*):

$$13) \ldots\ldots \frac{r}{R} = \sqrt{1-\left(\frac{a}{R}\cos h\right)^2} - \frac{a}{R}\sin h,$$

oder:

$$14) \ldots \frac{r}{R} = \sqrt{\left(1-\frac{a}{R}\cos h\right)\left(1+\frac{a}{R}\cos h\right)} - \frac{a}{R}\sin h.$$

Aus den Ausdrücken 1) und 12*) von $\frac{r}{R}$ erhellet, dass fü $\frac{a}{R} = 0$ die Grösse $\frac{r}{R} = 1$ ist, und da man nun für Fixstern wenigstens mit sehr grosser Annäherung $\frac{a}{R} = 0$ zu setzen be rechtigt ist; so nehmen für diese Weltkörper die Fundament Gleichungen §. 4. 10) und §. 4. 11) die folgende einfachere G stalt an:

$$15) \ldots \begin{cases} \cos\sigma\cos\delta = \sin h\cos\overline{\omega} + \cos\omega\cos h\sin\overline{\omega}, \\ \sin\sigma\cos\delta = \sin\omega\cos h, \\ \sin\delta = \sin h\sin\overline{\omega} - \cos\omega\cos h\cos\overline{\omega} \end{cases}$$

und:

$$16) \ldots \begin{cases} \cos\omega\cos h = \cos\sigma\cos\delta\sin\overline{\omega} - \sin\delta\cos\overline{\omega}, \\ \sin\omega\cos h = \sin\sigma\cos\delta, \\ \sin h = \cos\sigma\cos\delta\cos\overline{\omega} + \sin\delta\sin\overline{\omega}. \end{cases}$$

ür Fixsterne hat man daher auch immer:

$$\frac{a}{R}=0,\quad \frac{r}{R}=1$$

u setzen.

§. 7.

Wir wollen jetzt zeigen, wie man sich die Berechnung von $\frac{r}{R}$ nach den vorhergehenden Formeln etwas erleichtern kann, und dabei zugleich auch den Stundenwinkel σ betrachten.

Wenn wir der Kürze wegen:

$$1)\quad Q=\sqrt{(1+\frac{a}{R}\cdot\frac{e^2\sin\delta\sin\varpi}{K_\varpi'})^2+\left(\frac{a}{R}\right)^2\cdot\frac{e^4\cos\delta^2\sin\varpi^2}{K_\varpi'^2}}$$

$$=\sqrt{1+2\frac{a}{R}\cdot\frac{e^2\sin\delta\sin\varpi}{K_\varpi'}+\left(\frac{a}{R}\right)^2\cdot\frac{e^4\sin\varpi^2}{K_\varpi'^2}}$$

setzen, so ist nach §. 6. 12*):

$$\frac{r}{R}=\sqrt{Q^2-\left(\frac{a}{R}\right)^2\cdot\frac{\cos h^2}{K_\varpi'^2}}-\frac{a}{R}\cdot\frac{\sin h}{K_\varpi'}$$

$$=Q\sqrt{1-\left(\frac{\frac{a}{R}\cdot\frac{1}{K_\varpi'}}{Q}\right)^2\cos h^2}-\frac{a}{R}\cdot\frac{\sin h}{K_\varpi'};$$

und setzen wir also, indem wir den Hülfswinkel u zwischen 0 und $+90^0$ nehmen *):

$$2)\ldots\ldots\quad \sin u=\frac{\frac{a}{R}\cdot\frac{1}{K_\varpi'}}{Q}\cos h=\frac{\frac{a}{R}}{K_\varpi' Q}\cos h,$$

so ist:

$$\frac{r}{R}=Q\cos u-\frac{a}{R}\cdot\frac{\sin h}{K_\varpi'},$$

also, weil

$$\frac{a}{R}\cdot\frac{1}{K_\varpi'}=Q\frac{\sin u}{\cos h}$$

*) Die Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in der nachfolgenden Gleichung 2) ist nämlich jedenfalls positiv: deshalb kann man u zwischen 0 und $+90^0$ nehmen.

ist:

$$\frac{r}{R} = Q(\cos u - \operatorname{tang} h \sin u),$$

und folglich:

$$3) \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{r}{R} = \frac{Q\cos(h+u)}{\cos h}.$$

Nach der dritten der Gleichungen §. 4. 11) ist:

$$\cos\sigma = \frac{\frac{a}{R}K_{\overline{\omega}}' + \frac{r}{R}\sin h}{\cos\delta\cos\overline{\omega}} - \operatorname{tang}\delta\operatorname{tang}\overline{\omega},$$

also nach 2) und 3):

$$\cos\sigma = Q\frac{K_{\overline{\omega}}'^2\frac{\sin u}{\cos h} + \cos(h+u)\operatorname{tang} h}{\cos\delta\cos\overline{\omega}} - \operatorname{tang}\delta\operatorname{tang}\overline{\omega}$$

$$= Q\frac{(1-e^2\sin\overline{\omega}^2)\frac{\sin u}{\cos h} + \cos(h+u)\operatorname{tang} h}{\cos\delta\cos\overline{\omega}} - \operatorname{tang}\delta\operatorname{tang}\overline{\omega}$$

$$= Q\frac{\frac{\sin u}{\cos h} - \frac{\sin u}{\cos h}\sin h^2 + \sin h\cos u - e^2\sin\overline{\omega}^2\frac{\sin u}{\cos h}}{\cos\delta\cos\overline{\omega}}$$

$$- \operatorname{tang}\delta\operatorname{tang}\overline{\omega},$$

also:

$$4) \ldots \cos\sigma = Q\frac{\sin(h+u) - e^2\sin\overline{\omega}^2\frac{\sin u}{\cos h}}{\cos\delta\cos\overline{\omega}} - \operatorname{tang}\delta\operatorname{tang}\overline{\omega}.$$

Weil nach §. 6.

$$1 + \frac{a}{R}\cdot\frac{e^2\sin\delta\sin\overline{\omega}}{K_{\overline{\omega}}'} > 0$$

ist, so kann man nach 1)

$$Q = \left(1 + \frac{a}{R}\cdot\frac{e^2\sin\delta\sin\overline{\omega}}{K_{\overline{\omega}}'}\right)\sqrt{1 + \left\{\frac{\frac{a}{R}\cdot\frac{e^2\cos\delta\sin\overline{\omega}}{K_{\overline{\omega}}'}}{1 + \frac{a}{R}\cdot\frac{e^2\sin\delta\sin\overline{\omega}}{K_{\overline{\omega}}'}}\right\}^2}$$

setzen, und berechnet man also den zwischen -90^0 und $+90^0$ genommenen Hülfswinkel θ mittelst der Formel:

$$5) \ldots\ldots\ldots \tang\theta = \frac{\frac{a}{R}\cdot\frac{e^2\cos\delta\sin\varpi}{K_\varpi'}}{1+\frac{a}{R}\cdot\frac{e^2\sin\delta\sin\varpi}{K_\varpi'}},$$

so ist:

$$Q = (1+\frac{a}{R}\cdot\frac{e^2\sin\delta\sin\varpi}{K_\varpi'})\sec\theta$$

oder:

$$Q = \frac{a}{R}\cdot\frac{e^2\cos\delta\sin\varpi}{K_\varpi'}\cot\theta\sec\theta,$$

also:

$$6) \ldots Q = \frac{a}{R}\cdot\frac{e^2\cos\delta\sin\varpi}{K_\varpi'\sin\theta}, \quad \frac{r}{R} = \frac{e^2\cos\delta\sin\varpi\cos(h+u)}{K_\varpi'\cos h\sin\theta}.$$

Nach 4) und 6) ist:

$$\cos\sigma = \frac{a}{R}\cdot\frac{e^2\cos\delta\sin\varpi}{K_\varpi'\sin\theta}\cdot\frac{\sin(h+u)-e^2\sin\varpi^2\frac{\sin u}{\cos h}}{\cos\delta\cos\varpi} - \tang\delta\tang\varpi,$$

also:

$$\cos\sigma = \left\{\frac{a}{R}\cdot\frac{e^2}{K_\varpi'\sin\theta}[\sin(h+u)-e^2\sin\varpi^2\frac{\sin u}{\cos h}] - \tang\delta\right\}\tang\varpi;$$

nach 2) und 6) ist aber, wie man sogleich übersieht:

$$\sin u = \frac{\cos h\sin\theta}{e^2\cos\delta\sin\varpi},$$

also nach Vorstehendem:

$$\cos\sigma = \left\{\frac{a}{R}\cdot\frac{e^2}{K_\varpi'\sin\theta}[\sin(h+u)-\frac{\sin\varpi\sin\theta}{\cos\delta}] - \tang\delta\right\}\tang\varpi$$

oder:

$$\cos\sigma = \left\{\frac{a}{R}\cdot\frac{e^2}{K_\varpi'}\left[\frac{\sin(h+u)}{\sin\theta}-\frac{\sin\varpi}{\cos\delta}\right] - \tang\delta\right\}\tang\varpi.$$

Daher hat man zur Berechnung von σ das folgende System von Formeln:

6*)

$$\tang\theta = \frac{\frac{a}{R}\cdot\frac{e^2\cos\delta\sin\varpi}{K_\varpi'}}{1+\frac{a}{R}\cdot\frac{e^2\sin\delta\sin\varpi}{K_\varpi'}}, \quad \sin u = \frac{\cos h\sin\theta}{e^2\cos\delta\sin\varpi},$$

$$\cos\sigma = \left\{\frac{a}{R}\cdot\frac{e^2}{K_\varpi'}\left[\frac{\sin(h+u)}{\sin\theta}-\frac{\sin\varpi}{\cos\delta}\right] - \tang\delta\right\}\tang\varpi.$$

Der Winkel θ ist zwischen -90^0 und $+90^0$, der Wink zwischen 0 und $+90^0$ zu nehmen.

Wegen der grossen Kleinheit der absoluten Werthe der Grö

$$2\frac{a}{R}\cdot\frac{e^2\sin\delta\sin\bar{\omega}}{K_{\bar{\omega}}'} \quad \text{und} \quad \left(\frac{a}{R}\right)^2\cdot\frac{e^4\sin\bar{\omega}^2}{K_{\bar{\omega}}'^2}$$

kann man nach 1) offenbar mit grosser Annäherung $Q=1$ set dadurch wird nach 2):

$$7)\ldots \sin u = \frac{a}{R}\cdot\frac{1}{K_{\bar{\omega}}'}\cos h = \frac{a}{R}\cos h(1-e^2\sin\bar{\omega}^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{a}{R}\cos h(1+\tfrac{1}{2}e^2\sin\bar{\omega}^2+\frac{1.3}{2.4}e^4\sin\bar{\omega}^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}e^6\sin\bar{\omega}^6+\ldots)$$

ferner nach 3):

$$8)\ldots\ldots\ldots \frac{r}{R}=\frac{\cos(h+u)}{\cos h},$$

und nach 4):

$$9)\quad \cos\sigma=\frac{\sin(h+u)-\sin\delta\sin\bar{\omega}}{\cos\delta\cos\bar{\omega}}-e^2\frac{\sin\bar{\omega}\,\mathrm{tang}\,\bar{\omega}\sin u}{\cos\delta\cos h},$$

also:

$$2\cos\tfrac{1}{2}\sigma^2=1+\cos\sigma=\frac{\cos(\delta+\bar{\omega})+\sin(h+u)}{\cos\delta\cos\bar{\omega}}-e^2\frac{\sin\bar{\omega}\,\mathrm{tang}\,\bar{\omega}\sin u}{\cos\delta\cos h}$$

$$2\sin\tfrac{1}{2}\sigma^2=1-\cos\sigma=\frac{\cos(\delta-\bar{\omega})-\sin(h+u)}{\cos\delta\cos\bar{\omega}}+e^2\frac{\sin\bar{\omega}\,\mathrm{tang}\,\bar{\omega}\sin u}{\cos\delta\cos h}$$

folglich:

10)

$$\cos\tfrac{1}{2}\sigma^2=\frac{\cos\{\tfrac{1}{2}(\delta+\bar{\omega}-h-u)+45^0\}\cos\{\tfrac{1}{2}(\delta+\bar{\omega}+h+u)-45^0\}}{\cos\delta\cos\bar{\omega}}$$

$$-\tfrac{1}{2}e^2\frac{\sin\bar{\omega}\,\mathrm{tang}\,\bar{\omega}\sin u}{\cos\delta\cos h},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\sigma^2=-\frac{\sin\{\tfrac{1}{2}(\delta-\bar{\omega}-h-u)+45^0\}\sin\{\tfrac{1}{2}(\delta-\bar{\omega}+h+u)-45^0\}}{\cos\delta\cos\bar{\omega}}$$

$$+\tfrac{1}{2}e^2\frac{\sin\bar{\omega}\,\mathrm{tang}\,\bar{\omega}\sin u}{\cos\delta\cos h}.$$

Für die Kugel ist völlig genau:

$$11)\ldots\ldots\ldots \sin u=\frac{a}{R}\cos h,$$

ferner:

$$12) \ldots\ldots\ldots \frac{r}{R} = \frac{\cos(h+u)}{\cos h},$$

endlich:

$$13) \ldots\ldots \cos\sigma = \frac{\sin(h+u) - \sin\delta\sin\overline{\omega}}{\cos\delta\cos\overline{\omega}}$$

oder:

$$14) \ldots\ldots \cos\sigma = \frac{\sin(h+u)}{\cos\delta\cos\overline{\omega}} - \operatorname{tang}\delta\operatorname{tang}\overline{\omega},$$

und:

15)

$$\cos\tfrac{1}{2}\sigma^2 = \frac{\cos\{\tfrac{1}{2}(\delta+\overline{\omega}-h-u)+45^0\}\cos\{\tfrac{1}{2}(\delta+\overline{\omega}+h+u)-45^0\}}{\cos\delta\cos\overline{\omega}},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\sigma^2 = -\frac{\sin\{\tfrac{1}{2}(\delta-\overline{\omega}-h-u)+45^0\}\sin\{\tfrac{1}{2}(\delta-\overline{\omega}+h+u)-45^0\}}{\cos\delta\cos\overline{\omega}}.$$

§. 8.

Indem wir σ als eine unabhängige veränderliche Grösse sich verändern lassen, und h als eine davon abhängende veränderliche Grösse, als eine Function von σ betrachten, wollen wir jetzt untersuchen, für welche Werthe des Stundenwinkels σ die Höhe h ein Maximum oder ein Minimum wird, wobei wir δ, $\overline{\omega}$ und der Kürze wegen auch $\frac{a}{R}$ als constant betrachten, was wenigstens in kleinen Zeitintervallen, die hier nur zur Betrachtung kommen, mit grosser Annäherung der Fall sein wird. Bevor wir aber zu dieser Untersuchung übergehen, ist Folgendes zu bemerken.

Bei allen unseren vorhergehenden Entwickelungen und in allen aus denselben hervorgegangenen Formeln sind die Stundenwinkel σ von dem positiven Theile der Axe der x an nach dem positiven Theile der Axe der y hin von 0 bis 360° gezählt worden, und man kann also bei dieser Auffassungsweise σ sich von 0 an stetig durch 180° hindurch bis 360° verändern lassen, wogegen eine stetige Veränderung von σ durch 0 hindurch bei dieser Auffassungsweise nicht möglich ist. Deshalb pflegt man die Stundenwinkel auch noch auf eine andere Art zu zählen, indem man dieselben absolut von dem positiven Theile der Axe der x an nach dem positiven Theile der Axe der y hin von 0 bis 180°, und eben so von dem positiven Theile der Axe der x an nach

dem negativen Theile der Axe der y hin von 0 bis 180°:
im ersten Falle aber als positiv, im zweiten als negativ be
tet, wo man also σ sich von -180^0 stetig durch 0 hin
bis $+180^0$ verändern lassen kann. Ein ganz ähnliches Verf
was hier nicht weiter erläutert zu werden braucht, befolg
bei den Azimuthen ω. Bezeichnet man nun Stundenwink
Azimuth bei der ersten Auffassungsweise wie bisher durch
bei der zweiten Auffassungsweise aber durch σ_1, ω_1; so e
auf der Stelle, dass, wenn

$$0 < \sigma < 180^0, \quad 0 < \omega < 180^0$$

ist, offenbar

$$\sigma = \sigma_1, \quad \omega = \omega_1,$$

also

$$\cos\sigma = \cos\sigma_1, \quad \cos\omega = \cos\omega_1;$$

$$\sin\sigma = \sin\sigma_1, \quad \sin\omega = \sin\omega_1;$$

wenn dagegen

$$180^0 < \sigma < 360^0, \quad 180^0 < \omega < 360^0$$

ist, offenbar

$$\sigma = 360^0 + \sigma_1, \quad \omega = 360^0 + \omega_1,$$

also wiederum

$$\cos\sigma = \cos\sigma_1, \quad \cos\omega = \cos\omega_1;$$

$$\sin\sigma = \sin\sigma_1, \quad \sin\omega = \sin\omega_1;$$

und daher immer

$$\cos\sigma = \cos\sigma_1, \quad \sin\sigma = \sin\sigma_1;$$

$$\cos\omega = \cos\omega_1, \quad \sin\omega = \sin\omega_1$$

ist; woraus sich also ganz unzweideutig ergiebt, dass die
formeln §. 4. 10) und §. 4. 11), und daher natürlich auch
raus abgeleiteten Formeln, ihre volle Gültigkeit behalte
mag die Stundenwinkel und Azimuthe im ersten oder im
Sinne auffassen. Kommt es also darauf an, sich eine
Veränderung der Stundenwinkel und Azimuthe durch 18
durch zu denken, so wird man sich immer der ersten
sungsweise bedienen, wogegen man sich der zweiten Auffa
weise bedient, wenn es darauf ankommt, die Stundenwin
Azimuthe sich stetig durch 0 hindurch verändern zu
Diese Bemerkungen hat man im Folgenden stets festz

namentlich bei der hier unmittelbar nachfolgenden Anwendung der Differentialrechnung zur Lösung einer Aufgabe über die Maxima und Minima nicht aus den Augen zu lassen. In der Regel werden wir übrigens im Folgenden die Azimuthe und Stundenwinkel immer von 0 bis 360° zählen und bloss positiv nehmen; sollen dieselben absolut nur von 0 bis 180° gezählt, aber als positiv und negativ betrachtet werden, so werden wir dies immer besonders anzeigen.

Nach §. 4. 11) ist, mit Rücksicht auf die vorhergehenden Bemerkungen:

$$\frac{a}{R}K_{\varpi}'+\frac{r}{R}\sin h=\cos\sigma\cos\delta\cos\overline{\omega}+\sin\delta\sin\overline{\omega},$$

und folglich, wenn man unter den obigen Voraussetzungen nach σ differentiirt:

$$\frac{r}{R}\cos h\frac{\partial h}{\partial\sigma}+\sin h\frac{\partial\left(\frac{r}{R}\right)}{\partial\sigma}=-\sin\sigma\cos\delta\cos\overline{\omega},$$

$$\frac{r}{R}\cos h\frac{\partial^2 h}{\partial\sigma^2}+\frac{\partial\left(\frac{r}{R}\cos h\right)}{\partial\sigma}\cdot\frac{\partial h}{\partial\sigma}+\sin h\frac{\partial^2\left(\frac{r}{R}\right)}{\partial\sigma^2}+\cos h\frac{\partial h}{\partial\sigma}\cdot\frac{\partial\left(\frac{r}{R}\right)}{\partial\sigma}$$

$$=-\cos\sigma\cos\delta\cos\overline{\omega}.$$

Setzen wir nun der Kürze wegen:

1)

$$P=(1+\frac{a}{R}\cdot\frac{e^2\sin\delta\sin\overline{\omega}}{K_{\varpi}'})^2-\left(\frac{a}{R}\right)^2\cdot\frac{\cos h^2-e^4\cos\delta^2\sin\overline{\omega}^2}{K_{\varpi}'^2}$$

$$=1+2\frac{a}{R}\cdot\frac{e^2\sin\delta\sin\overline{\omega}}{K_{\varpi}'}+\left(\frac{a}{R}\right)^2\cdot\frac{e^4\sin\overline{\omega}^2}{K_{\varpi}'^2}-\left(\frac{a}{R}\right)^2\cdot\frac{\cos h^2}{K_{\varpi}'^2},$$

so ist nach §. 6. 12*):

$$\frac{r}{R}=\sqrt{P}-\frac{a}{R}\cdot\frac{\sin h}{K_{\varpi}'},$$

also:

$$\frac{\partial\left(\frac{r}{R}\right)}{\partial g}=\frac{1}{2}P^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial P}{\partial\sigma}-\frac{a}{R}\cdot\frac{\cos h}{K_{\varpi}'}\cdot\frac{\partial h}{\partial\sigma}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{R}\right)^2P^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{\sin 2h}{K_{\varpi}'^2}\cdot\frac{\partial h}{\partial\sigma}-\frac{a}{R}\cdot\frac{\cos h}{K_{\varpi}'}\cdot\frac{\partial h}{\partial\sigma}$$

und:

$$\frac{\partial^2\left(\frac{r}{R}\right)}{\partial\sigma^2}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{R}\right)^2\cdot\frac{1}{K_{\varpi}'^2}\cdot\frac{\partial(P^{-\frac{1}{2}}\sin 2h)}{\partial\sigma}\cdot\frac{\partial h}{\partial\sigma}$$

$$+\frac{a}{R}\cdot\frac{\sin h}{K_{\varpi}'}\cdot\left(\frac{\partial h}{\partial\sigma}\right)^2$$

$$+\tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{R}\right)^2 P^{-\frac{1}{2}}.\frac{\sin 2h}{K_{\varpi}'^2}\cdot\frac{\partial^2 h}{\partial\sigma^2}$$

$$-\frac{a}{R}\cdot\frac{\cos h}{K_{\varpi}'}\cdot\frac{\partial^2 h}{\partial\sigma^2}.$$

Für $\frac{\partial h}{\partial\sigma}=0$ ist hiernach auch

$$\frac{\partial\left(\frac{r}{R}\right)}{\partial\sigma}=0,$$

also nach dem Obigen:

$$2) \ldots\ldots\ldots \sin\sigma\cos\delta\cos\overline{\omega}=0.$$

Ferner ist unter derselben Voraussetzung nach dem Obigen:

$$\frac{r}{R}\cos h\frac{\partial^2 h}{\partial\sigma^2}+\sin h\frac{\partial^2\left(\frac{r}{R}\right)}{\partial\sigma^2}=-\cos\sigma\cos\delta\cos\overline{\omega}$$

und

$$\frac{\partial^2\left(\frac{r}{R}\right)}{\partial\sigma^2}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{R}\right)^2 P^{-\frac{1}{2}}.\frac{\sin 2h}{K_{\varpi}'^2}\cdot\frac{\partial^2 h}{\partial\sigma^2}-\frac{a}{R}\cdot\frac{\cos h}{K_{\varpi}'}\cdot\frac{\partial^2 h}{\partial\sigma^2},$$

also:

$$\left\{\frac{r}{R}\cos h+\left(\frac{a}{R}\right)^2 P^{-\frac{1}{2}}.\frac{\sin h^2\cos h}{K_{\varpi}'^2}-\frac{a}{R}\cdot\frac{\sin h\cos h}{K_{\varpi}'}\right\}\frac{\partial^2 h}{\partial\sigma^2}$$

$$=-\cos\sigma\cos\delta\cos\overline{\omega},$$

und folglich, wenn man für $\frac{r}{R}$ seinen Werth aus dem Obige einführt:

$$\left\{\sqrt{P}.\cos h-2\frac{a}{R}\cdot\frac{\sin h\cos h}{K_{\varpi}'}+\left(\frac{a}{R}\right)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{P}}\cdot\frac{\sin h^2\cos h}{K_{\varpi}'^2}\right\}\frac{\partial^2 h}{\partial\sigma^2}$$

$$=-\cos\sigma\cos\delta\cos\overline{\omega}$$

oder:

$$\cos h\sqrt{P}.\{1-2\frac{a}{R}\cdot\frac{\sin h}{K_{\varpi}'\sqrt{P}}+\left(\frac{a}{R}\right)^2\cdot\left(\frac{\sin h}{K_{\varpi}'\sqrt{P}}\right)^2\}\frac{\partial^2 h}{\partial\sigma^2}$$
$$=-\cos\sigma\cos\delta\cos\overline{\omega},$$

also:

$$\cos h\sqrt{P}.(1-\frac{a}{R}\cdot\frac{\sin h}{K_{\varpi}'\sqrt{P}})^2\cdot\frac{\partial^2 h}{\partial\sigma^2}=-\cos\sigma\cos\delta\cos\overline{\omega}.$$

Die Gleichung

$$\sin\sigma\cos\delta\cos\overline{\omega}=0$$

wird erfüllt durch

$$\sigma=0 \quad\text{und}\quad \sigma=180^0.$$

Für $\sigma=0$ ist nach Vorstehendem:

$$\cos h\sqrt{P}.(1-\frac{a}{R}\cdot\frac{\sin h}{K_{\varpi}'\sqrt{P}})^2\cdot\frac{\partial^2 h}{\partial\sigma^2}=-\cos\delta\cos\overline{\omega},$$

also, weil $\cos h$, $\cos\delta$, $\cos\overline{\omega}$ stets positiv sind, der zweite Differentialquotient $\frac{\partial^2 h}{\partial\sigma^2}$ negativ, folglich h ein Maximum; für $\sigma=180^0$ ist:

$$\cos h\sqrt{P}.(1-\frac{a}{R}\cdot\frac{\sin h}{K_{\varpi}'\sqrt{P}})^2\cdot\frac{\partial^2 h}{\partial\sigma^2}=+\cos\delta\cos\overline{\omega},$$

also, aus demselben Grunde wie vorher, der zweite Differentialquotient $\frac{\partial^2 h}{\partial\sigma^2}$ positiv, folglich h ein Minimum.

Für die grösste und kleinste Höhe h selbst ist nach dem Obigen respective:

$$\frac{a}{R}K_{\varpi}'+(\sqrt{P}-\frac{a}{R}\cdot\frac{\sin h}{K_{\varpi}'})\sin h=+(\cos\delta\cos\overline{\omega}+\sin\delta\sin\overline{\omega}),$$

$$\frac{a}{R}K_{\varpi}'+(\sqrt{P}-\frac{a}{R}\cdot\frac{\sin h}{K_{\varpi}'})\sin h=-(\cos\delta\cos\overline{\omega}-\sin\delta\sin\overline{\omega});$$

also, wenn man für die grösste Höhe die oberen, für die kleinste Höhe die unteren Zeichen nimmt:

$$3)\ \ldots\ \frac{a}{R}K_{\varpi}'+(\sqrt{P}-\frac{a}{R}\cdot\frac{\sin h}{K_{\varpi}'})\sin h=\pm\cos(\delta\mp\overline{\omega}),$$

aus welcher Gleichung wir jetzt h bestimmen wollen. Nach 1) in dem Obigen und nach §. 7. 1) ist:

$$P=Q^2-\left(\frac{a}{R}\right)^2\cdot\frac{\cos h^2}{K_{\varpi}'^2},$$

wo bekanntlich Q eine positive Grösse ist; also ist die Gleichung 3):

$$\frac{a}{R}K_{\varpi}'+\left\{\sqrt{Q^2-\left(\frac{a}{R}\right)^2\cdot\frac{\cos h^2}{K_{\varpi}'^2}}-\frac{a}{R}\cdot\frac{\sin h}{K_{\varpi}'}\right\}\sin h=\pm\cos(\delta\mp\varpi),$$

oder:

$$\frac{a}{R}K_{\varpi}'+\left\{Q\sqrt{1-\frac{\left(\frac{a}{R}\right)^2}{K_{\varpi}'^2Q^2}\cos h^2}-\frac{a}{R}\cdot\frac{\sin h}{K_{\varpi}'}\right\}\sin h$$

$$=-\frac{a}{R}\cdot\frac{1-K_{\varpi}'^2}{K_{\varpi}'}+Q\left\{\frac{\frac{a}{R}}{K_{\varpi}'Q}\cos h^2+\sin h\sqrt{1-\frac{\left(\frac{a}{R}\right)^2}{K_{\varpi}'^2Q^2}\cos h^2}\right\}$$

$$=-\frac{a}{R}\cdot\frac{e^2\sin\varpi^2}{\sqrt{1-e^2\sin\varpi^2}}+Q\left\{\frac{\frac{a}{R}}{K_{\varpi}'Q}\cos h^2+\sin h\sqrt{1-\frac{\left(\frac{a}{R}\right)^2}{K_{\varpi}'^2Q^2}\cos h^2}\right\}$$

$$=\pm\cos(\delta\mp\varpi).$$

Setzen wir nun wie in §. 7. 2):

$$\sin u=\frac{\frac{a}{R}}{K_{\varpi}'Q}\cos h,$$

wo u wie dort zwischen 0 und $+90^0$ liegend gedacht wird, so ist:

$$\frac{\frac{a}{R}}{K_{\varpi}'Q}=\frac{\sin u}{\cos h},$$

und folglich nach dem Obigen:

$$Q\sin(h+u)-\frac{a}{R}\cdot\frac{e^2\sin\varpi^2}{\sqrt{1-e^2\sin\varpi^2}}=\pm\cos(\delta\mp\varpi),$$

also:

$$4)\ \ldots\ \sin(h+u)=\pm\frac{\cos(\delta\mp\varpi)}{Q}+\frac{a}{R}\cdot\frac{e^2\sin\varpi^2}{Q\sqrt{1-e^2\sin\varpi^2}},$$

mittelst welcher Formel $h+u$ gefunden wird. Nun ist aber:

$$\frac{\sin u}{\cos h}=\frac{\sin\{(h+u)-h\}}{\cos h}=\sin(h+u)-\cos(h+u)\tang h=\frac{\frac{a}{R}}{K_{\varpi}'Q},$$

also:

$$5) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \operatorname{tang} h = \operatorname{tang}(h+u) - \frac{\frac{a}{R}}{K_{\varpi}'Q} \sec(h+u),$$

mittelst welcher Formel man die grösste oder kleinste Höhe h erhält, über welche Auflösung nun aber noch die folgenden Bemerkungen zu machen sind.

Weil bekanntlich

$$-90^0 < h < +90^0,$$
$$0 < u < +90^0$$

ist, so ist

$$-90^0 < h+u < +180^0.$$

Ist nun $\sin(h+u)$ in Folge der Formel 4) negativ, so kann nur

$$-90^0 < h+u < 0$$

sein, es bleibt also bei der Bestimmung von $h+u$ mittelst der Formel 4), folglich auch bei der Bestimmung von h mittelst der Formel 5) kein Zweifel. Wenn aber $\sin(h+u)$ sich mittelst der Formel 4) positiv ergiebt, so ist

$$0 < h+u < 180^0,$$

und man erhält für $h+u$ zwei sich zu 180^0 ergänzende Werthe, welche mittelst der Formel 5) offenbar zwei dem Zeichen nach entgegengesetzte, natürlich absolut zwischen 0 und 90^0 liegende Werthe für h liefern, so dass also die Frage entsteht, welchen dieser beiden Werthe man zu nehmen hat. Nun ist aber nach 3):

$$(\sqrt{P} - \frac{a}{R} \cdot \frac{\sin h}{K_{\varpi}'}) \sin h = \pm \cos(\delta \mp \varpi) - \frac{a}{R} K_{\varpi}',$$

und weil nach dem Obigen

$$\sqrt{P} - \frac{a}{R} \cdot \frac{\sin h}{K_{\varpi}'} = \frac{r}{R}$$

ist, so ist die Grösse

$$\sqrt{P} - \frac{a}{R} \cdot \frac{\sin h}{K_{\varpi}'}$$

stets positiv; also hat nach dem Obigen

$$\pm \cos(\delta \mp \varpi) - \frac{a}{R} K_{\varpi}'$$

stets mit $\sin h$, folglich mit h gleiches Vorzeichen, woraus sich ergiebt, dass man für h immer den Werth nehmen muss, welcher mit

$$\pm\cos(\delta\mp\varpi)-\frac{a}{R}K_{\varpi}'$$

gleiches Vorzeichen hat, immer unter der Voraussetzung, dass im Vorhergehenden die oberen und unteren Vorzeichen respective bei der Bestimmung der grössten und kleinsten Höhe genommen werden müssen.

Für die Kugel ist $e=0$ und $K_{\varpi}'=1$, $Q=1$, so dass man nach 4) und 5) für diesen Fall die Formeln:

$$6) \ldots\ldots \quad \sin(h+u)=\pm\cos(\delta\mp\varpi)$$

und

$$7) \ldots\ldots \quad \tan h=\tan(h+u)-\frac{a}{R}\sec(h+u)$$

hat.

Aus der wichtigen Gleichung 3), welche man, weil

$$\frac{r}{R}=\sqrt{P}-\frac{a}{R}\cdot\frac{\sin h}{K_{\varpi}'}$$

ist, auch auf folgende Art schreiben kann:

$$8) \ldots\ldots \quad \frac{r}{R}\sin h=\pm\cos(\delta\mp\varpi)-\frac{a}{R}K_{\varpi}',$$

lassen sich verschiedene Folgerungen ziehen, von denen wir hier nur die folgende bemerken wollen. Ein Gestirn geht nie unter, wenn seine kleinste Höhe positiv, also nach 8), wenn die Bedingung

$$-\cos(\delta+\varpi)-\frac{a}{R}K_{\varpi}'>0,$$

oder

$$\cos(\delta+\varpi)+\frac{a}{R}K_{\varpi}'<0,$$

oder

$$\cos(\delta+\varpi)<-\frac{a}{R}K_{\varpi}',$$

erfüllt ist. Ein Gestirn geht nie auf, wenn seine grösste Höhe negativ, also nach 8), wenn die Bedingung

$$\cos(\delta-\varpi)-\frac{a}{R}K_{\varpi}'<0,$$

oder

$$\cos(\delta - \overline{\omega}) < \frac{a}{R} K_{\overline{\omega}}'$$

erfüllt ist. Ein Gestirn geht auf und unter, wenn seine kleinste Höhe negativ und seine grösste Höhe positiv ist, also nach 8), wenn die Bedingungen

$$-\cos(\delta + \overline{\omega}) - \frac{a}{R} K_{\overline{\omega}}' < 0,$$

$$\cos(\delta - \overline{\omega}) - \frac{a}{R} K_{\overline{\omega}}' > 0$$

oder

$$-\cos(\delta + \overline{\omega}) < \frac{a}{R} K_{\overline{\omega}}', \quad \cos(\delta - \overline{\omega}) > \frac{a}{R} K_{\overline{\omega}}'$$

erfüllt sind, wenn folglich

$$-\cos(\delta + \overline{\omega}) < \frac{a}{R} K_{\overline{\omega}}' < +\cos(\delta - \overline{\omega})$$

ist.

Für die Kugel ist in den vorhergehenden Bedingungen $K_{\overline{\omega}}' = 1$ zu setzen.

Für die Fixsterne, wenn man für dieselben $\frac{a}{R} = 0$ setzt, gehen diese Bedingungen in die folgenden über. Ein Fixstern geht nie unter, wenn

$$\cos(\delta + \overline{\omega}) < 0$$

ist; ein Fixstern geht nie auf, wenn

$$\cos(\delta - \overline{\omega}) < 0$$

ist; ein Fixstern geht auf und unter, wenn

$$-\cos(\delta + \overline{\omega}) < 0 < +\cos(\delta - \overline{\omega})$$

ist.

§. 9.

Wenn man die Gleichungen §. 4. 11) auf folgende Art:

$$\frac{r}{R} \cos\omega \cos h + \frac{a}{R} K_{\overline{\omega}} = \cos\sigma \cos\delta \sin\overline{\omega} - \sin\delta \cos\overline{\omega},$$

$$\frac{r}{R} \sin\omega \cos h = \sin\sigma \cos\delta,$$

$$\frac{r}{R} \sin h + \frac{a}{R} K_{\overline{\omega}}' = \cos\sigma \cos\delta \cos\overline{\omega} + \sin\delta \sin\overline{\omega}$$

darstellt, dieselben quadrirt und dann zu einander addirt; so lässt sich ein gleichfalls, wenigstens einigermassen, bemerkenswerther

Ausdruck von $\frac{r}{R}$ ableiten, den wir hier noch entwickeln wollen, zunächst weniger seiner selbst wegen, als um eine gewisse Controle für die Richtigkeit der früheren Entwickelungen daraus zu entnehmen. Nach dem angegebenen Verfahren erhält man nämlich sogleich die quadratische Gleichung:

$$1)\quad \left(\frac{r}{R}\right)^2+2\frac{r}{R}\cdot\frac{a}{R}(K_{\overline{\omega}}\cos\omega\cos h+K_{\overline{\omega}}'\sin h)+\left(\frac{a}{R}\right)^2(K_{\overline{\omega}}^2+K_{\overline{\omega}}'^2)=1$$

Nach §. 4. 9) ist aber:

$$K_{\overline{\omega}}\cos\omega\cos h+K_{\overline{\omega}}'\sin h$$

$$=\frac{\sin h-\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin\overline{\omega}(\sin h\sin\overline{\omega}-\cos\omega\cos h\cos\overline{\omega})}{\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin\overline{\omega}^2}},$$

also nach §. 3. 7), wenn man der Kürze wegen

$$2)\ldots A=\frac{\sin h-\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin\overline{\omega}(\sin h\sin\overline{\omega}-\cos\omega\cos h\cos\overline{\omega})}{\sqrt{1-\frac{a^4-b^4}{a^4}\sin\overline{\omega}^2}}$$

setzt:

$$K_{\overline{\omega}}\cos\omega\cos h+K_{\overline{\omega}}'\sin h=\frac{\varrho}{a}A,$$

folglich hiernach und nach §. 5. 11):

$$3)\ldots\ldots\left(\frac{r}{R}\right)^2+2A\frac{\varrho}{R}\cdot\frac{r}{R}+\left(\frac{\varrho}{R}\right)^2=1,$$

woraus sich auf gewöhnliche Weise:

$$\frac{r}{R}=-A\frac{\varrho}{R}\pm\sqrt{1-(1-A^2)\left(\frac{\varrho}{R}\right)^2}$$

ergiebt. Das Product dieser beiden Werthe von $\frac{r}{R}$ ist

$$\left(\frac{\varrho}{R}\right)^2-1,$$

und folglich, insofern nur $R>\varrho$ ist, was sich natürlich hier immer wird voraussetzen lassen, negativ, woraus sich ergiebt, dass die beiden obigen Werthe von $\frac{r}{R}$ entgegengesetzte Vorzeichen haben; und weil nun

$$\{-A\frac{\varrho}{R}+\sqrt{1-(1-A^2)\left(\frac{\varrho}{R}\right)^2}\}-\{-A\frac{\varrho}{R}-\sqrt{1-(1-A^2)\left(\frac{\varrho}{R}\right)^2}\}$$

$$=2\sqrt{1-(1-A^2)\left(\frac{\varrho}{R}\right)^2},$$

diese Differenz also positiv ist, so liefert das obere Zeichen den grösseren, folglich den positiven Werth, und man muss also:

$$4)\ \ldots\ldots\ \frac{r}{R}=\sqrt{1-(1-A^2)\left(\frac{\varrho}{R}\right)^2}-A\frac{\varrho}{R}$$

oder:

$$4^*)\ \ldots\ \frac{r}{R}=\sqrt{1-(1-A^2)\left(\frac{a}{R}\right)^2\cdot\left(\frac{\varrho}{a}\right)^2}-A\frac{a}{R}\cdot\frac{\varrho}{a}$$

setzen. Für die Kugel ist nach dem Obigen $A=\sin h$ und $\varrho=a$, also:

$$\frac{r}{R}=\sqrt{1-\left(\frac{a}{R}\cos h\right)^2}-\frac{a}{R}\sin h,$$

was ganz mit der früher gefundenen Formel §. 6. 13) übereinstimmt.

Für die Grösse A kann man noch ein Paar bemerkenswerthe Ausdrücke finden, wenn man die Breite φ einführt. Nach 2) ist nämlich:

$$A=\frac{a^2\sin h-(a^2-b^2)\sin\overline{\omega}\,(\sin h\sin\overline{\omega}-\cos\omega\cos h\cos\overline{\omega})}{\sqrt{a^4\cos\overline{\omega}^2+b^4\sin\overline{\omega}^2}},$$

also nach §. 3. 10):

$$A=\frac{\cos\varphi}{\cos\overline{\omega}}\sin h-\left(\frac{\cos\varphi}{\cos\overline{\omega}}-\frac{\sin\varphi}{\sin\overline{\omega}}\right)\sin\overline{\omega}\,(\sin h\sin\overline{\omega}-\cos\omega\cos h\cos\overline{\omega})$$

oder:

$$A=\frac{\sin h\cos\varphi-\sin(\overline{\omega}-\varphi)(\sin h\sin\overline{\omega}-\cos\omega\cos h\cos\overline{\omega})}{\cos\overline{\omega}}.$$

Addirt und subtrahirt man im Zähler dieses Bruchs das Product:

$$\sin(\overline{\omega}-\varphi)\cos(h+\overline{\omega}),$$

so erhält man:

$$A=\frac{\sin h\cos\varphi+\sin(\overline{\omega}-\varphi)\cos(h+\overline{\omega})-2\sin(\overline{\omega}-\varphi)\cos h\cos\overline{\omega}\sin\tfrac{1}{2}\omega^2}{\cos\overline{\omega}};$$

nun ist aber:

$$2\sin(\overline{\omega}-\varphi)\cos(h+\overline{\omega})=\sin(h-\varphi+2\overline{\omega})-\sin(h+\varphi),$$

also:

Ferner:

$$3) \ldots \begin{cases} \cos D' = -\frac{a}{R} G_{\varpi} - \frac{r}{R}\sin(H'-\varpi), \\ \sin D' = \quad \frac{a}{R} G_{\varpi}' + \frac{r}{R}\cos(H'-\varpi) \end{cases}$$

und:

$$4) \ldots \begin{cases} \frac{r}{R}\cos H' = \quad \frac{a}{R} K_{\varpi} + \sin(D'+\varpi), \\ \frac{r}{R}\sin H' = -\frac{a}{R} K_{\varpi}' - \cos(D'+\varpi). \end{cases}$$

Die zweiten Gleichungen in den Systemen §. 4. 10) und §. 4. 11) werden in den vorliegenden Fällen identisch.

Wenn man in jedem der vier vorhergehenden Systeme zweier Gleichungen die Grösse $\frac{r}{R}$ eliminirt, so erhält man die vier folgenden Gleichungen:

5)

$$\cos(H-D+\varpi) = \quad \frac{a}{R}\{G_{\varpi}\cos(H+\varpi) + G_{\varpi}'\sin(H+\varpi)\},$$

6)

$$\cos(H'-D'-\varpi) = -\frac{a}{R}\{G_{\varpi}\cos(H'-\varpi) - G_{\varpi}'\sin(H'-\varpi)\},$$

7)

$$\cos(H-D+\varpi) = -\frac{a}{R}(K_{\varpi}\sin H - K_{\varpi}'\cos H),$$

8)

$$\cos(H'-D'-\varpi) = -\frac{a}{R}(K_{\varpi}\sin H' + K_{\varpi}'\cos H').$$

Ferner ergeben sich aus den in Rede stehenden vier Systemen von Gleichungen leicht durch Division die folgenden Formeln

$$9) \ldots \tan g(H+\varpi) = -\frac{\cos D - \frac{a}{R} G_{\varpi}}{\sin D - \frac{a}{R} G_{\varpi}'},$$

$$10) \ldots \tan g H = -\frac{\cos(D-\varpi) - \frac{a}{R} K_{\varpi}'}{\sin(D-\varpi) + \frac{a}{R} K_{\varpi}},$$

$$11) \ldots \operatorname{tang}(H' - \varpi) = -\frac{\cos D' + \frac{a}{R} G_\varpi}{\sin D' - \frac{a}{R} G_\varpi'},$$

$$12) \ldots\ldots \operatorname{tang} H' = -\frac{\cos(D' + \varpi) + \frac{a}{R} K_\varpi'}{\sin(D' + \varpi) + \frac{a}{R} K_\varpi}.$$

Für die Kugel ist bekanntlich:

$$G_\varpi = \cos\varpi, \quad G_\varpi' = \sin\varpi, \quad G_\varpi^2 + G_\varpi'^2 = 1;$$

also nach §. 6. 1):

$$13) \ldots\ldots \frac{r}{R} = \sqrt{1 - 2\frac{a}{R}\cos(D - \varpi) + \left(\frac{a}{R}\right)^2}$$

und:

$$14) \ldots\ldots \frac{r}{R} = \sqrt{1 + 2\frac{a}{R}\cos(D' + \varpi) + \left(\frac{a}{R}\right)^2}.$$

Nach §. 9. 5) und §. 9. 6) ist:

$$15) \ldots\ldots A = \sin(H - \varphi + \varpi) = \sin(H' + \varphi - \varpi),$$

und nach §. 9. 4) ist also:

16)

$$\frac{r}{R} = \sqrt{1 - \left\{\frac{\varrho}{R}\cos(H - \varphi + \varpi)\right\}^2} - \frac{\varrho}{R}\sin(H - \varphi + \varpi)$$

$$= \sqrt{1 - \left\{\frac{\varrho}{R}\cos(H' + \varphi - \varpi)\right\}^2} - \frac{\varrho}{R}\sin(H' + \varphi - \varpi);$$

setzt man also:

17)

$$\sin v = \frac{\varrho}{R}\cos(H - \varphi + \varpi) = \frac{a}{R} \cdot \frac{\varrho}{a}\cos(H - \varphi + \varpi),$$

$$\sin v' = \frac{\varrho}{R}\cos(H' + \varphi - \varpi) = \frac{a}{R} \cdot \frac{\varrho}{a}\cos(H' + \varphi - \varpi);$$

und nimmt die Winkel v, v' immer zwischen -90^0 und $+90^0$, ist, wie man leicht findet:

18)

$$\frac{r}{R}=\frac{\cos(H-\varphi+\overline{\omega}+v)}{\cos(H-\varphi+\overline{\omega})}=\frac{\cos(H'+\varphi-\overline{\omega}+v')}{\cos(H'+\varphi-\overline{\omega})}.$$

§. 11.

Indem wir jetzt zu einigen Anwendungen der im Vorhergehenden entwickelten allgemeinen Formeln übergehen, wollen wir zuerst eine Auflösung der folgenden wichtigen Aufgabe geben:

Die Entfernung eines Weltkörpers von dem Mittelpunkte der Erde zu bestimmen, wenn man in zwei unter demselben Meridian liegenden Punkten auf der Erdoberfläche, deren als bekannt vorausgesetzte Polhöhen, Breiten und entsprechende Erdhalbmesser $\overline{\omega}, \varphi, \varrho$ und $\overline{\omega}_1, \varphi_1, \varrho_1$ sein mögen, diesen Weltkörper bei seinem Durchgange durch den Meridian beobachtet, und in diesem Moment seine Höhen H und H_1 gemessen hat.

Bezeichnen wir die Declination des Weltkörpers im Moment der Beobachtungen durch D, und für denselben Moment seine Entfernung vom Mittelpunkte der Erde durch R, seine Entfernungen von den beiden Beobachtungsorten durch r und r_1; so haben wir nach §. 10. 1) die folgenden Gleichungen:

$$1) \ldots \begin{cases} \cos D=\frac{a}{R}G_{\overline{\omega}}+\frac{r}{R}\sin(H+\overline{\omega}), \\ \sin D=\frac{a}{R}G_{\overline{\omega}}'-\frac{r}{R}\cos(H+\overline{\omega}) \end{cases}$$

und:

$$2) \ldots \begin{cases} \cos D=\frac{a}{R}G_{\overline{\omega}_1}+\frac{r_1}{R}\sin(H_1+\overline{\omega}_1), \\ \sin D=\frac{a}{R}G_{\overline{\omega}_1}'-\frac{r_1}{R}\cos(H_1+\overline{\omega}_1); \end{cases}$$

woraus sich sogleich die Gleichungen:

$$a(G_{\overline{\omega}}-G_{\overline{\omega}_1})=-r\sin(H+\overline{\omega})+r_1\sin(H_1+\overline{\omega}_1),$$

$$a(G_{\overline{\omega}}'-G_{\overline{\omega}_1}')=\ \ r\cos(H+\overline{\omega})-r_1\cos(H_1+\overline{\omega}_1);$$

und hieraus ferner die Gleichungen:

$$a\{(G_{\overline{\omega}}-G_{\overline{\omega}_1})\cos(H_1+\overline{\omega}_1)+(G_{\overline{\omega}}'-G_{\overline{\omega}_1}')\sin(H_1+\overline{\omega}_1)\}$$
$$=-r\sin(H-H_1+\overline{\omega}-\overline{\omega}_1),$$

$$a\{(G_\varpi - G_{\varpi_1})\cos(H+\varpi) + (G_\varpi' - G_{\varpi_1}')\sin(H+\varpi)\}$$
$$= -r_1 \sin(H - H_1 + \varpi - \varpi_1);$$

also zur Berechnung von r und r_1 die Formeln:

3)
$$r = \frac{(G_\varpi - G_{\varpi_1})\cos(H_1+\varpi_1) + (G_\varpi' - G_{\varpi_1}')\sin(H_1+\varpi_1)}{\sin(H_1 - H + \varpi_1 - \varpi)} a,$$
$$r_1 = \frac{(G_\varpi - G_{\varpi_1})\cos(H+\varpi) + (G_\varpi' - G_{\varpi_1}')\sin(H+\varpi)}{\sin(H_1 - H + \varpi_1 - \varpi)} a$$

ergeben.

Hat man r und r_1 auf diese Weise gefunden, so ergiebt sich R, da nach §. 10. 15)

$$A = \sin(H - \varphi + \varpi), \quad A_1 = \sin(H_1 - \varphi_1 + \varpi_1)$$

ist, mittelst einer der beiden folgenden, unmittelbar aus §. 9 fliessenden Formeln:

4) . . . $$\begin{cases} R = \sqrt{r^2 + 2r\varrho\sin(H - \varphi + \varpi) + \varrho^2}, \\ R = \sqrt{r_1^2 + 2r_1\varrho_1\sin(H_1 - \varphi_1 + \varpi_1) + \varrho_1^2}. \end{cases}$$

Natürlich lässt sich nun auch D mittelst der Formeln 1), oder auch mittelst der aus diesen Formeln sich unmittelbar ergebenden Formeln:

5) . . . . $$\begin{cases} \tang D = \dfrac{G_\varpi' - \dfrac{r}{a}\cos(H+\varpi)}{G_\varpi + \dfrac{r}{a}\sin(H+\varpi)}, \\[2ex] \tang D = \dfrac{G_{\varpi_1}' - \dfrac{r_1}{a}\cos(H_1+\varpi_1)}{G_{\varpi_1} + \dfrac{r_1}{a}\sin(H_1+\varpi_1)} \end{cases}$$

berechnen.

Da mittelst dieser letzteren Formeln D unabhängig von R gefunden wird, so kann man, wenn man D auf diese Weise gefunden hat, dann R nach §. 10. 5) auch mittelst der Formeln

6) . . . $$\begin{cases} R = \dfrac{G_\varpi\cos(H+\varpi) + G_\varpi'\sin(H+\varpi)}{\cos(H - D + \varpi)} a, \\[2ex] R = \dfrac{G_{\varpi_1}\cos(H_1+\varpi_1) + G_{\varpi_1}'\sin(H_1+\varpi_1)}{\cos(H_1 - D + \varpi_1)} \end{cases}$$

finden.

Man könnte diese Auflösung noch mehrfach abändern; das Vorhergehende genügt aber, zu zeigen, wie leicht, elegant und völlig allgemein die behandelte wichtige Aufgabe sich mittelst unserer in dieser Abhandlung entwickelten Formeln auflösen lässt.

§. 12.

Von grosser praktischer Wichtigkeit ist bekanntlich die Aufgabe:

Aus der gegebenen Polhöhe, der gegebenen Declination eines Weltkörpers, und der gemessenen Höhe desselben, die Zeit zu bestimmen;

welche im Vorhergehenden eigentlich schon vollständig aufgelöst ist, so dass wir uns also hier darauf beschränken, die zur Auflösung dieser Aufgabe erforderlichen, im Obigen bereits entwickelten Formeln zusammenzustellen.

Betrachtet man die Erde als ein Ellipsoid, so hat man nach §. 7. 6*) die folgenden Formeln:

$$\tang\theta = \frac{\frac{a}{R}\cdot\frac{e^2\cos\delta\sin\varpi}{K_{\varpi}'}}{1+\frac{a}{R}\cdot\frac{e^2\sin\delta\sin\varpi}{K_{\varpi}'}},$$

$$\sin u = \frac{\cos h\sin\theta}{e^2\cos\delta\sin\varpi},$$

$$\cos\sigma = \left\{\frac{a}{R}\cdot\frac{e^2}{K_{\varpi}'}\left[\frac{\sin(h+u)}{\sin\theta} - \frac{\sin\varpi}{\cos\delta}\right] - \tang\delta\right\}\tang\varpi;$$

wo man den Winkel θ zwischen -90^0 und $+90^0$, den Winkel u zwischen 0 und $+90^0$ zu nehmen hat.

Diese Formeln sind ganz genau. Nach §. 7. 7), 10) hat man die folgenden Näherungsformeln:

$$\sin u = \frac{a}{R}\cdot\frac{1}{K_{\varpi}'}\cos h = \frac{a}{R}\cos h(1-e^2\sin\varpi^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\sigma^2 = \frac{\cos\{\tfrac{1}{2}(\delta+\varpi-h-u)+45^0\}\cos\{\tfrac{1}{2}(\delta+\varpi+h+u)-45^0\}}{\cos\delta\cos\varpi}$$

$$-\tfrac{1}{2}e^2\frac{\sin\varpi\tang\varpi\sin u}{\cos\delta\cos h},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\sigma^2 = -\frac{\sin\{\tfrac{1}{2}(\delta-\overline{\omega}-h-u)+45^\circ\}\sin\{\tfrac{1}{2}(\delta-\overline{\omega}+h+u)-45^\circ\}}{\cos\delta\cos\overline{\omega}}$$
$$+\tfrac{1}{2}e^2\frac{\sin\overline{\omega}\operatorname{tang}\overline{\omega}\sin u}{\cos\delta\cos h};$$

wo u zwischen 0 und $+90^\circ$ zu nehmen ist.

Für die Kugel ist völlig genau:

$$\sin u = \frac{a}{R}\cos h,$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\sigma^2 = \frac{\cos\{\tfrac{1}{2}(\delta+\overline{\omega}-h-u)+45^\circ\}\cos\{\tfrac{1}{2}(\delta+\overline{\omega}+h+u)-45^\circ\}}{\cos\delta\cos\overline{\omega}},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\sigma^2 = -\frac{\sin\{\tfrac{1}{2}(\delta-\overline{\omega}-h-u)+45^\circ\}\sin\{\tfrac{1}{2}(\delta-\overline{\omega}+h+u)-45^\circ\}}{\cos\delta\cos\overline{\omega}},$$

wo auch jetzt u zwischen 0 und $+90^\circ$ genommen werden muss.

Man erhält für σ zwei sich zu 360° ergänzende verschiedene Werthe; welchen dieser beiden Werthe man zu nehmen hat, kann in jedem einzelnen Falle nur aus den Beobachtungen *selbst* entschieden werden.

§. 13.

Wenn man die dem Stundenwinkel $\sigma = 0$ entsprechende positive Höhe H eines Weltkörpers durch irgend ein Verfahren gemessen hat, und ausserdem die entsprechende Declination D desselben, so wie auch die Grösse $\frac{a}{R}$, bekannt sind; so lassen sich daraus verschiedene andere Bestimmungen auf dem Wege der Rechnung ableiten, unter denen aber die Bestimmung der Polhöhe $\overline{\omega}$ die wichtigste ist, weshalb wir uns für jetzt hier auch nur auf diese beschränken wollen.

Wie man diese Aufgabe im Allgemeinen analytisch zu behandeln hat, übersieht man auf der Stelle auf folgende Art. Nach §. 10. 1) und §. 10. 2) haben wir die folgenden Gleichungen:

$$1) \ldots\ldots \begin{cases} \cos D = \frac{a}{R}G_{\overline{\omega}} + \frac{r}{R}\sin(H+\overline{\omega}), \\ \sin D = \frac{a}{R}G_{\overline{\omega}}' - \frac{r}{R}\cos(H+\overline{\omega}) \end{cases}$$

und:

$$2) \ldots \left\{ \begin{array}{l} \frac{r}{R}\cos H = -\frac{a}{R}K_{\varpi} - \sin(D-\varpi), \\ \frac{r}{R}\sin H = -\frac{a}{R}K_{\varpi}' + \cos(D-\varpi). \end{array} \right.$$

Sowohl 1), als auch 2), ist ein System von zwei Gleichungen, aus denen sich die beiden unbekannten Grössen ϖ und $\frac{r}{R}$ bestimmen lassen. Erinnert man sich aber an die Form der bekannten Ausdrücke von G_{ϖ}, G_{ϖ}' und K_{ϖ}, K_{ϖ}', in denen jetzt ϖ als unbekannte Grösse betrachtet wird; so überzeugt man sich auf der Stelle, dass die allgemeine Auflösung unserer Aufgabe für das Ellipsoid sehr weitläufig ausfallen, ja die Kräfte der Analysis wohl fast übersteigen würde. Anders aber gestaltet sich die Sache, wenn man die Erde als eine Kugel betrachtet, weil dann bekanntlich

$$G_{\varpi} = \cos\varpi, \quad G_{\varpi}' = \sin\varpi; \quad K_{\varpi} = 0, \quad K_{\varpi}' = 1$$

ist, die obigen Gleichungen folglich in:

$$3) \ldots \left\{ \begin{array}{l} \cos D = \frac{a}{R}\cos\varpi + \frac{r}{R}\sin(H+\varpi), \\ \sin D = \frac{a}{R}\sin\varpi - \frac{r}{R}\cos(H+\varpi) \end{array} \right.$$

und

$$4) \ldots \left\{ \begin{array}{l} \frac{r}{R}\cos H = \sin(\varpi - D), \\ \frac{r}{R}\sin H = \cos(\varpi - D) - \frac{a}{R} \end{array} \right.$$

übergehen. Durch Elimination von $\frac{r}{R}$ gelangt man sogleich sowohl mittelst des des ersten, als auch mittelst zweiten Systems zu der Gleichung:

$$5) \ldots \ldots \cos(H - D + \varpi) = \frac{a}{R}\cos H,$$

mittelst welcher Formel $H - D + \varpi$, also auch ϖ, bestimmt werden kann, wenn man nur Folgendes bemerkt. Wenn man die erste und zweite der Gleichungen 3) respective mit $\sin(H+\varpi)$ und $\cos(H+\varpi)$ multiplicirt, und dann die zweite Gleichung von der ersten abzieht: so erhält man die Gleichung:

$$6) \ldots \ldots \sin(H - D + \varpi) = \frac{r}{R} + \frac{a}{R}\sin H.$$

Weil nach der Voraussetzung H positiv ist, so sind nach 5) und 6) die Grössen $\cos(H-D+\bar{\omega})$ und $\sin(H-D+\bar{\omega})$ offenbar beide stets positiv. Wenn D positiv ist, so ist offenbar:

$$-90^0 < H-D < +90^0,$$

$$-90^0 < \quad \bar{\omega} \quad < +90^0;$$

also:

$$-180^0 < H-D+\bar{\omega} < +180^0;$$

wenn dagegen D negativ ist, so ist offenbar:

$$0 < H-D < +180^0,$$

$$-90^0 < \quad \bar{\omega} \quad < +90^0;$$

also:

$$-90^0 < H-D+\bar{\omega} < +270^0.$$

Weil nun aber $\cos(H-D+\bar{\omega})$ nach dem Obigen positiv ist, so kann hiernach nur

$$-90^0 < H-D+\bar{\omega} < +90^0,$$

und weil nach dem Obigen auch $\sin(H-D+\bar{\omega})$ positiv ist, so kann hiernach ferner nur

$$0 < H-D+\bar{\omega} < +90^0$$

sein, woraus sich also ergiebt, dass, wenn man $H-D+\bar{\omega}$ mittelst der Formel 5) berechnet, diese Grösse immer zwischen 0 und $+90^0$ genommen werden muss, so dass also bei deren Bestimmung nie ein Zweifel bleiben kann; auch ist diese Bestimmung, weil $\frac{a}{R}\cos H$, und folglich nach 5) auch $\cos(H-D+\bar{\omega})$, immer der Null sehr nahe kommt, stets mit der erforderlichen Genauigkeit möglich. Berechnet man den zwischen 0 und $+90^0$ zu nehmenden Hülfswinkel p mittelst der Formel:

$$7) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \sin p = \frac{a}{R}\cos H,$$

so ist nach 5):

$$\cos(H-D+\bar{\omega}) = \sin p = \cos(90^0-p),$$

also, weil die Winkel $H-D+\bar{\omega}$ und p beide zwischen 0 und $+90^0$ liegen:

$$H-D+\bar{\omega} = 90^0-p$$

oder:

8) . . . . $H+p-D+\bar{\omega}=90^0$,

folglich:

9) . . . . $\bar{\omega}=90^0+D-H-p$.

Bis jetzt haben wir die Erde als eine Kugel angesehen, und der unter dieser Voraussetzung gefundene Werth $\bar{\omega}$ der Polhöhe ist also eigentlich nur als ein erster Näherungswerth dieser Grösse zu betrachten. Wollte man nun aber auch die ellipsoidische Gestalt der Erde berücksichtigen, so könnte man sich auf folgende Art verhalten.

Nach §. 10. 5), 7) ist:

10)

$$\cos(H-D+\bar{\omega})=\frac{a}{R}\{G_{\bar{\omega}}\cos(H+\bar{\omega})+G_{\bar{\omega}}'\sin(H+\bar{\omega})\},$$

$$\cos(H-D+\bar{\omega})=\frac{a}{R}(K_{\bar{\omega}}'\cos H-K_{\bar{\omega}}\sin H);$$

und man wird also den gefundenen ersten Näherungswerth der Polhöhe so lange verändern, bis entweder der ersten oder der zweiten dieser beiden Gleichungen vollständig genügt wird.

Aber auch der successiven Näherung kann man sich mit Vortheil bedienen. Weil nämlich bekanntlich:

$$K_{\bar{\omega}}=\frac{e^2\sin\bar{\omega}\cos\bar{\omega}}{\sqrt{1-e^2\sin\bar{\omega}^2}},\quad K_{\bar{\omega}}'=\sqrt{1-e^2\sin\bar{\omega}^2}$$

ist, so ist nach der zweiten der Gleichungen 10):

$$\cos(H-D+\bar{\omega})=\frac{a}{R}\cdot\frac{(1-e^2\sin\bar{\omega}^2)\cos H-e^2\sin\bar{\omega}\cos\bar{\omega}\sin H}{\sqrt{1-e^2\sin\bar{\omega}^2}},$$

und folglich offenbar:

11)

$$\cos(H-D+\bar{\omega})=\frac{a}{R}\cdot\frac{\cos H-e^2\sin\bar{\omega}\sin(H+\bar{\omega})}{\sqrt{1-e^2\sin\bar{\omega}^2}};$$

man findet also eine Reihe successiver Näherungswerthe

$$\bar{\omega},\ \bar{\omega}_1,\ \bar{\omega}_2,\ \bar{\omega}_3,\ \bar{\omega}_4,\ \ldots.$$

der Polhöhe mittelst der folgenden Formeln:

12)

$$\cos(H-D+\bar{\omega})=\frac{a}{R}\cos H,$$

$$\cos(H-D+\bar{\omega}_1)=\frac{a}{R}\cdot\frac{\cos H-e^2\sin\bar{\omega}\sin(H+\bar{\omega})}{\sqrt{1-e^2\sin\bar{\omega}^2}},$$

$$\cos(H-D+\bar{\omega}_2)=\frac{a}{R}\cdot\frac{\sin H-e^2\sin\bar{\omega}_1\sin(H+\bar{\omega}_1)}{\sqrt{1-e^2\sin\bar{\omega}_1{}^2}},$$

$$\cos(H-D+\bar{\omega}_3)=\frac{a}{R}\cdot\frac{\sin H-e^2\sin\bar{\omega}_2\sin(H+\bar{\omega}_2)}{\sqrt{1-e^2\sin\bar{\omega}_2{}^2}},$$

u. s. w.

wo die Rechnung so weit fortzuführen ist, bis zwei auf einander folgende Näherungswerthe sich in der verlangten Anzahl von Decimalstellen nicht mehr von einander unterscheiden.

§. 14.

Von grosser praktischer Wichtigkeit ist auch die Aufgabe:

Aus zwei gemessenen Höhen eines Weltkörpers von bekannter Declination und der Differenz der entsprechenden Stundenwinkel die Polhöhe und die Stundenwinkel zu bestimmen.

Wenn wir die beiden gemessenen Höhen und die entsprechenden Stundenwinkel und Declinationen durch

$$h,\ h_1;\quad \sigma,\ \sigma_1;\quad \delta,\ \delta_1$$

bezeichnen; so haben wir nach §. 4. 11) die folgenden Gleichungen:

1)

$$\frac{r}{R}\sin h=-\frac{a}{R}K_{\bar{\omega}}'+\cos\sigma\cos\delta\cos\bar{\omega}+\sin\delta\sin\bar{\omega},$$

$$\frac{r_1}{R_1}\sin h_1=-\frac{a}{R_1}K_{\bar{\omega}}'+\cos\sigma_1\cos\delta_1\cos\bar{\omega}+\sin\delta_1\sin\bar{\omega};$$

also, wenn wir die Erde als eine Kugel voraussetzen, weil in diesem Falle bekanntlich $K_{\bar{\omega}}'=1$ ist:

$$2)\ldots\begin{cases}\dfrac{a}{R}+\dfrac{r}{R}\sin h=\cos\sigma\cos\delta\cos\bar{\omega}+\sin\delta\sin\bar{\omega},\\[2ex]\dfrac{a}{R_1}+\dfrac{r_1}{R_1}\sin h_1=\cos\sigma_1\cos\delta_1\cos\bar{\omega}+\sin\delta_1\sin\bar{\omega}.\end{cases}$$

Berechnen wir nun die zwischen 0 und $+90^0$ liegenden Hülfswinkel u, u_1 mittelst der Formeln:

$$3) \ldots\ldots \sin u = \frac{a}{R}\cos h, \quad \sin u_1 = \frac{a}{R_1}\cos h_1;$$

wo natürlich $\frac{a}{R}$, $\frac{a}{R_1}$ als bekannt vorausgesetzt werden; so ist nach §. 7. 8):

$$4) \ldots\ldots \frac{r}{R} = \frac{\cos(h+u)}{\cos h}, \quad \frac{r_1}{R_1} = \frac{\cos(h_1+u_1)}{\cos h_1}$$

und folglich:

$$\frac{a}{R} + \frac{r}{R}\sin h = \frac{\sin u + \cos(h+u)\sin h}{\cos h} = \sin(h+u),$$

$$\frac{a}{R_1} + \frac{r_1}{R_1}\sin h_1 = \frac{\sin u_1 + \cos(h_1+u_1)\sin h_1}{\cos h_1} = \sin(h_1+u_1):$$

also nach 2):

$$5) \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} \cos\sigma = \dfrac{\sin(h+u) - \sin\delta\sin\overline{\omega}}{\cos\delta\cos\overline{\omega}}, \\[2ex] \cos\sigma_1 = \dfrac{\sin(h_1+u_1) - \sin\delta_1\sin\overline{\omega}}{\cos\delta_1\cos\overline{\omega}}. \end{array} \right.$$

Hieraus ergiebt sich durch Subtraction und Addition:

$$\cos\sigma - \cos\sigma_1 = -2\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma_1)\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma_1)$$

$$= \frac{\sin(h+u)\cos\delta_1 - \sin(h_1+u_1)\cos\delta - \sin(\delta-\delta_1)\sin\overline{\omega}}{\cos\delta\cos\delta_1\cos\overline{\omega}},$$

$$\cos\sigma + \cos\sigma_1 = 2\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma_1)\cos\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma_1)$$

$$= \frac{\sin(h+u)\cos\delta_1 + \sin(h_1+u_1)\cos\delta - \sin(\delta+\delta_1)\sin\overline{\omega}}{\cos\delta\cos\delta_1\cos\overline{\omega}}:$$

also, wenn wir der Kürze wegen:

$$6) \ldots \left\{ \begin{array}{l} A = \dfrac{\sin(h+u)\cos\delta_1 - \sin(h_1+u_1)\cos\delta}{2\cos\delta\cos\delta_1\sin\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_1)}, \\[2ex] A_1 = \dfrac{\sin(h+u)\cos\delta_1 + \sin(h_1+u_1)\cos\delta}{2\cos\delta\cos\delta_1\cos\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_1)} \end{array} \right.$$

und:

$$7) \ldots\ldots \begin{cases} B = \dfrac{\sin(\delta - \delta_1)}{2\cos\delta\cos\delta_1 \sin\frac{1}{2}(\sigma - \sigma_1)}, \\ B_1 = \dfrac{\sin(\delta + \delta_1)}{2\cos\delta\cos\delta_1 \cos\frac{1}{2}(\sigma - \sigma_1)} \end{cases}$$

setzen:

$$8) \ldots\ldots \begin{cases} A - B\sin\varpi = -\cos\varpi\sin\frac{1}{2}(\sigma + \sigma_1), \\ A_1 - B_1\sin\varpi = \cos\varpi\cos\frac{1}{2}(\sigma + \sigma_1); \end{cases}$$

woraus sich:

$$9) \ldots\ldots \left(\frac{A - B\sin\varpi}{\cos\varpi}\right)^2 + \left(\frac{A_1 - B_1\sin\varpi}{\cos\varpi}\right)^2 = 1,$$

und hieraus ferner:

$$10) \ldots \sin\varpi^2 - 2\frac{AB + A_1B_1}{1 + B^2 + B_1^2}\sin\varpi = \frac{1 - A^2 - A_1^2}{1 + B^2 + B_1^2},$$

also durch Auflösung dieser quadratischen Gleichung:

$$11)$$

$$\sin\varpi = \frac{AB + A_1B_1 \pm \sqrt{(AB + A_1B_1)^2 + (1 - A^2 - A_1^2)(1 + B^2 + B_1^2)}}{1 + B^2 + B_1^2}$$

ergiebt, so dass also die Aufgabe im Allgemeinen zwei Auflösungen zulässt; welche von beiden man zu nehmen hat, muss in jedem Falle besonders beurtheilt werden.

Hat man ϖ gefunden, so erhält man $\frac{1}{2}(\sigma + \sigma_1)$ mittelst der folgenden aus dem Obigen sich unmittelbar ergebenden Formeln:

$$12)$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(\sigma + \sigma_1) = -\frac{A - B\sin\varpi}{\cos\varpi}, \quad \cos\tfrac{1}{2}(\sigma + \sigma_1) = \frac{A_1 - B_1\sin\varpi}{\cos\varpi};$$

also:

$$13) \ldots\ldots \tan\tfrac{1}{2}(\sigma + \sigma_1) = -\frac{A - B\sin\varpi}{A_1 - B_1\sin\varpi};$$

und zwar ohne alle Zweideutigkeit, weil $\frac{1}{2}(\sigma + \sigma_1)$ zwischen 0 und 360^0 liegt, wenn man sich nur an die folgenden Regeln hält:

$A - B\sin\varpi$	$A_1 - B_1\sin\varpi$	
negativ	positiv	$0 < \frac{1}{2}(\sigma + \sigma_1) < 90^0$
negativ	negativ	$90^0 < \frac{1}{2}(\sigma + \sigma_1) < 180^0$
positiv	negativ	$180^0 < \frac{1}{2}(\sigma + \sigma_1) < 270^0$
positiv	positiv	$270^0 < \frac{1}{2}(\sigma + \sigma_1) < 360^0$.

Die Stundenwinkel σ, σ_1 selbst ergeben sich mittelst der Formeln:

$$14) \quad \left\{\begin{array}{l} \sigma = \tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma_1)+\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma_1), \\ \sigma_1 = \tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma_1)-\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma_1). \end{array}\right.$$

Wollte man nun noch die ellipsoidische Gestalt der Erde berücksichtigen, so würde dies nur auf dem Wege successiver Annäherung möglich sein, wobei man sich auf verschiedene Arten verhalten könnte, und wozu im Obigen alle erforderlichen Formeln enthalten sind, was wir hier jedoch in der Kürze nur durch das Folgende etwas weiter erläutern wollen.

Wir betrachten $\overline{\omega}$ als einen ersten Näherungswerth der zu bestimmenden Polhöhe, und berechnen die Grössen

$$\frac{r}{R} \text{ und } \frac{r_1}{R_1}$$

nach §. 6. 12*) mittelst der Formeln:

15)

$$\frac{r}{R} = \sqrt{(1+\frac{a}{R}\cdot\frac{e^2\sin\delta\sin\overline{\omega}}{K_{\varpi}'})^2-\left(\frac{a}{R}\right)^2\cdot\frac{\cos h^2-e^4\cos\delta^2\sin\overline{\omega}^2}{K_{\varpi}'^2}} - \frac{a}{R}\cdot\frac{\sin h}{K_{\varpi}'},$$

$$\frac{r_1}{R_1} = \sqrt{(1+\frac{a}{R_1}\cdot\frac{e^2\sin\delta_1\sin\overline{\omega}}{K_{\varpi}'})^2-\left(\frac{a}{R_1}\right)^2\cdot\frac{\cos h_1^2-e^4\cos\delta_1^2\sin\overline{\omega}^2}{K_{\varpi}'^2}} - \frac{a}{R_1}\cdot\frac{\sin h_1}{K_{\varpi}'}.$$

Dann haben wir zur Bestimmung eines zweiten Näherungswerthes Π der Polhöhe und zweiter Näherungswerthe Σ, Σ_1 der Stundenwinkel nach 1) die folgenden Gleichungen:

$$\frac{a}{R}K_{\varpi}'+\frac{r}{R}\sin h = \cos\Sigma\cos\delta\cos\Pi+\sin\delta\sin\Pi,$$

$$\frac{a}{R_1}K_{\varpi}'+\frac{r_1}{R_1}\sin h_1 = \cos\Sigma_1\cos\delta_1\cos\Pi+\sin\delta_1\sin\Pi;$$

oder, wenn wir der Kürze wegen:

$$16) \quad \left\{\begin{array}{l} C = \frac{a}{R}K_{\varpi}'+\frac{r}{R}\sin h, \\ \\ C_1 = \frac{a}{R_1}K_{\varpi}'+\frac{r_1}{R_1}\sin h_1 \end{array}\right.$$

setzen, die Gleichungen:

$$17) \ldots\ldots \begin{cases} \cos\Sigma = \dfrac{C-\sin\delta\sin\Pi}{\cos\delta\cos\Pi}, \\ \cos\Sigma_1 = \dfrac{C_1-\sin\delta_1\sin\Pi}{\cos\delta_1\cos\Pi}; \end{cases}$$

aus denen sich:

$$\cos\Sigma-\cos\Sigma_1 = -2\sin\tfrac{1}{2}(\Sigma-\Sigma_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Sigma+\Sigma_1)$$

$$= \frac{C\cos\delta_1 - C_1\cos\delta - \sin(\delta-\delta_1)\sin\Pi}{\cos\delta\cos\delta_1\cos\Pi},$$

$$\cos\Sigma+\cos\Sigma_1 = 2\cos\tfrac{1}{2}(\Sigma-\Sigma_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Sigma+\Sigma_1)$$

$$= \frac{C\cos\delta_1 + C_1\cos\delta - \sin(\delta+\delta_1)\sin\Pi}{\cos\delta\cos\delta_1\cos\Pi};$$

folglich, wenn wir jetzt:

$$18) \ldots\ldots \begin{cases} A = \dfrac{C\cos\delta_1 - C_1\cos\delta}{2\cos\delta\cos\delta_1\sin\frac{1}{2}(\Sigma-\Sigma_1)}, \\ A_1 = \dfrac{C\cos\delta_1 + C_1\cos\delta}{2\cos\delta\cos\delta_1\cos\frac{1}{2}(\Sigma-\Sigma_1)} \end{cases}$$

und:

$$19) \ldots\ldots \begin{cases} B = \dfrac{\sin(\delta-\delta_1)}{2\cos\delta\cos\delta_1\sin\frac{1}{2}(\Sigma-\Sigma_1)}, \\ B_1 = \dfrac{\sin(\delta+\delta_1)}{2\cos\delta\cos\delta_1\cos\frac{1}{2}(\Sigma-\Sigma_1)} \end{cases}$$

setzen, die Gleichungen:

$$20) \ldots \begin{cases} A - B\sin\Pi = -\cos\Pi\sin\tfrac{1}{2}(\Sigma+\Sigma_1), \\ A_1 - B_1\sin\Pi = \cos\Pi\cos\tfrac{1}{2}(\Sigma+\Sigma_1) \end{cases}$$

ergeben, aus denen nun Π und Σ, Σ_1 ganz eben so gefunden werden, wie vorher ϖ und σ, σ_1 aus den Gleichungen 8).

Wie man die Näherung weiter führen kann, ist klar.

§. 15.

Auf ähnliche Art wie vorher kann man für den Fall der Kugel auch die folgende Aufgabe lösen:

Aus zwei gemessenen Höhen eines Weltkörpers von bekann-

ter Declination und der Differenz der entsprechenden Azimuthe die Polhöhe und die Azimuthe zu bestimmen.

Wenn wir die gemessenen Höhen und die entsprechenden Azimuthe und Declinationen durch

$$h,\ h_1;\quad \omega,\ \omega_1;\quad \delta,\ \delta_1$$

bezeichnen; so haben wir nach §. 4. 10) die folgenden Gleichungen:

1)

$$\sin\delta = \frac{a}{R}G_{\bar\omega}' + \frac{r}{R}(\sin h\sin\bar\omega - \cos\omega\cos h\cos\bar\omega),$$

$$\sin\delta_1 = \frac{a}{R_1}G_{\bar\omega}' + \frac{r_1}{R_1}(\sin h_1\sin\bar\omega - \cos\omega_1\cos h_1\cos\bar\omega);$$

also für den Fall der Kugel, in welchem bekanntlich $G_{\bar\omega}' = \sin\bar\omega$ ist:

2)

$$\sin\delta = \left(\frac{a}{R} + \frac{r}{R}\sin h\right)\sin\bar\omega - \frac{r}{R}\cos\omega\cos h\cos\bar\omega,$$

$$\sin\delta_1 = \left(\frac{a}{R_1} + \frac{r_1}{R_1}\sin h_1\right)\sin\bar\omega - \frac{r_1}{R_1}\cos\omega_1\cos h_1\cos\bar\omega.$$

Berechnen wir nun wieder die zwischen 0 und $+90^0$ liegenden Winkel u, u_1 mittelst der Formeln:

$$3) \ldots\ldots \sin u = \frac{a}{R}\cos h,\quad \sin u_1 = \frac{a}{R_1}\cos h_1;$$

so ist nach §. 7. 8):

$$4) \ldots\ldots \frac{r}{R} = \frac{\cos(h+u)}{\cos h},\quad \frac{r_1}{R_1} = \frac{\cos(h_1+u_1)}{\cos h_1};$$

und folglich wie im vorhergehenden Paragraphen:

$$\frac{a}{R} + \frac{r}{R}\sin h = \sin(h+u),\quad \frac{a}{R_1} + \frac{r_1}{R_1}\sin h_1 = \sin(h_1+u_1);$$

also nach 2):

5)

$$\sin\delta = \sin(h+u)\sin\bar\omega - \cos(h+u)\cos\omega\cos\bar\omega,$$

$$\sin\delta_1 = \sin(h_1+u_1)\sin\bar\omega - \cos(h_1+u_1)\cos\omega_1\cos\omega;$$

folglich:

$$6) \ldots \begin{cases} \cos\omega = \dfrac{\sin(h+u)\sin\overline{\omega} - \sin\delta}{\cos(h+u)\cos\overline{\omega}}, \\[2ex] \cos\omega_1 = \dfrac{\sin(h_1+u_1)\sin\overline{\omega} - \sin\delta_1}{\cos(h_1+u_1)\cos\overline{\omega}}; \end{cases}$$

woraus sich durch Subtraction und Addition:

$$\cos\omega - \cos\omega_1 = -2\sin\tfrac{1}{2}(\omega-\omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega+\omega_1)$$

$$= \frac{\sin\{(h+u)-(h_1+u_1)\}\sin\overline{\omega} - \{\sin\delta\cos(h_1+u_1) - \sin\delta_1\cos(h+u)\}}{\cos(h+u)\cos(h_1+u_1)\cos\overline{\omega}}$$

$$\cos\omega + \cos\omega_1 = 2\cos\tfrac{1}{2}(\omega-\omega_1)\cos\tfrac{1}{2}(\omega+\omega_1)$$

$$= \frac{\sin\{(h+u)+(h_1+u_1)\}\sin\overline{\omega} - \{\sin\delta\cos(h_1+u_1) + \sin\delta_1\cos(h+u)\}}{\cos(h+u)\cos(h_1+u_1)\cos\overline{\omega}},$$

also, wenn wir der Kürze wegen:

$$7) \ldots \begin{cases} A' = \dfrac{\sin\{(h+u)-(h_1+u_1)\}}{2\cos(h+u)\cos(h_1+u_1)\sin\frac{1}{2}(\omega-\omega_1)}, \\[2ex] A_1' = \dfrac{\sin\{(h+u)+(h_1+u_1)\}}{2\cos(h+u)\cos(h_1+u_1)\cos\frac{1}{2}(\omega-\omega_1)} \end{cases}$$

und:

$$8) \ldots \begin{cases} B' = \dfrac{\sin\delta\cos(h_1+u_1) - \sin\delta_1\cos(h+u)}{2\cos(h+u)\cos(h_1+u_1)\sin\frac{1}{2}(\omega-\omega_1)}, \\[2ex] B_1' = \dfrac{\sin\delta\cos(h_1+u_1) + \sin\delta_1\cos(h+u)}{2\cos(h+u)\cos(h_1+u_1)\cos\frac{1}{2}(\omega-\omega_1)} \end{cases}$$

setzen:

$$9) \ldots \begin{cases} A'\sin\overline{\omega} - B' = -\cos\overline{\omega}\sin\tfrac{1}{2}(\omega+\omega_1), \\ A_1'\sin\overline{\omega} - B_1' = \cos\overline{\omega}\cos\tfrac{1}{2}(\omega+\omega_1) \end{cases}$$

ergiebt. Folglich ist:

$$10) \ldots (A'\sin\overline{\omega} - B')^2 + (A_1'\sin\overline{\omega} - B_1')^2 = \cos\overline{\omega}^2,$$

also, wie man hieraus leicht findet:

11)

$$(A'^2 + A_1'^2 + 1)\sin\overline{\omega}^2 - 2(A'B' + A_1'B_1')\sin\overline{\omega} + (B'^2 + B_1'^2 - 1):$$

und durch Auflösung dieser quadratischen Gleichung auf gew liche Weise:

$$12) \ldots \ldots \sin\bar{\omega} = \frac{A'B'+A_1'B_1' \pm \sqrt{(A'B'+A_1'B_1')^2-(1+A'^2+A_1'^2)(1-B'^2-B_1'^2)}}{1+A'^2+A_1'^2},$$

raus man sieht, dass auch diese Aufgabe im Allgemeinen zwei ıflösungen zulässt.

Hat man $\bar{\omega}$ gefunden, so erhält man $\frac{1}{2}(\omega+\omega_1)$ mittelst der genden, aus dem Obigen sich unmittelbar ergebenden Formeln:

13)

$$\sin\tfrac{1}{2}(\omega+\omega_1) = -\frac{A'\sin\bar{\omega}-B'}{\cos\bar{\omega}}, \quad \cos\tfrac{1}{2}(\omega+\omega_1) = \frac{A_1'\sin\bar{\omega}-B_1'}{\cos\bar{\omega}};$$

also:

$$14) \ldots \tan g\tfrac{1}{2}(\omega+\omega_1) = -\frac{A'\sin\bar{\omega}-B'}{A_1'\sin\bar{\omega}-B_1'};$$

d zwar ohne alle Zweideutigkeit, weil $\frac{1}{2}(\omega+\omega_1)$ zwischen 0 d 360° liegt, wenn man sich nur an die folgenden Regeln hält:

$A'\sin\bar{\omega}-B'$	$A_1'\sin\bar{\omega}-B_1'$	
negativ	positiv	$0<\frac{1}{2}(\omega+\omega_1)<90^0$
negativ	negativ	$90^0<\frac{1}{2}(\omega+\omega_1)<180^0$
positiv	negativ	$180^0<\frac{1}{2}(\omega+\omega_1)<270^0$
positiv	positiv	$270^0<\frac{1}{2}(\omega+\omega_1)<360^0$.

Die Azimuthe ω, ω_1 selbst ergeben sich mittelst der Formeln:

$$15) \ldots \left\{\begin{array}{l} \omega = \frac{1}{2}(\omega+\omega_1)+\frac{1}{2}(\omega-\omega_1), \\ \omega_1 = \frac{1}{2}(\omega+\omega_1)-\frac{1}{2}(\omega-\omega_1). \end{array}\right.$$

Wollen wir nun noch die ellipsoidische Gestalt der Erde berücksichtigen, so betrachten wir $\bar{\omega}$ als einen ersten Näherungswerth der zu bestimmenden Polhöhe, und berechnen die Grössen

$$\frac{r}{R} \text{ und } \frac{r_1}{R_1}$$

ch §. 6. 12*) mittelst der Formeln:

16)

$$\frac{r}{R}=\sqrt{(1+\frac{a}{R}\cdot\frac{e^2\sin\delta\sin\varpi}{K_\varpi'})^2-\left(\frac{a}{R}\right)^2\cdot\frac{\cos h^2-e^4\cos\delta^2\sin\varpi}{K_\varpi'^2}}$$

$$-\frac{a}{R}\cdot$$

$$\frac{r_1}{R_1}=\sqrt{(1+\frac{a}{R_1}\cdot\frac{e^2\sin\delta_1\sin\varpi}{K_\varpi'})^2-\left(\frac{a}{R_1}\right)^2\cdot\frac{\cos h_1{}^2-e^4\cos\delta_1{}^2}{K_\varpi'^2}}$$

$$-\frac{a}{R_1}\cdot$$

Dann haben wir zur Bestimmung eines zweiten Näherungswert Π der Polhöhe und zweiter Näherungswerthe Ω, Ω_1 der Azim nach 1) die Gleichungen:

$$\frac{\sin\delta-\frac{a}{R}G_\varpi'}{\frac{r}{R}}=\sin h\sin\Pi-\cos\Omega\cos h\cos\Pi,$$

$$\frac{\sin\delta_1-\frac{a}{R_1}G_\varpi'}{\frac{r_1}{R_1}}=\sin h_1\sin\Pi-\cos\Omega_1\cos h_1\cos\Pi;$$

oder, wenn wir der Kürze wegen:

$$17)\ \ldots\ldots\ \left\{\begin{array}{l} C'=\dfrac{\sin\delta-\frac{a}{R}G_\varpi'}{\frac{r}{R}},\\[2ex] C_1'=\dfrac{\sin\delta_1-\frac{a}{R_1}G_\varpi'}{\frac{r_1}{R_1}}\end{array}\right.$$

setzen, die Gleichungen:

$$18)\ \ldots\ldots\ \left\{\begin{array}{l} \cos\Omega=\dfrac{\sin h\sin\Pi-C'}{\cos h\cos\Pi},\\[2ex] \cos\Omega_1=\dfrac{\sin h_1\sin\Pi-C_1'}{\cos h_1\cos\Pi};\end{array}\right.$$

aus denen sich:

$$\cos\Omega - \cos\Omega_1 = -2\sin\tfrac{1}{2}(\Omega-\Omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\Omega+\Omega_1)$$
$$= \frac{\sin(h-h_1)\sin\Pi - (C'\cos h_1 - C_1'\cos h)}{\cos h\cos h_1\cos\Pi},$$

$$\cos\Omega + \cos\Omega_1 = 2\cos\tfrac{1}{2}(\Omega-\Omega_1)\cos\tfrac{1}{2}(\Omega+\Omega_1)$$
$$= \frac{\sin(h+h_1)\sin\Pi - (C'\cos h_1 + C_1'\cos h)}{\cos h\cos h_1\cos\Pi};$$

folglich, wenn wir jetzt:

$$19)\;\ldots\;\begin{cases} A' = \dfrac{\sin(h-h_1)}{2\cos h\cos h_1\sin\frac{1}{2}(\Omega-\Omega_1)}, \\ A_1' = \dfrac{\sin(h+h_1)}{2\cos h\cos h_1\cos\frac{1}{2}(\Omega-\Omega_1)} \end{cases}$$

und:

$$20)\;\ldots\;\begin{cases} B' = \dfrac{C'\cos h_1 - C_1'\cos h}{2\cos h\cos h_1\sin\frac{1}{2}(\Omega-\Omega_1)}, \\ B_1' = \dfrac{C'\cos h_1 + C_1'\cos h}{2\cos h\cos h_1\cos\frac{1}{2}(\Omega-\Omega_1)} \end{cases}$$

setzen, die Gleichungen:

$$21)\;\ldots\;\begin{cases} A'\sin\Pi - B' = -\cos\Pi\sin\frac{1}{2}(\Omega+\Omega_1), \\ A_1'\sin\Pi - B_1' = \cos\Pi\cos\frac{1}{2}(\Omega+\Omega_1) \end{cases}$$

ergeben, aus denen nun Π und Ω, Ω_1 ganz eben so gefunden werden, wie vorher $\overline{\omega}$ und ω, ω_1 aus den Gleichungen 9).

Wie man die Näherung weiter führen kann, ist klar.

§. 16.

Gleiche Höhen eines Weltkörpers auf beiden Seiten des Meridians heissen **correspondirende Höhen** desselben, deren Gleichungen wir jetzt entwickeln wollen, um nachher weitere Anwendungen davon zu machen.

Wir bezeichnen die beiden gleichen Höhen durch h und die denselben entsprechenden Entfernungen des Weltkörpes von dem Mittelpunkte der Erde und von dem Beobachtungsorte, seine Declinationen, Stundenwinkel und Azimuthe respective durch

$$R,\; R_1;\quad r,\; r_1;\quad \delta,\; \delta_1;\quad \sigma,\; \sigma_1;\quad \omega,\; \omega_1;$$

dann hat man nach §. 4. 10) und §. 4. 11) die folgenden Gleichungen:

1)

$$\sin\delta = \frac{a}{R} G_{\varpi}' + \frac{r}{R}(\sin h \sin \varpi - \cos\omega \cos h \cos\varpi),$$

$$\sin\delta_1 = \frac{a}{R_1} G_{\varpi}' + \frac{r_1}{R_1}(\sin h \sin \varpi - \cos\omega_1 \cos h \cos\varpi);$$

und:

2)

$$\frac{r}{R}\sin h = -\frac{a}{R} K_{\varpi}' + \cos\sigma\cos\delta\cos\varpi + \sin\delta\sin\varpi.$$

$$\frac{r_1}{R_1}\sin h = -\frac{a}{R_1} K_{\varpi}' + \cos\sigma_1\cos\delta_1\cos\varpi + \sin\delta_1\sin\varpi.$$

Insofern man nun in der Zwischenzeit der Beobachtungen die Grösse $\frac{a}{R}$ als constant zu betrachten, folglich

$$\frac{a}{R} = \frac{a}{R_1}$$

zu setzen berechtigt ist, hängt nach §. 6. 12*) die Grösse $\frac{r}{R}$ auf der Kugel mit völliger Genauigkeit, auf dem Ellipsoid wenigstens mit sehr grosser Annäherung, bloss von der Höhe ab, und man kann also, da hier die Höhen gleich sind,

$$\frac{r}{R} = \frac{r_1}{R_1}$$

setzen. Unter diesen Voraussetzungen ergiebt sich durch Subtraction aus 1) die Gleichung:

$$3) \ldots \sin\delta_1 - \sin\delta = \frac{r}{R}(\cos\omega - \cos\omega_1)\cos h\cos\varpi$$

und aus 2) die Gleichung:

$$4) \ldots \sin\delta_1 - \sin\delta = (\cos\sigma\cos\delta - \cos\sigma_1\cos\delta_1)\cot\varpi.$$

Für $\delta = \delta_1$ folgt aus diesen Gleichungen:

$$\cos\omega - \cos\omega_1 = -2\sin\tfrac{1}{2}(\omega - \omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega + \omega_1) = 0,$$

$$\cos\sigma - \cos\sigma_1 = -2\sin\tfrac{1}{2}(\sigma - \sigma_1)\sin\tfrac{1}{2}(\sigma + \sigma_1) = 0.$$

Wegen der ersten Gleichung ist also

$$\sin\tfrac{1}{2}(\omega - \omega_1) = 0 \quad \text{oder} \quad \sin\tfrac{1}{2}(\omega + \omega_1) = 0.$$

Weil der absolute Werth von $\frac{1}{2}(\omega - \omega_1)$ offenbar nie 180° übersteigt, so folgt aus der ersten dieser beiden Gleichungen:

$$\frac{1}{2}(\omega - \omega_1) = \left\{\begin{array}{c} -180^\circ \\ 0 \\ +180^\circ \end{array}\right. \quad \text{also} \quad \omega - \omega_1 = \left\{\begin{array}{c} -360^\circ \\ 0 \\ +360^\circ \end{array}\right.$$

was offenbar Alles unstatthaft ist, weil die correspondirenden Höhen auf entgegengesetzen Seiten des Meridians genommen vorausgesetzt werden. Weil ferner das immer positive $\frac{1}{2}(\omega + \omega_1)$ offenbar nie 360° übersteigen kann, so folgt aus der zweiten der beiden obigen Gleichungen:

$$\frac{1}{2}(\omega + \omega_1) = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 180^\circ \\ 360^\circ \end{array}\right. \quad \text{also} \quad \omega + \omega_1 = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 360^\circ \\ 720^\circ \end{array}\right.$$

von welchen drei Gleichungen offenbar die erste und dritte unstatthaft sind, so dass also nur die zweite Statt finden kann, und daher nur

5) . . . . $\omega + \omega_1 = 360^\circ$

sein kann.

Ganz eben so schliesst man aus dem Obigen, dass unter den gemachten Voraussetzungen

6) . . . . $\sigma + \sigma_1 = 360^\circ$

ist.

§. 17.

Wenn wir von der Erdaxe eine durch unseren Weltkörper gehende Ebene ausgehen lassen, so heisst der Winkel, welchen die Durchschnittslinie dieser Ebene mit der Ebene des Aequators mit einer beliebigen, aber bestimmten oder festen, von dem Mittelpunkte der Erde aus in der Ebene des Aequators gezogenen Geraden einschliesst, indem man diesen Winkel von dieser festen Geraden an im entgegengesetzten Sinne mit den von 0 bis 360° gezählten Stundenwinkeln von 0 bis 360° zählt, die Rectascension des Weltkörpers in Bezug auf die in Rede stehende Gerade.

Für unseren nächsten Zweck ist es am bequemsten, die Stundenwinkel auf bekannte Weise positiv und negativ, und absolut nicht grösser als 180° zu nehmen, wie also jetzt geschehen soll.

Dies vorausgesetzt, sei nun t die einem bestimmten absolut Zeitmomente entsprechende Uhrzeit, und zu dieser Zeit sei σ und δ der Stundenwinkel und die Declination des Weltkörpe die Uhrzeit des Durchgangs desselben durch den positiven Th des astronomischen Meridians sei T, und zu dieser Zeit se A und D seine Rectascension und Declination. Die einer Ein Uhrzeit entsprechenden Aenderungen der Rectascension und I clination, indem wir diese Aenderungen als positiv oder neg betrachten, jenachdem die Rectascension und Declination mit wachsenden Zeit zunimmt oder abnimmt, bezeichnen wir du $\varDelta A$ und $\varDelta D$. Endlich wollen wir annehmen, dass in einer E heit Uhrzeit μ Winkel-Einheiten des Aequators durch den M ridian gehen, wo μ eine Grösse ist, welche auf bekannte Wei durch einfache Beobachtungen der Fixsterne sich leicht ermittel lässt, was hier nicht weiter erläutert zu werden braucht.

Wenn nun $t < T$ ist, so gehen in der Zeit $T-t$ offenbar

$$(-\sigma)+(T-t).\varDelta A=(T-t).\varDelta A-\sigma$$

Winkel-Einheiten des Aequators durch den Meridian; in dem ben Zeit gehen aber auch $(T-t)\mu$ Winkel-Einheiten des Aequ tors durch den Meridian; also hat man die Gleichung:

$$(T-t).\varDelta A-\sigma=(T-t)\mu,$$

woraus sich

$$\sigma=(t-T)(\mu-\varDelta A)$$

ergiebt. Ferner ist offenbar:

$$D=\delta+(T-t).\varDelta D,\quad \text{also}\quad \delta=D+(t-T).\varDelta D.$$

Wenn $t > T$ ist, so gehen in der Zeit $t-T$ offenbar

$$\sigma+(t-T).\varDelta A$$

Winkel-Einheiten des Aequators durch den Meridian; in dem ben Zeit gehen aber auch $(t-T)\mu$ Winkel-Einheiten des Aequ tors durch den Meridian; also hat man die Gleichung:

$$\sigma+(t-T).\varDelta A=(t-T)\mu,$$

woraus sich

$$\sigma=(t-T)(\mu-\varDelta A)$$

ergiebt. Ferner ist offenbar:

$$\delta=D+(t-T).\varDelta D.$$

Hiernach hat man die beiden folgenden ganz allgemein tigen Gleichungen:

$$1) \ldots\ldots \begin{cases} \sigma = (t-T)(\mu - \varDelta A), \\ \delta = D + (t-T).\varDelta D. \end{cases}$$

Nach §. 16. 4) haben wir die folgende Gleichung correspondirender Höhen:

2)

$$(\sin\delta_1 - \sin\delta)\sin\bar{\omega} = (\cos\sigma\cos\delta - \cos\sigma_1\cos\delta_1)\cos\bar{\omega},$$

und bezeichnen nun t und t_1 die den beiden gleichen Höhen entsprechenden, genau beobachteten Uhrzeiten, so kommt es jetzt darauf an, die Uhrzeit T des Durchgangs des Weltkörpers durch den positiven Theil des astronomischen Meridians zu finden.

Nach 1) ist:

$$\sigma = (t-T)(\mu - \varDelta A), \quad \sigma_1 = (t_1 - T)(\mu - \varDelta A)$$

und:

$$\delta = D + (t-T).\varDelta D, \quad \delta_1 = D + (t_1 - T).\varDelta D;$$

also ist:

$$\tfrac{1}{2}(\sigma - \sigma_1) = \tfrac{1}{2}(t-t_1)(\mu - \varDelta A),$$

$$\tfrac{1}{2}(\sigma + \sigma_1) = \{\tfrac{1}{2}(t+t_1) - T\}(\mu - \varDelta A)$$

und:

$$\tfrac{1}{2}(\delta - \delta_1) = \tfrac{1}{2}(t-t_1).\varDelta D,$$

$$\tfrac{1}{2}(\delta + \delta_1) = D + \{\tfrac{1}{2}(t+t_1) - T\}.\varDelta D.$$

Wäre unser Weltkörper ein Fixstern, so wäre $\varDelta A = 0$ und nach §. 6. 16):

$$\sin h = \cos\sigma\cos\delta\cos\bar{\omega} + \sin\delta\sin\bar{\omega},$$

$$\sin h = \cos\sigma_1\cos\delta\cos\bar{\omega} + \sin\delta\sin\bar{\omega};$$

also $\cos\sigma = \cos\sigma_1$, und folglich, weil σ, σ_1, absolut genommen, 180° nicht übersteigen, aber entgegengesetzte Vorzeichen haben:

$$\sigma = -\sigma_1, \quad \sigma + \sigma_1 = 0;$$

daher nach dem Obigen für jedes μ:

$$\{\tfrac{1}{2}(t+t_1) - T\}\mu = 0,$$

also:

$$\tfrac{1}{2}(t+t_1) - T = 0.$$

Kann nun unser Weltkörper wenigstens nahe als ein Fixstern betrachtet werden, so ist, wenn wir der Kürze wegen

$$3) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad x = T - \tfrac{1}{2}(t + t_1)$$

setzen, der absolute Werth von x immer eine sehr kleine Gr

Nach dem Obigen ist:

$$\tfrac{1}{2}(\sigma - \sigma_1) = \tfrac{1}{2}(t - t_1)(\mu - \varDelta A),$$

$$\tfrac{1}{2}(\sigma + \sigma_1) = -x(\mu - \varDelta A),$$

und:

$$\tfrac{1}{2}(\delta - \delta_1) = \tfrac{1}{2}(t - t_1)\varDelta D,$$

$$\tfrac{1}{2}(\delta + \delta_1) = D - x\varDelta D;$$

woraus

$$\sigma = \{\tfrac{1}{2}(t - t_1) - x\}(\mu - \varDelta A),$$

$$\sigma_1 = -\{\tfrac{1}{2}(t - t_1) + x\}(\mu - \varDelta A)$$

und

$$\delta = D + \{\tfrac{1}{2}(t - t_1) - x\}.\varDelta D,$$

$$\delta_1 = D - \{\tfrac{1}{2}(t - t_1) + x\}.\varDelta D;$$

also nach dem Obigen:

$$\sigma = \tfrac{1}{2}(\sigma - \sigma_1) - x(\mu - \varDelta A),$$

$$\sigma_1 = -\tfrac{1}{2}(\sigma - \sigma_1) - x(\mu - \varDelta A);$$

und

$$\delta = D + \tfrac{1}{2}(\delta - \delta_1) - x\varDelta D,$$

$$\delta_1 = D - \tfrac{1}{2}(\delta - \delta_1) - x\varDelta D$$

folgt. Da aber die Grösse $x\varDelta D$ als eine kleine Grösse der ten Ordnung zu betrachten ist, so können wir, wenn wi vornehmen, überhaupt solche Grössen zu vernachlässigen,

$$\delta = D + \tfrac{1}{2}(\delta - \delta_1), \quad \delta_1 = D - \tfrac{1}{2}(\delta - \delta_1)$$

setzen; und wenn wir der Kürze wegen

$$4) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad u = x(\mu - \varDelta A)$$

setzen, so ist nach dem Obigen:

$$\sigma = \tfrac{1}{2}(\sigma - \sigma_1) - u, \quad \sigma_1 = -\tfrac{1}{2}(\sigma - \sigma_1) - u.$$

Immer mit Vernachlässigung von Grössen der zweite nung ist nun:

$$\cos\delta = \cos D - \tfrac{1}{2}(\delta - \delta_1)\sin D,$$

$$\cos\delta_1 = \cos D + \tfrac{1}{2}(\delta - \delta_1)\sin D$$

und

$$\sin\delta = \sin D + \tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1)\cos D,$$

$$\sin\delta_1 = \sin D - \tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1)\cos D;$$

ferner:

$$\cos\sigma = \cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma_1) + u\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma_1),$$

$$\cos\sigma_1 = \cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma_1) - u\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma_1);$$

also:

$$\cos\sigma\cos\delta = \cos D\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma_1) - \tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1)\sin D\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma_1) + u\cos D\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma_1),$$

$$\cos\sigma_1\cos\delta_1 = \cos D\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma_1) + \tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1)\sin D\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma_1) - u\cos D\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma_1);$$

folglich:

$$\cos\sigma\cos\delta - \cos\sigma_1\cos\delta_1$$
$$= -(\delta-\delta_1)\sin D\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma_1) + 2u\cos D\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma_1);$$

und da ferner nach dem Obigen:

$$\sin\delta - \sin\delta_1 = (\delta-\delta_1)\cos D$$

ist; so ist nach 2):

$$(\delta-\delta_1)\cos D\sin\overline{\omega}$$
$$= \{(\delta-\delta_1)\sin D\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma_1) - 2u\cos D\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma_1)\}\cos\overline{\omega},$$

also:

$$u\cos D\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma_1)$$
$$= \tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1)\{\sin D\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma_1) - \cos D\operatorname{tang}\overline{\omega}\},$$

folglich:

$$5) \ldots \quad u = \tfrac{1}{2}(\delta-\delta_1)\left\{\frac{\operatorname{tang} D}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_1)} - \frac{\operatorname{tang}\overline{\omega}}{\sin\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_1)}\right\},$$

also nach 4) und überhaupt dem Vorhergehenden:

6)

$$x = \frac{(t-t_1).\varDelta D}{2(\mu-\varDelta A)}\left\{\frac{\operatorname{tang} D}{\operatorname{tang}[\frac{1}{2}(t-t_1)(\mu-\varDelta A)]} - \frac{\operatorname{tang}\overline{\omega}}{\sin[\frac{1}{2}(t-t_1)(\mu-\varDelta A)]}\right\}$$

oder:

6*)

$$x = \frac{(t_1-t).\varDelta D}{2(\mu-\varDelta A)}\left\{\frac{\operatorname{tang} D}{\operatorname{tang}[\frac{1}{2}(t_1-t)(\mu-\varDelta A)]} - \frac{\operatorname{tang}\overline{\omega}}{\sin[\frac{1}{2}(t_1-t)(\mu-\varDelta A)]}\right\}.$$

Hat man mittelst dieser wichtigen Formel die sogenannte Mittagsverbesserung x gefunden, so erhält man die gesuchte Zeit T nach 3) mittelst der Formel:

$$7) \ldots\ldots\ldots \quad T = \tfrac{1}{2}(t + t_1) + x.$$

Die Formel für die sogenannte Mitternachtsverbesserung kann auf ähnliche Art entwickelt werden, was wir daher weiter auszuführen der Kürze wegen jetzt unterlassen.

§. 18.

Zu der in §. 14. aufgelösten Aufgabe bemerken wir jetzt noch, dass dort die Stundenwinkel bloss positiv genommen und von 0 bis 360° gezählt worden sind, wie wir dies in dieser Abhandlung, insofern nicht etwas Anderes besonders bemerkt worden ist, immer gethan haben. Man kann aber dort auch die Stundenwinkel positiv und negativ, absolut aber nicht grösser als 180° nehmen, welches in diesem Falle selbst bequemer ist. Bezeichnen wir nämlich die beobachteten Uhrzeiten der beiden gemessenen Höhen h, h_1 durch t, t_1, und behält T seine aus dem vorhergehenden Paragraphen bekannte Bedeutung, so ist nach *1)* in diesem Paragraphen, wenn man die Stundenwinkel auf die erwähnte Weise nimmt:

$$1) \ldots\ldots\ldots \begin{cases} \sigma = (t - T)(\mu - \Delta A), \\ \sigma_1 = (t_1 - T)(\mu - \Delta A); \end{cases}$$

also:

$$2) \ldots\ldots\ldots \quad \sigma - \sigma_1 = (t - t_1)(\mu - \Delta A),$$

mittelst welcher Formel die Differenz $\sigma - \sigma_1$, deren Kenntniss man zu der Berechnung der in §. 14. durch A, A_1; B, B_1 bezeichneten Grössen bedarf, gefunden wird.

Unter der jetzigen Voraussetzung rücksichtlich der Stundenwinkel ist der absolute Werth von $\frac{1}{2}(\sigma + \sigma_1)$ nicht grösser als 180°, und man hat sich also nun bei der Bestimmung von $\frac{1}{2}(\sigma + \sigma_1)$ mittelst der Formeln §. 14. 12), 13) an die folgenden Regeln zu halten:

$A - B\sin\bar{\omega}$	$A_1 - B_1\sin\bar{\omega}$	
negativ	positiv	$0 < \frac{1}{2}(\sigma + \sigma_1) < +90^0$
negativ	negativ	$+90^0 < \frac{1}{2}(\sigma + \sigma_1) < +180^0$
positiv	negativ	$-180^0 < \frac{1}{2}(\sigma + \sigma_1) < -90^0$
positiv	positiv	$-90^0 < \frac{1}{2}(\sigma + \sigma_1) < 0.$

Die Stundenwinkel σ, σ_1 selbst erhält man wieder mittelst der Formeln:

$$3) \ldots\ldots \begin{cases} \sigma = \tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma_1)+\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma_1), \\ \sigma_1 = \tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma_1)-\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma_1); \end{cases}$$

und T erhält man mittelst der aus 1) sich ergebenden Formeln:

$$4) \ldots\ldots T = t - \frac{\sigma}{\mu - \Delta A}, \quad T = t_1 - \frac{\sigma_1}{\mu - \Delta A}$$

ober auch mitttelst der sogleich hieraus fliessenden Formel:

$$5) \ldots\ldots\ldots T = \tfrac{1}{2}(t+t_1) - \frac{\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma_1)}{\mu - \Delta A}.$$

Rücksichtlich der in §. 15. aufgelösten Aufgabe bemerken wir schliesslich noch, dass, nachdem die Polhöhe $\bar{\omega}$ und die Azimuthe ω, ω_1 gefunden worden sind, dann auch leicht die den beiden Beobachtungen entsprechenden Stundenwinkel σ, σ_1 bestimmt werden können, wozu im Obigen Formeln genug enthalten sind, mag man die Stundenwinkel auf die eine oder die andere der beiden bekannten Arten nehmen. Man kann sich hiezu etwa unmittelbar der Grundformeln §. 4. 10) bedienen, aus denen sich sogleich die folgenden Formeln zur Bestimmung der Stundenwinkel σ, σ_1 ergeben:

6)

$$\cos\sigma = \frac{a}{R}\cdot\frac{G_{\bar{\omega}}}{\cos\delta} + \frac{r}{R}\cdot\frac{\sin h\cos\bar{\omega} + \cos\omega\cos h\sin\bar{\omega}}{\cos\delta},$$

$$\sin\sigma = \frac{r}{R}\cdot\frac{\sin\omega\cos h}{\cos\delta}$$

und:

7)

$$\cos\sigma_1 = \frac{a}{R_1}\cdot\frac{G_{\bar{\omega}}}{\cos\delta_1} + \frac{r_1}{R_1}\cdot\frac{\sin h_1\cos\bar{\omega} + \cos\omega_1\cos h_1\sin\bar{\omega}}{\cos\delta_1},$$

$$\sin\sigma_1 = \frac{r_1}{R_1}\cdot\frac{\sin\omega_1\cos h_1}{\cos\delta_1};$$

also auch:

8)

$$\tang\sigma = \frac{\frac{r}{R}\sin\omega\cos h}{\frac{a}{R}G_{\bar{\omega}} + \frac{r}{R}(\sin h\cos\bar{\omega} + \cos\omega\cos h\sin\bar{\omega})},$$

$$\tang\sigma_1 = \frac{\frac{r_1}{R_1}\sin\omega_1\cos h_1}{\frac{a}{R_1}G_{\bar{\omega}} + \frac{r_1}{R_1}(\sin h_1\cos\bar{\omega} + \cos\omega_1\cos h_1\sin\bar{\omega})}.$$

Weil man die Sinus und Cosinus der Stundenwinkel kennt, so kann eine Zweideutigkeit bei deren Bestimmung, mag man sie nun auf die eine oder die andere Art nehmen, nie bleiben.

Sind t, t_1 die Uhrzeiten der beiden Beobachtungen, so findet man $t-t_1$ nach 2) mittelst der Formel:

$$9) \ldots\ldots\ldots \quad t-t_1=\frac{\sigma-\sigma_1}{\mu-\varDelta A},$$

wobei vorausgesetzt ist, dass die Stundenwinkel in bekannter Weise positiv und negativ, absolut nicht grösser als 180° genommen sind. Hat man nun wenigstens eine der beiden Uhrzeiten beobachtet, so kann man mittelst vorstehender Formel auch die andere finden, und T erhält man dann wieder mittelst der aus dem Obigen schon bekannten Formeln:

$$10) \ldots \quad T=t-\frac{\sigma}{\mu-\varDelta A}, \quad T=t_1-\frac{\sigma_1}{\mu-\varDelta A};$$

wo T immer seine bekannte Bedeutung hat.

XVI.

Elementarer Beweis des Beltrami'schen Satzes.

Von

Herrn Oberlehrer Dr. *W. Stammer*
in Düsseldorf.

Ist ABC (Taf. III. Fig. 3.) das Dreieck, O der Mittelpunkt des innern und A', B', C' die Mittelpunkte der äussern eingeschriebenen Kreise, so denkt man sich die in O befindliche Masse in drei gleiche Theile zerlegt und verbindet jeden dieser Theile mit einer der drei andern Massen. Dadurch erhält man statt der ursprünglichen vier Massen jetzt drei gleiche Massen in a, b, c, wo $A'a = \frac{1}{4}A'O$, u. s. w. Der Schwerpunkt dieser Massen, also auch der der ursprünglichen, ist daher der Schwerpunkt G des Dreiecks abc. Anderseits sind die Ecken A, B, C des gegebenen Dreiecks die Höhenfusspunkte des Dreiecks $A'B'C'$, der dem Dreieck ABC umschriebene Kreis ist also der Kreis der neun Punkte für das Dreieck $A'B'C'$, mithin auch der dem $\alpha\beta\gamma$ umschriebene Kreis, wenn $O\alpha = \frac{1}{4}OA'$, u. s. w. Es bleibt mithin nur zu beweisen, dass G der Mittelpunkt dieses Kreises ist. Zu dem Ende verbindet man die Mitte E von $\alpha\beta$ mit G und γ. Dann sind $A'B'C'$, abc, $\alpha\beta\gamma$ ähnliche und ähnlich liegende Dreiecke mit dem Aehnlichkeitspunkt O, daher $\gamma E \parallel cD$. Verbindet man noch C' mit der Mitte F von $A'B'$, so ist $\gamma E = \frac{1}{4}C'F$, weil $O\gamma = \frac{1}{4}OC'$; ebenso $Dc = \frac{3}{4}C'F$, mithin $Gc = \frac{1}{3}Dc = \frac{1}{4}C'F = \gamma E$. Also ist $GE\gamma c$ ein Parallelogramm und GE senkrecht $A'B'$, mithin auch senkrecht $\alpha\beta$, wodurch der Satz bewiesen ist.

Was den andern vielfach besprochenen Satz betrifft, nämlich dass in jedem Dreieck $A = 2B$, wenn $a^2 = b^2 + bc$, so ist wohl einer der folgenden Beweise der einfachste:

I. Man zieht durch A eine Linie AD so, dass $\angle DAC = B$. Dann ist Dreieck $CAD \backsim CBA$, folglich:

$$CD : b = b : a, \quad \text{oder} \quad a.CD = b^2.$$

Dies in die gegebene Gleichung substituirt, liefert

$$a^2 = a.CD + bc \quad \text{oder} \quad bc = a(a - CD) = a.BD.$$

daher

$$BD : c = b : a;$$

durch Vergleichung mit der ersten Proportion:

$$CD : BD = b : c,$$

d. h. AD halbirt den Winkel A.

II. Halbirt man den Winkel A durch AD, so ist $CD : BD = b : c$. Substituirt man hieraus den Werth für c in die gegebene Gleichung, so erhält man

$$a^2 = b^2\left(1 + \frac{BD}{CD}\right) = b^2 \cdot \frac{a}{CD}$$

und daraus

$$a : b = b : CD;$$

daraus folgt, dass die beiden Dreiecke ABC, DAC, welche den Winkel C gemein haben, ähnlich sind, folglich $\angle DAC = B$, $A = 2B$.

Die Figur wird sich ein Jeder leicht selbst zeichnen können.

XVII.

Trunk's Planimeter.

Von

Herrn *A Hübner*

in Halle.

In der beiliegenden Zeichnung (Taf. III. Fig. 4.) sind die Hauptheile eines Instrumentes abgebildet, welches auf den Flurkarten die Ackerflächen ausmisst und berechnet.

Wenn man die Maschine benutzen will, so stellt man sie auf die betreffende Flurkarte, ergreift mit den Daumen und Zeigefingern die Griffe *b*, *b* und schiebt den erfassten Maschinentheil mit dem in eine Glastafel eingeschliffenen Punkt *w* über die Umrisse *anmda* des zu messenden Grundstückes hin. Sobald dieses geschehen ist, liest man von den vier Zifferblättern die Anzahl der Quadratruthen ab, die das Grundstück hält. Ehe man die Bewegung der Maschine beginnt, hat man jeden der vier Zeiger auf Null einzustellen. Auf dem grossen Zifferblatte sind 100 Theile, mithin die Zahlen 0 bis 100 befindlich, auf jedem der drei kleinen Zifferblätter sind 10 Theile, mithin die Zahlen 0 bis 10 ersichtlich. Das unterste kleinste Zifferblatt zeigt die Zehntausender, das linke obere die Tausender, das rechte obere die Hunderter, das grosse endlich die Zehner, Einer und Zehntel an.

Hat man das Bild der Ackerfläche umfahren und es zeigten die Zifferblätter in der aufgeführten Reihe 6 Zehntausender, 9 Tausender, 3 Hunderter, 0 Zehner, 8 Einer und $^3/_{10}$, so zeigt

das Instrument $69308^3/_{10}$ Quadratruthen an. Durch die Fortbewegung des Maschinentheils, worin sich Punkt *w* befindet, kommt der Wagen *P* auf drei Rädern *A*, wovon aber das dritte in der Zeichnung nicht sichtbar ist, in der Nuth *gg*, ferner der Schieber $Es_1s_1s_1s_1E$ auf drei Rädern *B*, wovon ebenfalls das dritte nicht sichtbar ist, in der Nuth Es_1s_1E in Bewegung. Mit dem Schieber $Es_1s_1s_1s_1E$ bewegt sich auch der darauf befestigte Rahmen *YY* und das Zifferblatt mit dem dahinter befindlichen Räderwerk, so wie auch die in dem Rahmen *YY* und in dem Räderwerke liegende Welle *W* mit dem Laufrädchen *R*. In Folge der Verschiebung kommt das Rädchen *R* auf verschiedene Stellen der kreisrunden und mit feinem Leder bezogenen Scheibe *S*, mithin bald im Centrum *c* der Scheibe, bald mehr oder weniger fern von *c* zu stehen. Während dieser Stellungsänderung des Rädchens *R* dreht sich aber die Scheibe *S* und treibt dadurch das Rädchen *R* und die Zeiger um. Steht das Rädchen nahe an *c*, so laufen die Zeiger langsam, aber wiederum um so schneller, je weiter das Rädchen *R* von *c* entfernt ist. Die Scheibe *S* ruht auf einer senkrechten Welle, welche sich in der hohlen Säule *Q* dreht und an ihrem unteren Ende eine Rolle hat, um die der aufgespannte und an den Säulchen *it* befestigte Stahldraht *it* gewunden ist. Bewegt sich nun der Wagen *P* auf seinen Rädern in der Nuth *gg*, so verschiebt sich die senkrechte Welle mit der Rolle entlang des Drahtes, so dass dadurch die Rolle und somit auch die Scheibe *S* in Drehung kommt. Bei der Führung sieht man durch die Loupe *K*.

Wenn die Geometer im Felde messen, so messen sie nur Linien und Winkel und bringen die gemessenen Linien nach einem kleinen Massstab, welcher gewöhnlich nur der $^1/_{2000}$ Theil des wirklichen Masses ist, in den aufgenommenen Winkeln auf den Messtisch, so dass die Ackerzeichnung auf dem Messtische ein Miniaturbild (der $^1/_{4000000}$ Theil) der wirklichen Ackergrösse ist. Mit Hülfe dieser Zeichnung berechnet der Geometer die Flächengrössen der gemessenen Grundstücke, indem er die Aecker in Berechnungsfiguren, gewöhnlich in Dreiecke, mittelst eingezogener Bleistiftslinien zerlegt, die Basis und senkrechte Höhe der Berechnungsfiguren abgreift, auf den kleinen Maassstab auflegt und daraus die Fläche berechnet. Das Abgreifen der Linienlängen mit Zirkel und Maassstab ist für die starke Verkleinerung des Ackerbildes nicht sicher genug, beim Rechnen kommen Rechnungsfehler vor und das Verfahren ist zeitraubend und höchst ermüdend, daneben aber soll das Resultat wegen der Eigenthums-, Grenz-, Hypotheken- und Besteuerungsverhältnisse genau sein.

Diese Umstände haben fortwährend denkende Männer auf Hülfsmittel sinnen lassen, welche neben Zeitersparniss genaue und fehlerfreie Resultate liefern können. Das Gebiet dieser Hülfsmittel umschliesst die instrumentale Planimetrie und jetzt ist für Geometer, Forstleute, Geographen, Ingenieure, Mechaniker, polytechnische und Realschulen und alle Behörden und Beamten, welche mit der Technik und Doctrin der Planimetrie zu thun haben bei H. W. Schmidt in Halle a. S. ein Buch mit XV Querfoliotafeln in Kupferstich unter dem Titel erschienen: „Die Planimeter, deren Theorie, Praxis und Geschichte vom Ingenieur Christoph Trunk zu Eisenach. 1865. Preis 4 Thaler."

Darin sind alle bekannten Planimeter besprochen und kritisch *beurtheilt*. Der Sieger unter allen ist der soeben erklärte. Die *Schärfe* und die Zeitersparniss, womit das Instrument arbeitet und daneben sich selbst controlirt, sind bewunderswürdig. Diese Instrumente werden in der mit Patent versehenen Planimeterfabrik zu Eisenach durch Mechaniker und Uhrmacher gefertigt.

Was die Geschichte des Instrumentes betrifft, so ist der Erfinder desselben der schweizerische Ingenieur Johannes Oppikofer, der auch in Verbindung mit mehreren Mechanikern den Bau solcher Maschinen zur Ausführung brachte. Schon vor ihm hatte der baierische Trigonometer Johann Martin Hermann das Modell einer ähnlichen Maschine gefertigt. Die Oppikofer'sche Erfindung ist durch den Ingenieur Wetli, dann durch Hofrath Hansen und zuletzt durch Trunk vervollkommnet worden. Man hat den Oppikofer'schen Planimeter auch Integrationsmaschine genannt, weil er in Folge von Abmessung von Linien Flächen berechnet und weil man das Instrument mit Hülfe des *Differenziirens* und Integrirens erklärte. Ingenieur Trunk hat aber in dem obigen Buche das Instrument ohne Hülfe des höheren Calcüls in elementarer Weise erklärt und berechnet, so dass es nunmehr Allen verständlich und nutzbringend ist. Dabei ist es nach der Trunk'schen Einrichtung für verschiedene Maassstäbe stellbar, beseitigt die Procentmaassstäbe und giebt ohne alle Rechnung stets scharfe Nettoangaben. Das Instrument liebt zarte Hände und können Frauenzimmer zur Führung vortheilhaft verwendet werden.

XVIII.

Ueber die Anwendung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten zur Bestimmung der Gleichgewichtsbedingungen eines Systems unveränderlich mit einander verbundener Punkte, auf deren jeden eine Kraft wirkt.

Von

Herrn Doctor *Hartwig*,

Lehrer am Grossherzogl. Mecklenburgischen Gymnasium in Schwerin.

Will man sich bei der Lösung der genannten Aufgabe den allgemeinen für die Anwendung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten gegebenen Regeln anschliessen, so geht man aus von der Gleichung:

$$\Sigma(X.\delta x + Y.\delta y + Z.\delta z) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

in welcher X, Y, Z die den Coordinatenaxen parallelen Componenten der Kräfte, δx, δy, δz die Variationen der Coordinaten ihrer Angriffspunkte bezeichnen. Ist die Zahl der Punkte $= m$, so hat man $3m-6$ Gleichungen zu berücksichtigen, durch welche die Unveränderlichkeit der gegenseitigen Lage der Punkte ausgedrückt wird. Die sich hieraus ergebenden $3m-6$ Gleichungen zwischen den Variationen δx, δy, δz.... werden, nachdem jede mit einer unbestimmten Grösse λ, μ.... multiplicirt worden ist, zu der Gleichung (1) addirt und darauf die Summen der Coefficienten der einzelnen Variationen δx, δy, δz.... für sich $=0$ gesetzt. Aus $3m-6$ der so erhaltenen $3m$ Gleichungen bestimmt man λ, μ,... und setzt ihre Werthe in die übrigen Gleichungen ein oder man eliminirt auf andere Art die Grössen λ, μ, ν.... und muss nur

s von einander unabhängige Gleichungen übrig behalten, in
n dann die Gleichgewichtsbedingungen enthalten sind.

Lagrange hat dieses Verfahren in seiner analytischen
ıanik auf drei und vier Punkte angewandt und man sieht
ıs leicht, wie man bei einer grösseren Zahl zu Werke gehen
ıte, wenn man sich den in diesem Falle ziemlich weitläufigen
rickelungen unterziehen wollte. Theils diese Weitläufigkeit,
s der Umstand, dass man, um Alles exact zu geben, immer
ganz bestimmte Zahl von Kräften als gegeben annehmen
s, ist vielleicht Ursache gewesen, dass man in neueren Lehr-
ern (von denen mir ausser einigen weniger bekannten aller-
s nur die von Poisson und Duhamel vorliegen) diesen Weg
: aufgegeben und dafür drei geradlinige Verschiebungen des
ems, parallel den drei Coordinatenaxen, und drei Drehungen,
jede der Axen eine, also im Ganzen sechs Bewegungen sub-
irt hat, wo sich dann durch Anwendung des Princips der
ellen Geschwindigkeiten die sechs Gleichungen sehr leicht
Rücksicht auf die Zahl der Kräfte ergeben. Indessen kann
sich einiger Bedenken hierbei kaum erwehren. Denn abge-
en davon, dass eine sechsfache Bewegung dem Geiste des
cips, das mit einer einzigen, aber ganz willkürlichen auszu-
men verspricht, nicht ganz zu entsprechen scheint, so bleibt
ı die Frage unbeantwortet, ob diese sechs Bewegungen und
auch die aus ihnen gefolgerten sechs Gleichungen nothwendig
ob sie ausreichend sind. Von allen diesen Einwürfen möchte
Verfahren frei sein, dessen Veröffentlichung ich mir hier
ube.

Ich *gehe* davon aus, dass jede unendlich kleine Bewegung
s Systems von Punkten als Drehung um eine ganz unbe-
nte, nöthigenfalls nach irgend welcher Richtung unendlich
entfernte Axe aufgefasst werden kann. Ich bestimme nun
Weg, den einer der Punkte bei einer solchen Drehung zu-
legt, so wie den Winkel, den die Richtung dieses Wegs mit
Richtung der Kraft bildet. Hieraus erhalte ich die Formel
las virtuelle Moment*) der Kraft. Indem ich dann die Summe
virtuellen Momente $= 0$ setze, ergeben sich die Gleichge-
ıtsbedingungen.

Seien wie gewöhnlich P, P', ... die Kräfte, α, β, γ; α', β',

*) So nennt Duhamel das Product aus der Kraft und dem auf ihre
tung projicirten Weg des Angriffspunktes. „Virtuelle Arbeit" dürfte
messener sein.

γ'; .... die Winkel, die sie mit den Axen der x, y, z in ein rechtwinkligen Coordinatensysteme bilden. xyz, $x'y'z'$, ... sind d auf dieses Axensystem bezogenen Coordinaten der Angriffspunkt Die unbestimmte Umdrehungsaxe nehmen wir zur z-Axe ein neuen Coordinatensystems. Sind nun a, a', a'' die Cosinus d Winkel, welche die neue x-Axe mit den alten Axen der z bildet, und haben b, b', b'' und c, c', c'' die analoge Bedeutu für die neuen Axen der y und z, sind endlich ξ_1, η_1, ζ_1 die a das neue Axensystem bezogenen Coordinaten des alten Coor natenanfanges, so sind die auf das neue System bezogenen Co dinaten des ersten Angriffspunktes:

$$x_1 = ax + a'y + a''z + \xi_1,$$
$$y_1 = bx + b'y + b''z + \eta_1,$$
$$z_1 = cx + c'y + c''z + \zeta_1.$$ (kommt, wie leicht zu sehen, im Fo genden nicht vor).

Das System erleide nun eine Drehung um die Axe der von der Seite der positiven y_1 nach der der positiven x_1. $\bar{\omega}$ der unendlich kleine Drehungswinkel, r die Entfernung des A griffspunktes der Kraft P von der Drehungsaxe, dann ist $r\bar{\omega}$ von diesem Angriffspunkte zurückgelegte Weg, in einer Richtu welche mit den Axen der x_1, y_1, z_1, drei Winkel bildet, deren sinus $= \frac{y_1}{r}$, $-\frac{x_1}{r}$ und 0 sind. Sind also u und v die Wi welche P mit den x_1 und y_1 bildet, endlich φ der Winkel schen P und dem Weg $r\bar{\omega}$ ihres Angriffspunktes, so ist

$$\cos\varphi = \frac{y_1}{r}.\cos u - \frac{x_1}{r}.\cos v,$$

und somit das virtuelle Moment der Kraft P:

$$P.r\bar{\omega}.\cos\varphi = \bar{\omega}.P(y_1\cos u - x_1\cos v).$$

Aus den oben angegebenen Bezeichnungen für die Winkel die Cosinus der Winkel, welche die Richtung von P und neuen Axen mit den gegebenen Coordinatenaxen bilden, unmittelbar:

$$\cos u = a\cos\alpha + a'\cos\beta + a''\cos\gamma,$$
$$\cos v = b\cos\alpha + b'\cos\beta + b''\cos\gamma;$$

also:

$$P.r\bar{\omega}.\cos\varphi = \bar{\omega}P.[(bx + b'y + b''z + \eta_1)(a\cos\alpha + a'\cos\beta + a''\mathrm{c}$$
$$-(ax + a'y + a''z + \xi_1)(b\cos\alpha + b'\cos\beta + b''\mathrm{c}$$

Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten giebt also, bei Weglassung des constanten Factors $\overline{\omega}$, als Bedingung des Gleichgewichtes:

$$\Sigma P[(bx + b'y + b''z + \eta_1)(a\cos\alpha + a'\cos\beta + a''\cos\gamma) \\ - (ax + a'y + a''z + \xi_1)(b\cos\alpha + b'\cos\beta + b''\cos\gamma)] = 0.$$

Multiplicirt man aus und vereinigt die Glieder, welche gleiche, nur von der Lage der neuen Axen abhängige Coefficienten haben, so kommt:

$$\left.\begin{array}{r} (a\eta_1 - b\xi_1)\Sigma P\cos\alpha + (a'\eta_1 - b'\xi_1)\Sigma P\cos\beta + (a''\eta_1 - b''\xi_1)\Sigma P\cos\gamma \\ + (a'b - ab')\Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha) \\ + (a''b' - a'b'')\Sigma P(y\cos\gamma - z\cos\beta) \\ + (ab'' - a''b)\Sigma P(z\cos\alpha - x\cos\gamma) \end{array}\right\} = 0.$$

In den Coefficienten der sechs Summen treten nun acht Grössen auf, zwischen denen nur zwei von einander unabhängige Gleichungen

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1 \quad \text{und} \quad b^2 + b'^2 + b''^2 = 1$$

bestehen; die Coefficienten sind demnach von einander unabhängig und willkürlich. Wenn nun die obige Summe demnach unter allen Umständen gleich Null sein soll, so setzt dies voraus, dass die einzelnen Glieder derselben Null sind, und so erhält man die sechs Gleichgewichtsbedingungen:

$$\Sigma P\cos\alpha = 0, \quad \Sigma P\cos\beta = 0, \quad \Sigma P\cos\gamma = 0;$$

$$\Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha) = 0, \quad \Sigma P(y\cos\gamma - z\cos\beta) = 0,$$

$$\Sigma P(z\cos\alpha - x\cos\gamma) = 0.$$

XIX.

Zur Theorie der Determinanten.

Von

Herrn *M. Dietrich*,

Professor am Realgymnasium in Regensburg.

Das Nachfolgende wurde begonnen, um die bekannte D
stellung des Produktes aller Differenzen gegebener Zahlen du
eine Determinante, gebildet aus den verschiedenen Potenz di
ser Zahlen, in einer andern Ableitung zu geben, als diess v
Baltzer und Brioschi in ihren Werken über die Theorie d
Determinanten geschehen ist; möge es nun erlaubt sein, die
Ableitung, sowie auch die an sie sich knüpfenden weiteren E
genschaften und Anwendungen gewisser Determinanten in K
hier niederzulegen.

Hat man

$$f(x) = x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - \ldots \pm N = (x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-$$

und hiezu

$$f_k(x) = \frac{f(x)}{x-\xi_k} = x^{n-1} - A_k x^{n-2} + B_k x^{n-3} - \ldots \mp M_k,$$

so gibt die bekannte Formel:

$$\left|\begin{matrix} r = 1, 2, \ldots, n \\ a_{1,r}\alpha_{1,s} + a_{2,r}\alpha_{2,s} + \ldots + a_{n,r}\alpha_{n,s} \\ s = 1, 2, \ldots, n \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} r = 1, \ldots, n \\ a_{r,s} \\ s = 1, \ldots, n \end{matrix}\right| \cdot \left|\begin{matrix} r = 1, \ldots, \\ \alpha_{r,s} \\ s = 1, \ldots, \end{matrix}\right|$$

---

*) Diese abgekürzte Bezeichnung einer Determinante wird e
sein, wenn man noch annimmt, dass etwa r seine Werthe in jede
rizontalen, s die seinen in jeder vertikalen Reihe durchläuft.

alsbald die Gleichung:

(1)

$$\begin{vmatrix} r=1,2,\ldots,n \\ f_r(x_s) \\ s=1,2,\ldots,n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & -A_1, & B_1, & \ldots, & \mp M_1 \\ 1, & -A_2, & \ldots & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & -A_n, & B_n, & \ldots, & \mp M_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} r=1,\ldots,n \\ x_s^{n-r} \\ s=1,\ldots,n \end{vmatrix},$$

welche im Folgenden nun weiter betrachtet werden soll.

Setzt man zuerst $x_r = \xi_r$, so wird

$$f_r(\xi_r) = f'(\xi_r) = (\xi_r - \xi_1)\ldots(\xi_r - \xi_{r-1})(\xi_r - \xi_{r+1})\ldots(\xi_r - \xi_n)$$
$$= (-1)^{n-r}(\xi_r - \xi_1)\ldots(\xi_r - \xi_{r-1})(\xi_{r+1} - \xi_r)\ldots(\xi_n - \xi_r),$$

und, wenn s von r verschieden ist:

$$f_r(\xi_s) = 0;$$

man findet daher in diesem Falle

$$\begin{vmatrix} r=1,\ldots,n \\ f_r(\xi_s) \\ s=1,\ldots,n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f'(\xi_1), & 0, & \ldots\ldots, & 0 \\ 0, & f'(\xi_2), & \ldots\ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & \ldots, 0, & f'(\xi_n) \end{vmatrix} = f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) \ldots f'(\xi_n)$$

und nach Einsetzen der Werthe von $f'(\xi_1), \ldots, f'(\xi_n)$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)\ldots(\xi_n - \xi_1)\ldots(\xi_n - \xi_{n-1})\}^2,$$

oder durch Gebrauch einer bekannten Bezeichnung

$$(2) \quad \begin{vmatrix} r=1,\ldots,n \\ f_r(\xi_s) \\ s=1,\ldots,n \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \{\Delta(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\}^2.$$

Setzt man ferner $x_s = -\xi_s$, so wird

$$f_r(-\xi_s) = (-1)^{n-1} \cdot (\xi_s + \xi_1)\ldots(\xi_s + \xi_{r-1})(\xi_s + \xi_{r+1})\ldots(\xi_s + \xi_n)$$
$$= (-1)^{n-1} \cdot \frac{2\xi_s}{\xi_s + \xi_r} \cdot (\xi_s + \xi_1)\ldots(\xi_s + \xi_{s-1})(\xi_{s+1} + \xi_s)\ldots(\xi_n + \xi_s),$$

und mithin, wenn man noch die gleichen Faktoren der Glieder jeder Reihe der betrachteten Determinante heraussetzt

$$\begin{vmatrix} r = 1, 2, \ldots, n \\ f_r(-\xi_s) \\ s = 1, 2, \ldots, n \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n(n-1)} \cdot \begin{vmatrix} r = 1, \ldots, n \\ \dfrac{2\xi_s}{\xi_s + \xi_r} \\ s = 1, \ldots, n \end{vmatrix} \cdot \{(\xi_2 + \xi_1)(\xi_3 + \xi_1)(\xi_3 + \xi_2) \ldots \ldots (\xi_n + \xi_1) \ldots (\xi_n + \xi_{n-1})\}^2,$$

oder durch Annahme einer besonderen Bezeichnung für das Produkt aller Summen von je zweien gegebenen Zahlen:

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} r = 1, 2, \ldots, n \\ f_r(-\xi_s) \\ s = 1, 2, \ldots, n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r = 1, \ldots, n \\ \dfrac{2\xi_s}{\xi_s + \xi_r} \\ s = 1, \ldots, n \end{vmatrix} \cdot \{\Sigma(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\}^2.$$

Endlich kann man allgemein bei beliebigen Werthen von x wegen $f_r(x) = \dfrac{f(x)}{x - \xi_r}$ schreiben:

4)

$$\begin{vmatrix} r = 1, 2, \ldots, n \\ f_r(x_s) \\ s = 1, 2, \ldots, n \end{vmatrix} = f(x_1) \cdot f(x_2) \ldots f(x_n) \cdot \begin{vmatrix} r = 1, 2, \ldots, n \\ \dfrac{1}{x_s - \xi_r} \\ s = 1, 2, \ldots, n \end{vmatrix}.$$

Da sodann bekanntlich

$$-A_s = -(\xi_1 + \ldots + \xi_{s-1} + \xi_{s+1} + \ldots + \xi_n) = \xi_s - A$$

$$B_s = \xi_1\xi_2 + \ldots + \xi_1\xi_{s-1} + \xi_1\xi_{s+1} + \ldots + \xi_{s-1}\xi_{s+1} + \ldots = \xi_s^2 - A\xi_s + B$$

u. s. f.

ist, so erhält man bei wiederholter Anwendung der Eigenschaft:

$$\begin{vmatrix} r = 1, 2, \ldots, n \\ \ldots, a_{k-1,s}, a_{k,s} + p \cdot a_{h,s}, a_{k+1,s}, \ldots \\ s = 1, 2, \ldots, n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r = 1, \ldots, n \\ a_{r,s} \\ s = 1, \ldots, n \end{vmatrix}$$

5)

$$\begin{vmatrix} 1, -A_1, B_1, \ldots, \mp M_1 \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ 1, -A_n, B_n, \ldots, \mp M_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1, \xi_1 - A, \xi_1^2 - A\xi_1 + B, \ldots, \xi_1^{n-1} - A\xi_1^{n-2} + \ldots \mp M \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ 1, \xi_n - A, \xi_n^2 - A\xi_n + B, \ldots, \xi_n^{n-1} - A\xi_n^{n-2} + \ldots \mp M \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r = 1, \ldots, n \\ \xi_s^{r-1} \\ s = 1, \ldots, n \end{vmatrix}.$$

Endlich hat man noch

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} r = 1, \dots, n \\ x_s^{n-r} \\ s = 1, \dots, n \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \begin{vmatrix} r = 1, \dots, n \\ x_s^{r-1} \\ s = 1, \dots, n \end{vmatrix},$$

welches für $x_s = +\xi_s$ oder $x_s = -\xi_s$ den Werth:

$$(7)\qquad (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}, \begin{vmatrix} r = 1, \dots, n \\ \xi_s^{r-1} \\ s = 1, \dots, n \end{vmatrix} \text{ oder} + \begin{vmatrix} r = 1, \dots, n \\ \xi_s^{r-1} \\ s = 1, \dots, n \end{vmatrix}$$

erhält.

Verwendet man nun nach diesen Vorbereitungen erstens die Ausdrücke (2), (5) und (7) für die Gleichung (1), so ergibt sich sogleich:

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \{\Delta(\xi_1 \dots, \xi_n)\}^2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \begin{vmatrix} r = 1, \dots, n \\ \xi_s^{r-1} \\ s = 1, \dots, n \end{vmatrix}^2,$$

woraus nach Werth und Vorzeichen, wie die Vergleichung der ersten Glieder beiderseits gibt, die bekannte Beziehung folgt:

$$(8)\qquad \Delta(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \begin{vmatrix} r = 1, 2, \dots, n \\ \xi_s^{r-1} \\ s = 1, 2, \dots, n \end{vmatrix}.$$

Die Gleichungen (3), (5) und der zweite der Ausdrücke in (7) formen ferner unter Benutzung von (8) die Gleichung (1) um in:

$$\begin{vmatrix} r = 1, 2, \dots, n \\ \dfrac{2\xi_s}{\xi_s + \xi_r} \\ s = 1, 2, \dots n \end{vmatrix} . \{\Sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)\}^2 = \begin{vmatrix} r = 1, 2, \dots n \\ \xi_s^{r-1} \\ s = 1, 2 \dots, n \end{vmatrix}^2 = \{\Delta(\xi_1, \dots \xi_n)\}^2,$$

welche entweder:

$$(9)\qquad \Sigma(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \Delta(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) : \sqrt{\begin{vmatrix} r = 1, 2, \dots n \\ \dfrac{2\xi_s}{\xi_s + \xi_r} \\ s = 1, 2, \dots n \end{vmatrix}}$$

oder

$$(10)\quad \begin{vmatrix} r=1,\ldots,n \\ \dfrac{2\xi_s}{\xi_s+\xi_r} \\ s=1,\ldots,n \end{vmatrix} = \left(\frac{\Delta(\xi_1,\ldots,\xi_n)}{\Sigma(\xi_1,\ldots,\xi_n)}\right)^2 = \left(P\left(\frac{\xi_s-\xi_r}{\xi_s+\xi_r}\right)\right)^2 \quad \begin{matrix} r=1,\ldots,s-1 \\ s=1,\ldots,n \end{matrix}$$

gibt, wo das Produktzeichen P alle Faktoren vereinigt, welche den verschiedenen Werthen von r und s entsprechen. Zuletzt erhält man aus den Gleichungen (4) und (5), in Verbindung mit (1) und (8), die Beziehung:

$$(11)\quad \begin{vmatrix} r=1,\ldots,n \\ \dfrac{1}{x_s-\xi_r} \\ s=1,\ldots,n \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{\Delta(\xi_1,\ldots,\xi_n)\,.\,\Delta(x_1,\ldots,x_n)}{f(x_1)\ldots f(x_n)},$$

welche bekanntlich bereits zur Auflösung der Gleichungen:

$$\frac{u_1}{x_1-\xi_1}+\ldots+\frac{u_n}{x_1-\xi_n}=a_1,\ldots,\frac{u_1}{x_n-\xi_1}+\ldots+\frac{u_n}{x_n-\xi_n}=a_n$$

benutzt worden ist.

Wendet man auf die Determinante in der Gleichung (11) eine bereits angezogene Eigenschaft, hier mit $p=-1$, wiederholt an, so wird

$$\begin{vmatrix} r=1,\ldots,n \\ \dfrac{1}{x_s-\xi_r} \\ s=1,\ldots,n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{x_1-\xi_1}, & \dfrac{1}{x_1-\xi_2}-\dfrac{1}{x_1-\xi_1}, & \ldots, & \dfrac{1}{x_1-\xi_n}-\dfrac{1}{x_1-\xi_{n-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{1}{x_n-\xi_1}, & \dfrac{1}{x_n-\xi_2}-\dfrac{1}{x_n-\xi_1}, & \ldots, & \dfrac{1}{x_n-\xi_n}-\dfrac{1}{x_n-\xi_{n-1}} \end{vmatrix},$$

und wenn man die hier vorkommenden Differenzen von Brüchen zu je einem Bruche vereinigt und die alsdann in den einzelnen Vertikalreihen auftretenden gleichen Zähler heraussetzt:

$$\begin{vmatrix} r=1,2,\ldots,n \\ \dfrac{1}{x_s-\xi_r} \\ s=1,2,\ldots,n \end{vmatrix} = (\xi_2-\xi_1)(\xi_3-\xi_2)\ldots(\xi_n-\xi_{n-1})$$

$$\times \begin{vmatrix} \dfrac{1}{x_1-\xi_1}, & \dfrac{1}{(x_1-\xi_1)(x_1-\xi_2)}, & \ldots, & \dfrac{1}{(x_1-\xi_{n-1})(x_1-\xi_n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{1}{x_n-\xi_1}, & \dfrac{1}{(x_n-\xi_1)(x_n-\xi_2)}, & \ldots, & \dfrac{1}{(x_n-\xi_{n-1})(x_n-\xi_n)} \end{vmatrix}.$$

Bildet man sodann, wie eben vom zweiten, nun vom dritten iede jeder Horizontalreihe angefangen, die Differenz jedes Glie- s und des ihm vorausgehenden, nachher vom vierten Gliede , u. s. f., so kommen nach und nach alle Differenzen der Zah- $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ heraus und es wird zunächst:

$$(12)\quad \left|\begin{matrix} r=1,2,\ldots,n \\ \dfrac{1}{x_s-\xi_r} \\ s=1,2,\ldots,n \end{matrix}\right| = \varDelta(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n).\left|\begin{matrix} r=1,2,\ldots,n \\ \dfrac{1}{(x_s-\xi_1)(x_s-\xi_2)\ldots(x_s-\xi_r)} \\ s=1,2,\ldots,n \end{matrix}\right|$$

d dadurch aus der Gleichung (11) die neue:

(13)

$$\left|\begin{matrix} r=1,2,\ldots,n \\ \dfrac{1}{(x_s-\xi_1)\ldots(x_s-\xi_r)} \\ s=1,2,\ldots n, \end{matrix}\right| = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{\varDelta(x_1,\ldots,x_n)}{f(x_1)\ldots f(x_n)},$$

s welcher leicht noch die weiteren:

(14)

$$\left|\begin{matrix} (x_1-\xi_i)\ldots(x_1-\xi_2),\ldots,(x_1-\xi_i),1,\dfrac{1}{x_1-\xi_{i+1}},\ldots,\dfrac{1}{(x_1-\xi_{i+1})\ldots(x_1-\xi_n)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (x_n-\xi_i)\ldots(x_n-\xi_2),\ldots,(x_n-\xi_i),1,\dfrac{1}{x_n-\xi_{i+1}},\ldots,\dfrac{1}{(x_n-\xi_{i+1})\ldots(x_n-\xi_n)} \end{matrix}\right|$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{\varDelta(x_1,\ldots,x_n)}{P(x_s-\xi_{i+1})\ldots(x_s-\xi_n)},\quad s=1,2,\ldots,n$$

(15)

$$\left|\begin{matrix} \dfrac{1}{x_1-\xi_2},\ldots,\dfrac{1}{(x_1-\xi_2)\ldots(x_1-\xi_n)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{1}{x_n-\xi_2},\ldots,\dfrac{1}{(x_n-\xi_2)\ldots(x_n-\xi_n)} \end{matrix}\right| = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{\varDelta(x_1,\ldots,x_n)}{P(x_s-\xi_2)\ldots(x_s-\xi_n)},\quad s=1,2,\ldots,n$$

und allgemeiner:

(16)

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{(x_1-\xi_{-i})(x_1-\xi_{-i+1})\dots(x_1-\xi_1)}, \dots, \frac{1}{(x_1-\xi_{-i})\dots(x_1-\xi_1)\dots(x_1-\xi_n)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{1}{(x_n-\xi_{-i})(x_n-\xi_{-i+1})\dots(x_n-\xi_1)}, \dots, \frac{1}{(x_n-\xi_{-i})\dots(x_n-\xi_1)\dots(x_n-\xi_n)} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\frac{\Delta(x_1,\dots,x_n)}{P(x_s-\xi_-)\dots(x_s-\xi_1)(x_s-\xi_n)}.$$
$$s=1,2,\dots,n$$

sich ergeben.

Diese Gleichungen lassen sich anwenden bei der Auflösung der Gleichungssysteme:

(17)

$$u_1+u_2+\dots+u_n=a_1,$$
$$\frac{u_1}{x_1-\xi_1}+\frac{u_2}{x_2-\xi_1}+\dots+\frac{u_n}{x_n-\xi_1}=a_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{u_1}{(x_1-\xi_1)\dots(x_1-\xi_{n-1})}+\dots+\frac{1}{(x_n-\xi_1)\dots(x_n-\xi_{n-1})}=a_n;$$

und

(18)

$$v_1+\frac{v_2}{x_1-\xi_1}+\dots+\frac{v_n}{(x_1-\xi_1)\dots(x_1-\xi_{n-1})}=b_1,$$
$$v_1+\frac{v_2}{x_2-\xi_1}+\dots+\frac{v_n}{(x_2-\xi_1)\dots(x_2-\xi_{n-1})}=b_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$v_1+\frac{v_2}{x_n-\xi_1}+\dots+\frac{1}{(x_n-\xi_1)\dots(x_n-\xi_{n-1})}=b_n$$

und ähnlicher. Besonders einfache Resultate erhält man aus den Gleichungen (17), wenn die Zahlen $a_1, a_2, \dots$ ebenso zusammenhängen, wie die Coefficienten der Unbekannten $u_1, u_2, \dots$, wenn also

$$a_2=\frac{a_1}{x_0-\xi_1},\quad a_3=\frac{a_2}{x_0-\xi_2},\dots,\ a_n=\frac{a_{n-1}}{x_0-\xi_{n-1}}$$

ist. Es wird nämlich dann:

$$u_i = \begin{vmatrix} 1, \frac{1}{x_1-\xi_1}, \ldots, \frac{1}{(x_1-\xi_1)\ldots(x_1-\xi_{n-1})} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1, \frac{1}{x_{i-1}-\xi_1}, \ldots\ldots\ldots \\ a_1, \frac{a_1}{x_0-\xi_1}, \ldots\ldots\ldots \\ 1, \frac{1}{x_{i+1}-\xi_1}, \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1, \frac{1}{x_1-\xi_1}, \ldots \\ \ldots\ldots \\ 1, \frac{1}{x_i-\xi_1}, \ldots \\ \ldots\ldots \\ 1, \frac{1}{x_n-\xi_1}, \ldots \end{vmatrix}$$

also auch mittelst (15)

$$u_i = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 \cdot \frac{\Delta(x_1, \ldots, x_0, \ldots, x_n)}{P(x_s-\xi_1)\ldots(x_s-\xi_{n-1})} \qquad s=1,\ldots,i-1,0,i+1,\ldots,n$$

$$:(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{\Delta(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{P(x_s-\xi_1)\ldots(x_s-\xi_{n-1})}, \qquad s=1,\ldots,i,\ldots,n$$

und durch Vereinfachung endlich:

(19)

$$u_i = a_1 \cdot \frac{(x_0-x_1)\ldots(x_0-x_{i-1})(x_{i+1}-x_0)\ldots(x_n-x_0)}{(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)\ldots(x_n-x_i)} : \frac{(x_0-\xi_1)\ldots(x_0-\xi_{n-1})}{(x_i-\xi_1)\ldots(x_i-\xi_{n-1})}.$$

Bei beliebigen Werthen von $a_1, a_2, \ldots$ gibt die Auflösung der Gleichungen (17):

$$u_i = \begin{vmatrix} 1, \frac{1}{x_1-\xi_1}, \ldots, \frac{1}{(x_1-\xi_1)\ldots(x_1-\xi_{n-1})} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1, \frac{1}{x_{i-1}-\xi_1}, \ldots\ldots\ldots \\ a_1, \; a_2, \ldots\ldots\ldots \\ 1, \frac{1}{x_{i+1}-\xi_1}, \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1, \frac{1}{x_1-\xi_1}, \ldots \\ \ldots\ldots \\ 1, \frac{1}{x_i-\xi_1}, \ldots \\ \ldots\ldots \\ 1, \frac{1}{x_n-\xi_1}, \ldots \end{vmatrix},$$

wo der Nenner wieder den Werth

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{\Delta(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)}{P(x_s-\xi_1)\ldots(x_s-\xi_{n-1})}$$

$$s=1,2,\ldots,n$$

hat, während der Zähler zunächst

$$= \Sigma(-1)^{i+h} a_h$$

$$\left|\begin{array}{l} 1, \frac{1}{x_1-\xi_1}, \ldots \frac{1}{(x_1-\xi_1)\ldots(x_1-\xi_{h-2})}, \frac{1}{(x_1-\xi_1)\ldots(x_1-\xi_h)}, \ldots \frac{1}{(x_1-\xi_1)\ldots(x_1-\xi_{n-1})} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 1, \frac{1}{x_{i-1}-\xi_1}, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 1, \frac{1}{x_{i+1}-\xi_1}, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right|$$

und durch Auflösung der hier vorkommenden Determinanten in Produkte von Partialdeterminanten

$$= \Sigma(-1)^{i+h} a_h \cdot \Sigma \pm \left|\begin{array}{l} 1, \frac{1}{x_c-\xi_1}, \ldots, \frac{1}{(x_c-\xi_1)\ldots(x_c-\xi_{h-2})} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 1, \frac{1}{x_d-\xi_1}, \ldots, \frac{1}{(x_d-\xi_1)\ldots(x_d-x_{h-2})} \end{array}\right|$$

$$\times \left|\begin{array}{l} \frac{1}{(x_f-\xi_1)\ldots(x_f-\xi_h)}, \ldots, \frac{1}{(x_f-\xi_1)\ldots(x_f-\xi_{n-1})} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{1}{(x_g-\xi_1)\ldots(x_g-\xi_h)}, \ldots, \frac{1}{(x_g-\xi_1)\ldots(x_g-\xi_{n-1})} \end{array}\right|$$

wird, wobei die Zeiger $c, \ldots, d, f, \ldots, g$ durch alle möglichen Anordnungen der Zeiger $1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$ zu je $h-1$ und $n-h$ bestimmt sind und voraus immer das Zeichen $+$ oder $-$ zu nehmen ist, je nachdem die Reihen $c, \ldots, d, f, \ldots, g$ und $1, 2, \ldots, i-1, i+1 \ldots, n$ in dieselbe Permutationsklasse gehören oder nicht. Wendet man hier die Gleichungen (15) und (16) an und führt die möglichen Vereinfachungen durch, so ergibt sich zuletzt:

(20)

$$u_i = (-1)^{i-1} \cdot \frac{(x_i-\xi_1)\ldots(x_i-\xi_{n-1})}{(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)\ldots(x_n-x_i)}$$

$$s=c,\ldots,d$$

$$\times \Sigma(-1)^{(n-1)h} a_h \cdot \Sigma \pm \frac{P(x_s-\xi_{h-1})\ldots(x_s-\xi_{n-1})}{P(x_q-x_r)},$$

$l > r$ und beide in allen möglichen Arten, jedes einer andern Gruppen $c, \ldots, d$ und $f, \ldots, g$ zu entnehmen sind.

In gleicher Weise geben die Gleichungen (18) die Auflösung:

(21)

$$v_k = \Sigma(-1)^{(n-1)k+i-1} b_i \cdot \frac{(x_i-\xi_1)\ldots(x_i-\xi_{n-1})}{(x_i-x_1)\ldots(x_n-x_i)}$$

$$s = c, \ldots, d$$

$$\times \Sigma \pm \frac{P(x_s-\xi_{k-1})\ldots(x_s-\xi_{n-1})}{P(x_q-x_r)},$$

in welcher bezüglich der Zeiger $c, \ldots, d$, q und r das oben Gesagte gilt.

Da schliesslich, wenn $\varphi_r(x)$ eine rationale ganze Funktion vom höchstens $r$ten Grade ist, offenbar

$$\frac{\varphi_r(x)}{(x-\xi_1)\ldots(x-\xi_r)} = A_{r,0} + \frac{A_{r,1}}{x-\xi_1} + \ldots + \frac{A_{r,r}}{(x-\xi_1)\ldots(x-\xi_r)}$$

gesetzt werden kann, wo $A_{r,r} = \varphi_r(\xi_r)$ ist, so erhält man auch nach der schon wiederholt angewendeten Eigenschaft der Determinanten:

$$\begin{vmatrix} 1, \frac{\varphi_1(x_1)}{x_1-\xi_1}, \ldots, \frac{\varphi_{n-1}(x_1)}{(x_1-\xi_1)\ldots(x_1-\xi_{n-1})} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ 1, \frac{\varphi_1(x_n)}{x_n-\xi_1}, \ldots, \frac{\varphi_{n-1}(x_n)}{(x_n-\xi_1)\ldots(x_n-\xi_{n-1})} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1, \frac{\varphi_1(\xi_1)}{x_1-\xi_1}, \ldots, \frac{\varphi_{n-1}(\xi_{n-1})}{(x_1-\xi_1)\ldots,(x_1-\xi_{n-1})} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ 1, \frac{\varphi_1(\xi_1)}{x_n-\xi_1}, \ldots, \frac{\varphi_{n-1}(\xi_{n-1})}{(x_n-\xi_1)\ldots,(x_n-\xi_{n-1})} \end{vmatrix}$$

$$= \varphi_1(\xi_1)\ldots\varphi_{n-1}(\xi_{n-1}) \cdot \begin{vmatrix} 1, \frac{1}{x_1-\xi_1}, \ldots, \frac{1}{(x_1-\xi_1)\ldots,(x_1-\xi_{n-1})} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ 1, \frac{1}{x_n-\xi_1}, \ldots, \frac{1}{(x_n-\xi_1)\ldots,(x_n-\xi_{n-1})} \end{vmatrix},$$

glich

(22)

$$\begin{vmatrix} 1, \frac{\varphi_1(x_1)}{x_1-\xi_1}, \ldots, \frac{\varphi_{n-1}(x_1)}{(x_1-\xi_1)\ldots(x_1-\xi_{n-1})} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 1, \frac{\varphi_1(x_n)}{x_n-\xi_1}, \ldots, \frac{\varphi_{n-1}(x_n)}{(x_n-\xi_1)\ldots(x_n-\xi_{n-1})} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}, \frac{\varphi_1(\xi_1)\ldots\varphi_{n-1}(\xi_{n-1})}{P(x_s-\xi_1)\ldots(x_s-\xi_{n-1})} \cdot \Delta(x_1, \ldots x_n).$$
$$s = 1, 2, \ldots, n$$

Für $\varphi_r(x) = (x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_r)$ gibt diese Gleichung noch, man ferner $\xi_r = \alpha_{n+r-1}$ setzt,

(23)

$$\begin{vmatrix} r = 1, 2, \ldots, n \\ \dfrac{1}{(x_s-\alpha_r)\ldots(x_s-\alpha_{n+r-2})} \\ s = 1, 2, \ldots, n \end{vmatrix}$$

$$r = 1, 2, \ldots, n-1$$
$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{P(\alpha_{n+r-1}-\alpha_1)\ldots(\alpha_{n+r-1}-\alpha_r)}{P(x_s-\alpha_1)\ldots(x_s-\alpha_{2n-2})} \cdot \Delta(x_1, \ldots,$$
$$s = 1, 2, \ldots, n$$

Diese beiden Relationen enthalten gleichfalls wieder di tel zur Darstellung der Werthe der Unbekannten solcher chungssysteme, welche die aufeinanderfolgenden horizo oder vertikalen Reihenglieder der Determinante in (22) od als Coefficienten der Unbekannten haben. Wendet man die auf den besondern Fall:

(24)

$$w_1 + w_2 + \ldots + w_n = a_1,$$

$$\frac{\varphi_1(x_1)}{x_1-\xi_1} \cdot w_1 + \ldots + \frac{\varphi_1(x_n)}{x_n-\xi_1} \cdot w_n = \frac{\varphi_1(x_0)}{x_0-\xi_1} \cdot a_1,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{\varphi_{n-1}(x_1)}{(x_1-\xi_1)\ldots(x_1-\xi_{n-1})} \cdot w_1 + \ldots + \frac{\varphi_{n-1}(x_n)}{(x_n-\xi_1)\ldots(x_n-\xi_{n-1})} \cdot w$$

$$= \frac{\varphi_{n-1}(x_0)}{(x_0-\xi_1)\ldots(x-\xi_{n-1})} \cdot a_1$$

an, so findet man für die Unbekannten $w_1,\ldots,w_n$ die in (19) für die Zahlen $u_1,\ldots,u_n$ bereits erhaltenen Werthe, so dass die Auflösungen der Gleichungen (24) von den Funktionen $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_{n-1}(x)$ unabhängig erscheinen und dieselben als für $\varphi_1(x) = \ldots = \varphi_{n-1}(x) = 1$ sind.

Die allgemeineren Fälle erfahren dieselbe Behandlung, als welche zu den Resultaten in (20) und (21) führte.

XX.

Ueber die Schwere an der Oberfläche eines gleichförmig dichten, durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleinere Axe erzeugten Rotationssphäroides.

Von

Herrn Dr. *Karl Friesach*,

k. k. Hauptmann in der Armee.

Manche sonst vortreffliche Lehrbücher der Physik enthalten die Bemerkung, dass, auch abgesehen von der Rotation der Erde, schon in Folge ihrer abgeplatteten Gestalt, die Schwere an den Polen grösser sein müsse als am Aequator, indem erstere vom Mittelpunkte weniger weit entfernt wären als die Punkte des Aequators — eine Erklärung, welche aus dem Grunde unzulässig ist, weil man von einem sphäroidischen Körper nicht behaupten kann, dass er so wirke, als ob seine ganze Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre. In der That ist ein solcher Beweis kaum stichhaltiger, als das Raisonnement eines bekannten astronomischen

Literaten, welcher aus der grösseren Schwere an den Polen eine Polaranschwellung folgert, indem er meint, die Anziehung des Erdsphäroids müsse sich dort am stärksten äussern, wo sich die grösste Massenanhäufung befindet. Es wäre daher besser, obige Bemerkung in Elementarbüchern entweder gar nicht zu erwähnen oder wenigstens nicht auf eine so mangelhafte Weise begründen zu wollen, sondern behufs der Begründung auf die höhere Analyse zu verweisen.

Geht man von der Hypothese aus, dass die Erde ursprünglich eine gleichförmig dichte, tropfbar flüssige Masse gewesen sei, welche in Folge ihrer Axendrehung die Gestalt eines durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleinere Axe erzeugten Sphäroids angenommen hat, so ist die Oberfläche dieses Sphäroids in Bezug auf dessen Massenanziehung und die in Folge der Rotation sich entwickelnde Fliehkraft eine Gleichgewichtsfläche, d. h. eine solche, in welcher für jeden Punkt die Resultirende jener beiden Kräfte, d. i. die Schwere, der Richtung nach mit der Normalen zusammenfällt. Für diesen Fall ist bekanntlich, wenn g die Schwere am Aequator, g' die Schwere in der geographischen Breite φ, a den Aequatorialhalbmesser und b die halbe Polaraxe bezeichnet,

$$g' = \frac{g}{\sqrt{1 - \frac{a^2-b^2}{a^2}\sin\varphi^2}},$$

woraus für die Schwere G am Pole

$$G = g.\frac{a}{b}, \text{ folglich } G > g$$

folgt.

Lässt man aber die Fliehkraft unberücksichtigt, so ergeben sich für G und g Ausdrücke, aus welchen nicht auf den ersten Blick zu ersehen, dass $G > g$ sein müsse, wie sogleich gezeigt werden soll.

Es sei m ein Punkt in der Oberfläche des elliptischen Rotationssphäroids. Nimmt man in dessen Meridianebene den Aequatorialhalbmesser als Abscissen- und die Rotationsaxe als Ordinatenaxe an, so kann die in der Meridianebene wirkende Anziehung des Sphäroids auf den Punkt m in zwei jenen Axen parallele Componenten X und Y zerlegt werden, und man hat, wenn man die Coordinaten des Punktes m mit x, y, die Excentricität des Sphäroids mit ε und einen konstanten Faktor mit μ bezeichnet, nach den bekannten Formeln für die Anziehung eines elliptischen Sphäroids:

$$X=\frac{4\mu\pi bx}{a}\int_0^1\frac{t^2dt}{\sqrt{1-\varepsilon^2t^2}}=4\mu\pi x.\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2\varepsilon^2}\left(\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}-\sqrt{1-\varepsilon^2}\right),$$

$$Y=\frac{4\mu\pi a^2y}{b^2}\int_0^1\frac{t^2dt}{1+\varepsilon^2t^2}=4\mu\pi y.\frac{1}{\varepsilon^2}\left(1-\sqrt{1-\varepsilon^2}.\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}\right);$$

woraus:

$$G=\frac{4\mu\pi a\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon^2}\left(1-\sqrt{1-\varepsilon^2}.\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}\right),$$

$$g=\frac{4\mu\pi a\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2\varepsilon^2}\left(\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}-\sqrt{1-\varepsilon^2}\right).$$

Für den Fall, dass das Sphäroid von einer Kugel wenig abweicht, überzeugt man sich leicht, dass $G>g$, indem man obige Ausdrücke nach steigenden Potenzen von ε in Reihen entwickelt und bei den Gliedern 2ter Ordnung stehen bleibt. Denn man erhält dadurch:

$$G=\frac{4\mu\pi a}{3}\left(1-\frac{\varepsilon^2}{10}\right),$$

$$g=\frac{4\mu\pi a}{3}\left(1-\frac{\varepsilon^2}{5}\right).$$

Um aber allgemein darzuthun, dass $G>g$, dürfte folgender Weg der kürzeste sein:

Man setze $\varepsilon=\sin\omega$, so ist:

$$G=4\mu\pi a\frac{\cos\omega}{\sin\omega^3}(\sin\omega-\omega\cos\omega),$$

$$g=4\mu\pi a\frac{\cos\omega}{2\sin\omega^3}(\omega-\sin\omega\cos\omega),$$

$$\frac{G}{g}=\frac{2(\sin\omega-\omega\cos\omega)}{\omega-\sin\omega\cos\omega}.$$

Hieraus erhellt, dass das Stattfinden von $G>g$ an die Bedingung:

$$2(\sin\omega-\omega\cos\omega)>\omega-\sin\omega\cos\omega$$

geknüpft ist.

Zieht man den rechts vom Zeichen $>$ stehenden Ausdruck von dem linksstehenden ab, so ergibt sich die Differenz:

$$\Delta=2(\sin\omega-\omega\cos\omega)-\omega+\sin\omega\cos\omega,$$

und nach ω differentiirend,

$$d.\Delta = (2\cos\omega - 2\cos\omega + 2\omega\sin\omega - 1 + \cos\omega^2 - \sin\omega^2)\,d\omega$$
$$= 2\sin\omega\,(\omega - \sin\omega)\,d\omega,$$

folglich, weil Δ für $\varphi = 0$ verschwindet,

$$\Delta = \int_0^\omega 2\sin\omega\,(\omega - \sin\omega)\,d\omega.$$

Da nun zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$, innerhalb welcher ω nothwendig liegt, obiges Differential stets einen positiven Werth behält, ist auch Δ positiv. Es ist daher auch innerhalb dieser Grenzen $G > g$. An den Grenzen selbst, d. i. für $\omega = 0$ und $\omega = \frac{1}{2}\pi$, wird $G - g = 0$; und man hat in ersterem Falle $G = g = \frac{4\mu r^2}{3}$, in letzterem hingegen verschwindet, wegen $\cos\frac{1}{2}\pi = 0$, sowohl G als g, während der Quotient $\frac{G}{g}$ den Grenzwerth $\frac{4}{\pi}$ annimmt.

Das erhaltene Resultat berechtigt wohl zu der Frage, ob es sich vielleicht allgemein beweisen liesse, dass die Ungleichung $G > g$ für jeden, durch Umdrehung einer nach was immer für einem Gesetze gekrümmten ellipsenähnlichen Kurve erzeugten Rotationskörper von gleichmässiger Dichte Geltung hat?

XXI.

Geometrischer Ort der Mittelpunkte aller durch einen festen Punkt gehenden Sehnen eines Kegelschnitts.

Von

Herrn *Jos. Braun*,

Lehrer am Ryffel'schen Institut in Stäfa (Zürichsee).

Der Beweis, den Herr Professor Lommel in Schwyz im Archiv Thl. XLIII. S. 231. — S. 233. für den Lehrsatz:

„**Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller durch einen festen Punkt gehenden Sehnen eines Kegelschnitts ist ebenfalls ein Kegelschnitt, welcher mit dem gegebenen ähnlich und in ähnlicher Lage ist**“

mitgetheilt hat, führte mich auf folgende analytische Behandlung dieser Aufgabe.

Es sei

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

die Gleichung einer gegebenen Ellipse,

$$y-g=A(x-f)\quad\ldots\ldots\ldots\quad(1)$$

diejenige einer durch den festen Punkt (f, g) gehenden Sehne der Ellipse.

Dann heisst die Gleichung eines mit derselben parallel gezogenen Ellipsendurchmessers:

$$y=Ax$$

und die des dazu gehörigen conjugirten Durchmessers:

$$y=-\frac{b^2}{a^2A}x.\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(2)$$

Aus (1) und (2) finden wir durch Elimination von A:

$$a^2y^2+b^2x^2-a^2gy-b^2fx=0$$

als Gleichung des gesuchten geometrischen Orts, die sich, wenn wir ein neues Coordinatensystem der $x'y'$ so wählen, dass:

$$y=y'+\tfrac{1}{2}g,$$
$$x=x'+\tfrac{1}{2}f,$$

leicht auf die Form

$$\left\{\frac{x'}{a\sqrt{\left(\frac{f}{2a}\right)^2+\left(\frac{g}{2b}\right)^2}}\right\}^2+\left\{\frac{y'}{b\sqrt{\left(\frac{f}{2a}\right)+\left(\frac{g}{2b}\right)^2}}\right\}^2=1\ ^{*)}$$

bringen lässt.

---

*) S. Thl. XLI. S. 120. und Thl. XLII. S. 98. des Archivs.

Für die Hyperbel:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

erhält man auf gleiche Weise:

$$\left\{\frac{x'}{a\sqrt{\left(\frac{f}{2a}\right)^2 - \left(\frac{g}{2b}\right)^2}}\right\}^2 - \left\{\frac{y'}{b\sqrt{\left(\frac{f}{2a}\right)^2 - \left(\frac{g}{2b}\right)^2}}\right\}^2 = 1.$$

Wenn

$$y^2 = 2px$$

die Gleichung der gegebenen Parabel und

$$y - g = A(x - f) \;\ldots\ldots\ldots\; (1)$$

diejenige einer durch (f, g) gezogenen Sehne, so heisst die Gleichung des Durchmessers, der parallel zur Axe durch ihren Halbirungspunkt geht:

$$y = \frac{p}{A}, \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (2)$$

Aus (1) und (2) erhält man:

$$(y - g)\, y = (x - f)\, p$$

als Gleichung des gesuchten geometrischen Orts, — oder wenn man:

$$y = y' + \tfrac{1}{2}g,$$

$$x = x' + \tfrac{1}{2}f$$

setzt:

$$y'^2 = px' + q;\; \left(q = \frac{g^2 - 2pf}{4}\right).$$

XXII.

On two new forms of Heliotrope.

By

W. H. Miller, M.A., For. Sec. R.S.,

Professor of Mineralogy in the University of Cambridge.

A Heliotrope is a mirror O provided with some contrivance for adjusting is so that any given distant point T may receive the light of the sun S reflected from the surface of the mirror. This instrument has been constructed on three different principles. In Drummond's (Philosophical Transactions for 1826, p. 324), by a simple mechanism, a normal to the mirror is made to bisect the angle between the axes of two telescopes, one of which is pointed to T and the other to S; consequently T will receive the light of S reflected from O. In Struve's (Breitengradmessung, p. 49) the mirror is directed by means of two sights attached to its support, which are brought into the line OT. The heliotrope employed in the Ordnance Survey (Ordnance Trigonometrical Survey of Great Britain and Ireland, Account of Observations and Calculations of the Principal Triangles, p. 47) is similar to Struve's, except that a single mark placed at a convenient distance in the line OT is substituted for the two sights. In the two heliotropes invented by Gauss (Astronomische Nachrichten, vol. v. p. 329, and v. Zach's Correspondance Astronomique, vol. v. p. 374, and vol. vi. p. 65), in Steinheil's (Schuhmacher's Jahrbuch für 1844, p. 12), and in Galton's an optical contrivance is connected with the mirror, so as to throw a cone of sunlight in a direction opposite to the cone of sunlight reflected from the surface of the mirror, the axes of the two cones being parallel, and either very nearly or absolutely coincident. Hence any point T, from which a portion of the former cone of light appears to proceed, will receive the light of the sun reflected from the mirror.

The heliotropes I am about to describe produce two cones of sunlight thrown in opposite directions, like those of Gauss, Steinheil, and Galton, but differ from them in having no moveable parts, and from all but Galton's, and the sextant-heliotrope of Gauss, with a second moveable mirror, in requiring no support except the hand of the operator.

One of these consists of a plane mirror, to an edge of which are attached two very small plane reflectors, *a*, *c*, formig with one another a reentrant angle of 90°, and making angles of 90° with the faces of the mirror. If a ray be reflected once by each of the two planes *a*, *c*, it is obvious that the first and last directions of the ray will be parallel to a plane containing the intersection of *a*, *c*, and will make equal angles with the intersection of *a*, *c*, which is also a normal to the face of the mirror. Therefore, if two parallel rays fall, one on the mirror, and one either of the planes *a*, *c*, the direction of the ray reflected from the mirror will be parallel and opposite to that of a ray reflected once at each of the planes *a*, *c*. When the small reflectors are made of unsilvered glass, the brightness of the image of the sun is so far reduced after the second reflexion, as not to interfere with ihe direct vision of *T*, and the mirror can be pointed without difficulty.

The other consits of a plate of glass having parallel faces *b*, *d*, with two polished plane faces *a*, *c* on its edges, making right angles with one another, and with the faces *b*, *d*, the face *d* being silvered, with the exception of a portion at the angle *adc* not larger than the pupil of the eye. It is easily seen that if a ray of light incident upon *b*, and refracted through *b* so as to be reflected internally once at each of the planes *a*, *c*, emerge through *d*, the planes of incidence and emergence will be parallel, and the incident and emergent rays will make equal angles with the edge *ac*, and therefore with a normal to the faces *b*, *d*. Hence the portion of the incident ray which is reflected from the mirror will proceed in a direction parallel and opposite to that portion of the ray which, after internal reflexion at *a* and *c*, emerges through *d*.

In order to ascertain that the construction of such an instrument presented no unforeseen difficulties, I requested Mr. T. E. Butters, of 4, Crescent, Belvedere Road, the well-known maker of sextant-mirrors and artificial horizons, to form the faces *a*, *c* on the edges of a piece of plate glass, and then had the face *d* coated with chemically reduced silver. Upon trial, the emergent light was found to be too bright; but, after smoking the angle *adc* in the flame of a candle, in order to reduce the intensity of the light, it became perfectly easy to make the centre of the image of the sun coincide with the object *T* seen by direct vision.

An image of the sun of suitable intensity for pointing might be obtained by attaching to the edge of the mirror a piece of tinted glass, of the form of the corner *abcd*, with the faces *b*, *d* parallel to the plane of the mirror.

XXIII.

Miscellen.

Ueber die Berechnung eines Kreisabschnitts.

Von dem Herausgeber.

Der Formel für den Inhalt eines Kreisabschnitts durch Sehne und Höhe kann man folgende Gestalt geben.

Die halbe Sehne und die Höhe des Kreisabschnitts seien a und b, und r sei der Halbmesser des Kreises, zu welchem das Segment gehört, wobei ich bemerke, dass die Fälle, wenn eine der Grössen a, b wirklich verschwindet, völliger Bestimmtheit wegen, von den folgenden Betrachtungen ganz ausgeschlossen werden sollen; und wenn dessenungeachtet weiter unten, bei der Betrachtung der Brüche $\frac{b}{a}$ und $\frac{a}{b}$, doch einmal $b=0$ und $a=0$ gesetzt wird, so hat man dort diese Fälle gewissermassen nur *als Gränzfälle* zu betrachten, die auf das Weitere keinen Einfluss haben. Mit Bezug auf Taf. II. Fig. 5. ist offenbar:

$$\text{Segm.} = \tfrac{1}{2}r^2 \operatorname{Arc} ADB \mp a\{\pm(r-b)\}$$
$$= \tfrac{1}{2}r^2 \operatorname{Arc} ADB - a(r-b).$$

Nun ist $a^2=b(2r-b)$, also:

$$r=\frac{a^2+b^2}{2b},\quad r-b=\frac{a^2-b^2}{2b};$$

folglich:

$$\text{Segm.} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{a^2+b^2}{2b}\right)^2 \operatorname{Arc} ADB - a\left(\frac{a^2-b^2}{2b}\right).$$

Offenbar ist aber:

$$\text{Arc}\,ADB = 2\,\text{Arcsin}\,\frac{a}{r} = 2\,\text{Arcsin}\,\frac{2ab}{a^2+b^2},$$

wenn man nur

$$\text{Arcsin}\,\frac{2ab}{a^2+b^2}$$

kleiner, eben so gross, grösser als $\frac{1}{4}\pi$ (aber nie grösser a nimmt, jenachdem

$$b < r, \quad b = r, \quad b > r;$$

d. h. nach dem Obigen, jenachdem

$$b < \frac{a^2+b^2}{2b}, \quad b = \frac{a^2+b^2}{2b}, \quad b > \frac{a^2+b^2}{2b};$$

$$2b^2 < a^2+b^2, \quad 2b^2 = a^2+b^2, \quad 2b^2 > a^2+b^2;$$

$$b^2 < a^2, \quad b^2 = a^2, \quad b^2 > a^2;$$

jenachdem also:

$$b < a, \quad b = a, \quad b > a$$

ist. Folglich ist nach dem Obigen, mit Rücksicht auf diese B dingungen:

$$\text{Segm.} = \left(\frac{a^2+b^2}{2b}\right)^2 \text{Arcsin}\,\frac{2ab}{a^2+b^2} - a\left(\frac{a^2-b^2}{2b}\right),$$

oder:

$$\text{Segm.} = a^2\left\{\left(\frac{a^2+b^2}{2ab}\right)^2 \text{Arcsin}\,\frac{2ab}{a^2+b^2} - \frac{a^2-b^2}{2ab}\right\},$$

oder:

$$\text{Segm.} = a^2\left\{\left(\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{2}\right)^2 \text{Arcsin}\,\frac{2}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}} - \frac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{2}\right\}.$$

Weil

$$1-\left(\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)^2 = \frac{(a^2+b^2)^2-4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2} = \left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2$$

ist, so kann man offenbar setzen:

$$\text{Segm.} = a^2\left\{\left(\frac{a^2+b^2}{2ab}\right)^2 \text{Arc cos}\,\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} - \frac{a^2-b^2}{2ab}\right\}$$

oder:

$$\text{Segm.} = a^2 \left\{ \left(\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{2} \right)^2 \text{Arccos} \frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2} - \frac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{2} \right\},$$

bei zu bemerken ist, dass der stets zwischen 0 und π zu nehmende Bogen

$$\text{Arccos} \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} = \text{Arccos} \frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

rch den Cosinus

$$\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} = \frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2},$$

gehöriger Rücksicht auf dessen Zeichen, vollständig, und s im Allgemeinen, bestimmt wird.

Offenbar kann man nun auch setzen:

$$\text{Segm.} = a^2 \left\{ \left(\frac{a^2+b^2}{2ab} \right)^2 \text{Arctang} \frac{2ab}{a^2-b^2} - \frac{a^2-b^2}{2ab} \right\}$$

r:

$$\text{Segm.} = a^2 \left\{ \left(\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{2} \right)^2 \text{Arctang} \frac{2}{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}} - \frac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{2} \right\},$$

der stets zwischen 0 und π zu nehmende Bogen

$$\text{Arctang} \frac{2ab}{a^2-b^2} = \text{Arctang} \frac{2}{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}$$

rch die Tangente

$$\frac{2ab}{a^2-b^2} = \frac{2}{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}},$$

nn man nur deren Zeichen gehörig berücksichtigt, vollständig stimmt wird.

Für das Argument $\frac{b}{a}$ oder $\frac{a}{b}$ kann man eine Tafel der lassen

[illegible]

$$\left(\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{2}\right) = \text{Arccos}\,\frac{2}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}} = \frac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{2},$$

oder

$$\left(\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{2}\right)^2 = \text{Arccos}\,\frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{2}.$$

oder

$$\left(\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{2}\right)^2 = \text{Arctang}\,\frac{2}{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}} = \frac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{2}$$

[illegible] die dann bei der Berechnung der Flächen[illegible] Kreisabschnitte gute Dienste leisten kann, indem man die [illegible] in Reihe [illegible] aus Sehne und Höhe der Kreisab[illegible] leicht zu berechnenden Argumente aus der Tafel zu entn[illegible] den Zahlen bloss mit a^2 zu multipliciren braucht, um die [illegible] der Kreisabschnitte zu erhalten.

Wir wollen das Argument $\frac{b}{a}$ etwas näher betrachten. [illegible] dem Obigen ist

$$a^2 = b(2r-b), \quad a = \sqrt{b(2r-b)},$$

also:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{b}{2r-b}}.$$

Für

$$b = 0 \text{ ist } \frac{b}{a} = 0.$$

$$b = r \;\;,, \;\; \frac{b}{a} = 1.$$

$$b = 2r \;\;,, \;\; \frac{b}{a} = \infty.$$

Weil, wie man leicht findet:

$$\frac{b+\delta}{2r-(b+\delta)} - \frac{b}{2r-b} = \frac{2r\delta}{(2r-b)\{2r-(b+\delta)\}},$$

und letztere Grösse, insofern δ positiv ist, gleichfalls positi[v], indem b und $b+\delta$ nie grösser als $2r$ werden kann: so sieht

dass das Argument $\frac{b}{a}$, wenn b von 0 bis $2r$ wächst, von 0 bis ∞ fortwährend wächst; wenn aber b von 0 bis r wächst, so wächst das Argument $\frac{b}{a}$ von 0 bis 1*). Hieraus sieht man, dass es zweckmässig sein wird, eine Tafel mit dem Argument $\frac{b}{a}$, in welcher dieses Argument nur von 0 bis 1 zu wachsen braucht, zur Berechnung von Kreisabschnitten zu berechnen, die nicht grösser als der Halbkreis sind, oder für welche $b \overline{\overline{<}} r$, also nach dem Obigen

$$b \overline{\overline{<}} \frac{a^2+b^2}{2b}, \quad 2b^2 \overline{\overline{<}} a^2+b^2, \quad b^2 \overline{\overline{<}} a^2, \quad b \overline{\overline{<}} a$$

ist.

Betrachten wir ferner das Argument $\frac{a}{b}$. Aus der Gleichung

$$a^2 = b(2r-b)$$

folgt:

$$b = r \pm \sqrt{r^2-a^2},$$

also für $b \overline{\overline{>}} r$:

$$b = r + \sqrt{r^2-a^2},$$

folglich:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{r+\sqrt{r^2-a^2}}.$$

Für:

$$a = 0 \text{ ist } \frac{a}{b} = 0,$$

$$a = r \quad \text{"} \quad \frac{a}{b} = 1.$$

Weil, wie man leicht findet:

---

*) Geometrisch überzeugt man sich hiervon auf folgende Art. In Taf. II. Fig. 6. soll nämlich

$$\frac{DE'}{A'E'} > \frac{DE}{AE} \text{ oder } \frac{DE'}{DE} > \frac{A'E'}{AE}, \text{ also } \frac{A'E'}{EF} > \frac{A'E'}{AE}$$

sein, welches Letztere wirklich der Fall ist, weil $EF < AE$ ist.

$$\frac{a+\delta}{r+\sqrt{r^2-(a+\delta)^2}}-\frac{a}{r+\sqrt{r^2-a^2}}$$

$$=\frac{\delta(r+\sqrt{r^2-a^2})+a\{\sqrt{r^2-a^2}-\sqrt{r^2-(a+\delta)^2}\}}{(r+\sqrt{r^2-a^2})\{r+\sqrt{r^2-(a+\delta)^2}\}},$$

und letztere Grösse für ein positives δ offenbar positiv ist, so ist klar, dass das Argument $\frac{a}{b}$, wenn a von 0 bis r wächst, von 0 bis 1 stets wächst, oder, wenn a von r bis 0 abnimmt, von 1 bis 0 stets abnimmt *). Es wird daher zweckmässig sein, eine zweite Tafel mit dem Argument $\frac{a}{b}$, in welcher man dieses Argument nur von 1 bis 0 abnehmen zu lassen braucht, zu berechnen, zur Berechnung solcher Kreisabschnitte, die nicht kleiner als der Halbkreis sind, oder für welche $b \geqq r$, also nach dem Obigen

$$b \geqq \frac{a^2+b^2}{2b},\quad 2b^2 \geqq a^2+b^2,\quad b^2 \geqq a^2,\quad b \geqq a$$

ist.

Das Weitere würde sich bei der wirklichen Berechnung der Tafel schon von selbst herausstellen, und wünsche ich das Obige nur als Andeutungen für eine vielleicht nützliche Arbeit aufgefasst zu sehen, wobei ich übrigens nicht weiss, ob solche oder ähnliche Tafeln vielleicht schon existiren, worüber ich mir, wenn dies der Fall sein sollte, Belehrung ausbitten möchte und für dieselbe in einem solchen Falle sehr dankbar sein würde.

Möge man mir noch die folgende methodische oder pädagogische Bemerkung gestatten. Es hat mir immer wünschenswerth geschienen, dass schon bei'm Elementarunterrichte auf höheren Lehranstalten die Schüler mit der Bedeutung der Zeichen Arcsin$x$, Arctang$x$, u. s. w. bekannt gemacht und in deren Gebrauche geübt werden. Dazu kann vielleicht das Obige die — wenigstens mir — wünschenswerthe Veranlassung geben.

---

*) Was man hier auch ohne obige analytische Betrachtung sogleich übersieht. Denn in Taf. II. Fig. 7. soll

$$\frac{A'E'}{DE'}<\frac{AE}{DE} \quad \text{oder} \quad DE.A'E' < DE'.AE$$

sein, was sich von selbst versteht, weil

$$DE < DE',\quad A'E' < AE$$

ist.

Wir wollen nun noch ein Paar Beispiele zu dem Obigen :hnen, wobei wir die Formel:

$$\text{Segm.} = a^2\left\{\left(\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{2}\right)^2 \text{Arctang}\frac{2}{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}} - \frac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{2}\right\}$$

Grunde legen und uns der trefflichen, nicht genug zu empfeh- ıden fünfstelligen Tafeln von Hoüel bedienen, von denen bei ·er neuen Auflage nun auch eine Ausgabe mit deutschem Text schienen ist.

Sei $a=11$, $b=17$, also $b>a$; so findet man leicht:

$$\frac{a}{b} = 0{,}6471$$

$$\frac{b}{a} = 1{,}5455$$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} = 2{,}1926 \qquad \tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right) = 1{,}0963$$

$$\frac{a}{b}-\frac{b}{a} = -0{,}8984 \qquad \tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right) = -0{,}4492$$

$$\log.\tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right) = \begin{cases} 0{,}03981 \\ \quad +12 \\ 0{,}03993 \end{cases}$$

$$\log.\{\tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\}^2 = 0{,}07986$$

$$\log.\tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right) = 0{,}65244-1_n$$

$$\log.\{\tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\}^{-1} = 0{,}34756_n$$

$$\text{Arctang}\{\tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\}^{-1} = 114^0.11'.25''$$

$$100^0 = 1{,}7453$$
$$14^0 = 0{,}2443$$
$$11' = 0{,}0032$$
$$25'' = 0{,}0001$$

$$\text{Arctang}\{\tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\}^{-1} = 1{,}9929$$

$$\log \text{Arc tang} \{ \tfrac{1}{2} \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \}^{-1} = \begin{cases} 0,29929 \\ +20 \end{cases}$$

$$\log . \{ \tfrac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)^2 = 0,07986$$

$$0,37935$$

$$\text{num.} = 2,3952$$

$$\tfrac{1}{2} \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) = -0,4492$$

$$2,8444$$

Dies, mit $a^2 = 121$ multiplicirt, giebt:

$$\text{Segm.} = 344,1724.$$

Mittelst der Formel $r = \frac{a^2 + b^2}{2b}$ erhält man $r = 12,0$[illegible]

$$\log r = 1,08135$$
$$\log . r^2 = 2,16270$$
$$\log \pi = 0,49715$$
$$\log . r^2\pi = 2,65985$$
$$r^2\pi = 456,9$$
$$\tfrac{1}{2} r^2\pi = 228,5$$

Das Segment ist also grösser als die halbe und kleiner ganze Kreisfläche, wie es im vorliegenden Falle sein mus

Es sei $a = 25$, $b = 19$, also $b < a$; so findet man le

$$\frac{a}{b} = 1,3158$$

$$\frac{b}{a} = 0,7600$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2,0758 \qquad \tfrac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) = 1,0$$

$$\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = 0,5558 \qquad \tfrac{1}{2} \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) = 0,$$

$$\log . \tfrac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) = \begin{cases} 0,01578 \\ +38 \\ 0,01616 \end{cases}$$

$$\log . \{ \tfrac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \}^2 = 0,03232$$

$$\log . \tfrac{1}{2} \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) = 0,44389 - 1$$

$$\log . \{ \tfrac{1}{2} \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \}^{-1} = 0,55611$$

$$\text{Arc tang} \{ \tfrac{1}{2} \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \}^{-1} = 74^0.28'.2''$$

$$74^0 = 1,2915$$
$$28' = 0,0081$$
$$2'' = 0,0000$$

$$\text{Arc tang} \mid \tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right) \mid^{-1} = 1,2996$$

$$\log \text{Arc tang} \mid \tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right) \mid^{-1} = \begin{cases} 0,11361 \\ \quad +20 \\ 0,11381 \end{cases}$$

$$\log . \mid \tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right) \mid^{2} = 0,03232$$
$$0,14613$$
$$\text{num.} = 1,4000$$
$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right) = 0,2779$$
$$1,1221$$

Dies, mit $a^2 = 625$ multiplicirt, giebt:

$$\text{Segm.} = 801,3125.$$

Mittelst der Formel $r = \dfrac{a^2+b^2}{2b}$ erhält man:

$$r = 25,95$$
$$\log r = 1,41414$$
$$\log . r^2 = 2,82828$$
$$\log \pi = 0,49715$$
$$\log . r^2\pi = 3,32543$$

$$r^2\pi = 2115,6$$
$$\tfrac{1}{2} r^2\pi = 1057,8.$$

Das Segment ist also kleiner als die halbe Kreisfläche, wie es in diesem Falle sein muss.

Handschriftlicher Fund aus der Thorner Gymnasial-Bibliothek.

(Aus der Altpreussischen Monatsschrift. Zweiter Jahrgang. Fünftes Heft. Königsberg in Pr. 1865. mitgetheilt.)

Thorn, 22. Juli 1865. In seinem Aperçu sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie thut Chasles eines Mannes Erwähnung, der der Hauptrepräsentant des mathematischen Wissens im vierzehnten Jahrhundert gewe-

sen, des Erzbischofs von Canterbury Thomas Bradwardinus. Auf Seite 611 der deutschen Uebersetzung dieses Werkes, Note 278 schreibt er: „In einem Manuscripte der Königl. Bibliothek (No 7368, Kopie aus dem vierzehnten Jahrhundert) findet sich eine Pièce, die im Kataloge betitelt ist: Fragmentum elementorum Geometriae, worin wir Stellen aus der Geometrie des Bradwardin erkannt haben.“ Ich kann Ihnen die jedenfalls interessante Mittheilung machen, dass eine vollständige Handschrift nicht nur dieser Geometrie (Geometria speculativa. Paris 1495 fol. und öfter), die aber hier den Titel Geometria assecutiva et arismetica führt, sondern auch einer bedeutenden Anzahl anderer werthvoller Schriften dieses Gelehrten, so wie einiger Schriften anderer Autoren sich im Besitze der hiesigen Königl. Gymnasial-Bibliothek befindet. Diese Handschrift, gut und sauber erhalten, hat die Nummer R. 4to 2 und den Bibliothekstitel Problematum Euclidis explicatio *), der natürlich nicht der richtige ist und auch, nach der Handschrift zu schliessen, frühestens im letzten Jahrhundert zugefügt sein kann. Es würde sich jedenfalls empfehlen, ihn durch einen richtigern zu ersetzen.

Der Inhalt der Abhandlungen ist physikalisch, geometrisch, arithmetisch, astronomisch. Die wichtigsten Abhandlungen sind die Perspectiva Braswardini (so steht der Name auf der Aussenseite des Pergamenteinbandes und einmal am Ende einer andern Abhandlung, sonst lautet er auch in unserer Handschrift Thomas Bradwardinus), eine Optik, die oben genannte Geometria assecutiva, der tractatus I, II, III, de proportionibus mit der Bezeichnung $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ für ein Halb, zwei Drittel, der tractatus de Continuo Bradwardini und einige kleinere ebenfalls Bradwardinische Schriften. Ausserdem befindet sich aber darin auch ein Werk, von dem bis jetzt nur zwei Handschriften bekannt sind, nach Chasles a. a. O. S. 481. eine in Paris in der Bibliothèque impériale mit mehreren andern zusammen unter dem Titel Verba filiorum Moysi filii Schaker, Mahumeti, Hameti, Hasen (Supplément latin No. 49 in fol.), die andere, eine Pergamenthandschrift, ebenfalls aus dem vierzehnten Jahrhundert, in Basel unter dem Titel liber trium fratrum de Geometria. Dieses Werk hat in unserm Manuscripte bemerkenswerther Weise beide Titel, nämlich sowohl den: Verba filiorum Moysi filii Schyi, Marmeti, Hameti, Hasen (Sic!),

---

*) cf. Petri Jaenichii Notitia bibliothecae Thorun. im Gelahrten Preussen. II. S. 224. unter No. XXIII.

als auch auf dem rechten Rande den Titel 3um frat^rum^. Einen Theil dieses Manuscriptes nach dem Basler Codex übersetzt findet man in Grunert's Archiv Thl. 39. S. 186 ff.

Das Manuscript ist auf Papier geschrieben und in Pergament gebunden. In einer der Abhandlungen, Theoria Planetarum, findet sich am Ende die Bemerkung: „Explicit anno domini MCCCLIX", so dass die Handschrift also aus der Mitte des vierzehnten Jahrhunderts stammt. Die einzelnen Lehrsätze sind durch grössere Schrift, rothe Initialen und Unterstreichen mit Roth hervorgehoben. Im Ganzen zählt man 206 beschriebene Seiten und ist die Handschrift mit äusserst saubern Figuren ausgestattet.

Erlauben Sie mir jetzt noch einige Bemerkungen über die Lebensumstände des Hauptautors, wie ich sie der Güte des Herrn Oberbibliothekars Prof. Dr. Carl Hopf in Königsberg verdanke, hier anzureihen.

Thomas Bradwardinus (Bredewardin) ist geboren zu Hartfield bei Chichester in der Grafschaft Suffolk. Er wurde nach Grässe (Handb. einer Allgem. Literärgesch. II, 2, 1 S. 55.) von Einigen für einen Dominicaner, von andern für einen Franciscaner gehalten. 1325 wurde er Procurator der Universität Oxford, las über Theologie, Philosophie und Mathematik mit solchem Erfolge, dass man ihm den Beinamen *Doctor profundus* beilegte. Später wurde er Kanzler an der St. Paulskirche in London und auf Verwendung des Erzbischofs von Canterbury, Johann Stratford, Beichtvater des Königs Eduard III. In dieser Eigenschaft begleitete er diesen überall hin und wurde im Jahre *1348* zweimal nach dem Tode seines Gönners zum Erzbischof von Canterbury gewählt (die Bestätigungsbulle ist aber erst vom 19. Juni 1349 datirt) und starb im folgenden Jahre am 26. August 1349. Weitere Nachrichten über das Leben Bradwardin's findet man in: Th. Godwin, de praesulibus Anglicis Pars I., p. 160.; Cave Tom. II. p. 49.; Quétif Pars I. p. 744.; Fabricius, Bibliotheca mediae latinitatis I., 728. und sonst. Ueber seine Bedeutung als Mathematiker sehe man Chasles, Aperçu historique S. 611.—614. d. deutsch. Uebersetzung. Seine theologische und philosophische Richtung lehrt sein Werk: De causa Dei contra Pelagium et de virtute causarum, libri III, ed. H. Savile London 1618. fol. Hierin spricht er im Sinne Augustins den Satz aus, dass Gott in Allem selbst wirke und der Mensch nur sein Schatten sei. Das ganze Buch dieses Scholastikers ist überwiegend philosophischen Inhalts. Von seinen mathematischen

Schriften citirt Grässe a. a. O. II., 2, 2, S. 847. als im Druck erschienen: Geometria speculativa, Paris 1495, 1504 (od. 1505), 1511, 1520. fol. — Arithmetica speculativa, Paris 1496, 1505, 1512. fol. — De proportionibus velocitatum, Venedig 1505. fol. — De quadratura circuli, Paris 1516. fol., doch ist letztere nach Chasles a. a. O. S. 614. untergeschoben.

Auch sonst besitzt die hiesige Bibliothek manche sehr werthvolle alte mathematische Drucke, das Beste davon ist freilich mit mehreren andern Werken durch den Oberpräsidenten von Schön für die Königsberger Universitäts-Bibliothek eingefordert worden, nämlich die editio princeps des Euclides, und der Katalog enthält jetzt nur noch den Titel des Werkes.

M. Curtze.

Von dem Herausgeber.

$$\begin{aligned}(ab'c'' + bc'a'' + ca'b'' - ac'b'' - ba'c'' - cb'a'')^2\\ = (a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)(a''^2+b''^2+c''^2)\\ +2(aa'+bb'+cc')(aa''+bb''+cc'')(a'a''+b'b''+c'c'')\\ -(a^2+b^2+c^2)(a'a''+b'b''+c'c'')\\ -(a'^2+b'^2+c'^2)(aa''+bb''+cc'')\\ -(a''^2+b''^2+c''^2)(aa'+bb'+cc').\end{aligned}$$

Summirung der Reihe

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{1}}{1},\ \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{2},\ \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{4}}{4},\ \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{8}}{8},\dots \text{ in inf.}$$

Nach einer Mittheilung des Herrn Dr. Paul Escher in Wien.

Nach einer bekannten Elementar-Formel ist:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{1}{\operatorname{tg}\psi} - \frac{2}{\operatorname{tg}2\psi},$$

also, wenn man für ψ nach und nach

$$\frac{\varphi}{1},\ \frac{\varphi}{2},\ \frac{\varphi}{4},\ \frac{\varphi}{8},\ \frac{\varphi}{16},\dots$$

setzt:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{1}}{1} = \frac{1}{1.\operatorname{tg}\varphi} - \frac{2}{\operatorname{tg}2\varphi},$$

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{2} = \frac{1}{2.\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}} - \frac{1}{1.\operatorname{tg}\frac{\varphi}{1}},$$

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{4}}{4} = \frac{1}{4.\operatorname{tg}\frac{\varphi}{4}} - \frac{1}{2.\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}},$$

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{8}}{8} = \frac{1}{8.\operatorname{tg}\frac{\varphi}{8}} - \frac{1}{4.\operatorname{tg}\frac{\varphi}{4}},$$

u. s. w.

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2^{n-1}}}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}.\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2^{n-1}}} - \frac{1}{2^{n-2}.\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2^{n-2}}},$$

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2^n}}{2^n} = \frac{1}{2^n.\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2^n}} - \frac{1}{2^{n-1}.\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2^{n-1}}};$$

durch Addition:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{1}}{1} + \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{2} + \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{4}}{4} + \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{8}}{8} + \ldots + \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2^n}}{2^n}$$

$$= \frac{1}{2^n.\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2^n}} - \frac{2}{\operatorname{tg}2\varphi}$$

$$= \frac{1}{\varphi}\cdot\frac{\frac{\varphi}{2^n}}{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2^n}} - \frac{2}{\operatorname{tg}2\varphi}$$

$$= \frac{1}{\varphi}\cdot\frac{\frac{\varphi}{2^n}}{\sin\frac{\varphi}{2^n}}\cdot\cos\frac{\varphi}{2^n} - \frac{2}{\operatorname{tg}2\varphi}$$

$$= \frac{1}{\varphi}\cdot\cos\frac{\varphi}{2^n}\cdot\left(1 : \frac{\sin\frac{\varphi}{2^n}}{\frac{\varphi}{2^n}}\right) - \frac{2}{\operatorname{tg}2\varphi}.$$

Lässt man nun n in's Unendliche wachsen, so ist bekann

$$\text{Lim}\cos\frac{\varphi}{2^n}=1,\quad \text{Lim}\,\frac{\sin\frac{\varphi}{2^n}}{\frac{\varphi}{2^n}}=1,\quad \text{Lim}\left(1:\frac{\sin\frac{\varphi}{2^n}}{\frac{\varphi}{2^n}}\right)=1,$$

also, immer für ein in's Unendliche wachsendes n:

$$\text{Lim}\left(\frac{\text{tg}\frac{\varphi}{1}}{1}+\frac{\text{tg}\frac{\varphi}{2}}{2}+\frac{\text{tg}\frac{\varphi}{4}}{4}+\frac{\text{tg}\frac{\varphi}{8}}{8}+\ldots+\frac{\text{tg}\frac{\varphi}{2^n}}{2^n}\right)=\frac{1}{\varphi}-\frac{}{\text{tg}}$$

oder:

$$\frac{\text{tg}\frac{\varphi}{1}}{1}+\frac{\text{tg}\frac{\varphi}{2}}{2}+\frac{\text{tg}\frac{\varphi}{4}}{4}+\frac{\text{tg}\frac{\varphi}{8}}{8}+\ldots \text{ in inf.}=\frac{1}{\varphi}-\frac{2}{\text{tg}\,2\varphi}.$$

Analytische Bedingungsgleichung, dass vier Punkte in Kreise liegen.

Von dem Herausgeber.

Die rechtwinkligen Coordinaten der vier Punkte seien

$$x_0,\ y_0;\quad x_1,\ y_1;\quad x_2,\ y_2;\quad x_3,\ y_3.$$

Sollen nun diese vier Punkte in einem Kreise liegen, Gleichung

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$$

sein mag, so muss:

$$\begin{aligned}(x_0-p)^2+(y_0-q)^2&=r^2,\\(x_1-p)^2+(y_1-q)^2&=r^2,\\(x_2-p)^2+(y_2-q)^2&=r^2,\\(x_3-p)^2+(y_3-q)^2&=r^2;\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}(r^2-p^2-q^2)+2x_0p+2y_0q&=x_0^2+y_0^2,\\(r^2-p^2-q^2)+2x_1p+2y_1q&=x_1^2+y_1^2,\\(r^2-p^2-q^2)+2x_2p+2y_2q&=x_2^2+y_2^2,\\(r^2-p^2-q^2)+2x_3p+2y_3q&=x_3^2+y_3^2\end{aligned}$$

sein; und die gesuchte Bedingungsgleichung wird also o erhalten, wenn man aus diesen vier Gleichungen die drei Gr

$$r^2-p^2-q^2,\quad p,\quad q$$

eliminirt.

In Thl. XXIII. S. 286. und S. 287. habe ich aber gezeigt, dass aus den vier Gleichungen:

$$\begin{aligned}
ax+by+cz&=\alpha,\\
a_1x+b_1y+c_1z&=\alpha_1,\\
a_2x+b_2y+c_2z&=\alpha_2,\\
a_3x+b_3y+c_3z&=\alpha_3
\end{aligned}$$

durch Elimination von x, y, z die Gleichung:

$$\begin{aligned}
0=\ &(bc_1-cb_1)(\alpha_2a_3-a_2\alpha_3)\\
&+(bc_2-cb_2)(\alpha_3a_1-a_3\alpha_1)\\
&+(bc_3-cb_3)(\alpha_1a_2-a_1\alpha_2)\\
&+(b_1c_2-c_1b_2)(\alpha a_3-a\alpha_3)\\
&+(b_1c_3-c_1b_3)(\alpha_2a-a_2\alpha)\\
&+(b_2c_3-c_2b_3)(\alpha a_1-a\alpha_1)
\end{aligned}$$

erhalten wird.

Wenden wir dies auf den obigen Fall an, so erhalten wir folgende Gleichung als die gesuchte Bedingungsgleichung:

$$\begin{aligned}
0=\ &(x_0y_1-y_0x_1)\{(x_2^2+y_2^2)-(x_3^2+y_3^2)\}\\
&+(x_0y_2-y_0x_2)\{(x_3^2+y_3^2)-(x_1^2+y_1^2)\}\\
&+(x_0y_3-y_0x_3)\{(x_1^2+y_1^2)-(x_2^2+y_2^2)\}\\
&+(x_1y_2-y_1x_2)\{(x_0^2+y_0^2)-(x_3^2+y_3^2)\}\\
&+(x_1y_3-y_1x_3)\{(x_2^2+y_2^2)-(x_0^2+y_0^2)\}\\
&+(x_2y_3-y_2x_3)\{(x_0^2+y_0^2)-(x_1^2+y_1^2)\}.
\end{aligned}$$

Diese Gleichung kann man auf verschiedene Arten ausdrücken, wobei wir nicht verweilen; führt man aber polare Coordinaten ein und setzt demzufolge:

$$\begin{aligned}
x_0&=\varrho_0\cos\alpha_0, & y_0&=\varrho_0\sin\alpha_0;\\
x_1&=\varrho_1\cos\alpha_1, & y_1&=\varrho_1\sin\alpha_1;\\
x_2&=\varrho_2\cos\alpha_2, & y_2&=\varrho_2\sin\alpha_2;\\
x_3&=\varrho_3\cos\alpha_3, & y_3&=\varrho_3\sin\alpha_3;
\end{aligned}$$

so wird dieselbe, wie man sogleich übersieht:

$$\begin{aligned}0= \;&\varrho_0\varrho_1(\varrho_2^2-\varrho_3^2)\sin(\alpha_0-\alpha_1)\\
+&\varrho_0\varrho_2(\varrho_3^2-\varrho_1^2)\sin(\alpha_0-\alpha_2)\\
+&\varrho_0\varrho_3(\varrho_1^2-\varrho_2^2)\sin(\alpha_0-\alpha_3)\\
+&\varrho_1\varrho_2(\varrho_0^2-\varrho_3^2)\sin(\alpha_1-\alpha_2)\\
+&\varrho_1\varrho_3(\varrho_2^2-\varrho_0^2)\sin(\alpha_1-\alpha_3)\\
+&\varrho_2\varrho_3(\varrho_0^2-\varrho_1^2)\sin(\alpha_2-\alpha_3),\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}0= \;&\frac{\varrho_2^2-\varrho_3^2}{\varrho_2\varrho_3}\sin(\alpha_0-\alpha_1)\\
+&\frac{\varrho_3^2-\varrho_1^2}{\varrho_3\varrho_1}\sin(\alpha_0-\alpha_2)\\
+&\frac{\varrho_1^2-\varrho_2^2}{\varrho_1\varrho_2}\sin(\alpha_0-\alpha_3)\\
+&\frac{\varrho_0^2-\varrho_3^2}{\varrho_0\varrho_3}\sin(\alpha_1-\alpha_2)\\
+&\frac{\varrho_2^2-\varrho_0^2}{\varrho_2\varrho_0}\sin(\alpha_1-\alpha_3)\\
+&\frac{\varrho_0^2-\varrho_1^2}{\varrho_0\varrho_1}\sin(\alpha_2-\alpha_3),\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}0= \;&\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_3}-\frac{\varrho_3}{\varrho_2}\right)\sin(\alpha_0-\alpha_1)\\
+&\left(\frac{\varrho_3}{\varrho_1}-\frac{\varrho_1}{\varrho_3}\right)\sin(\alpha_0-\alpha_2)\\
+&\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}-\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)\sin(\alpha_0-\alpha_3)\\
+&\left(\frac{\varrho_0}{\varrho_3}-\frac{\varrho_3}{\varrho_0}\right)\sin(\alpha_1-\alpha_2)\\
+&\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_0}-\frac{\varrho_0}{\varrho_2}\right)\sin(\alpha_1-\alpha_3)\\
+&\left(\frac{\varrho_0}{\varrho_1}-\frac{\varrho_1}{\varrho_0}\right)\sin(\alpha_2-\alpha_3).\end{aligned}$$

Druckfehler.

Im Inhaltsverzeichnisse zu Thl. XXVI.—XL. setze man:

S. 30. Z. 10. „XL. 163." statt „XXXIX. 163."
S. 54. Z. 3. v. u. „XL. 163." statt „XXXIX. 163."

XXIV.

Ueber die Beurtheilung der Wurzeln einer vorgelegten cubischen Gleichung.

Fünfte Abtheilung, als Fortsetzung der Abhandlung Thl. XLIV., No. IX.

Von

Herrn *Ferdinand Kerz,*

Major in dem Grossherzogl. Hessischen Gendarmerie-Corps in Darmstadt.

131.

Man bedient sich zuweilen zur annähernden Bestimmung der reellen Wurzeln einer vorgelegten höheren Gleichung des Verfahrens der Construction der Gleichung.

Wenn wir dieses Verfahren in der vorliegenden Abtheilung einer Erörterung unterwerfen, so geschieht dies, um die geometrische Bedeutung des in den vorhergehenden Abtheilungen abgehandelten Verfahrens kennen zu lernen, eine Bedeutung, welche so sehr geeignet ist, das arithmetische Verfahren zur Anschauung zu bringen und somit ein Verständniss desselben zu fördern.

Das Verfahren der Construction einer vorgelegten Gleichung besteht bekanntlich darin, dass man die Unbekannte y als veränderlich betrachtet, und für sie nach und nach numerische Werthe:

$$\ldots(m+1),\ m,\ \ldots 3,\ 2,\ 1,\ 0,\ -1,\ -2,\ -3,\ \ldots -m,\ -(m+1),\ \ldots(=\pm x)$$

substituirt, wodurch der gegebene Ausdruck in verschiedene, theils positive, theils negative Werthe:



stattfinden, im letzteren Falle findet stets nur ein Durschnittspunkt statt, d. h. im ersteren Falle kann die vorgelegte Gleichung drei reelle Wurzeln haben, im letzteren aber hat sie stets nur eine reelle Wurzel.

133.

1) Es kann sich an der Gestalt einer Curve Nichts ändern, renn man jede Ordinate um eine gleiche Grösse $\begin{pmatrix}\text{vermindert}\\ \text{vermehrt}\end{pmatrix}$. Bei der Substituirung von Zahlenwerthen für y kann man daher och zur Construirung der cubischen Linie das von der Unbekannten y unabhängige Glied a ausser Acht lassen, indem man orläufig eine um die Grösse a $\begin{pmatrix}\text{höhere}\\ \text{tiefere}\end{pmatrix}$ Abscissenaxe annimmt, ie Linie construirt, und alsdann von dem Anfangspunkte aus die eue Abscissenaxe in der Entfernung a auf der Ordinatenaxe $\left.\begin{matrix}\text{ab-}\\ \text{auf-}\end{matrix}\right\}$ trägt.

2) Ist z. B., Taf. IV. Fig. 1., die mit accentuirten C bezeichnete Curve eine solche cubische Linie:

$$by + cy^2 + y^3,$$

und A^0 der Anfangspunkt des Coordinatensystems, A^0X^0 die Abscissen- und die mit accentuirten A bezeichnete Gerade die Ordinatenaxe, ist ferner: $\left.\begin{matrix}A^0A''\\ A^0A\end{matrix}\right\} = \pm a$, so ist $\left.\begin{matrix}A''\\ A\end{matrix}\right\}$ der wirkliche Anfangspunkt des Coordinatensystems und $\begin{pmatrix}A''X''\\ AX\end{pmatrix}$ die wirkliche Abscissenaxe für dieselbe cubische Linie:

$$\pm a + by + cy^2 + y^3.$$

Man kann daher sagen:

3) Das von der Unbekannten unabhängige Glied $\pm a = \left\{\begin{matrix}A^0A''\\ A^0A\end{matrix}\right.$ ist stets die Ordinate des wirklichen Anfangspunktes $\begin{pmatrix}A''\\ A\end{pmatrix}$. Wir wollen die Abscissenaxe A^0X^0 der Ordinate:

$$0 = b(0) + c(0)^2 + (0)^3$$

die natürliche Abscissenaxe nennen. Ihr Anfangspunkt A^0 ist stets ein Punkt der Curve und heisse der natürliche Anfangspunkt.

4) Der natürliche und wirkliche Anfangspunkt sind also ste Punkte der Ordinatenaxe, und liegt der natürliche Anfangspun A^0 $\binom{\text{über}}{\text{unter}}$ dem wirklichen Anfangspunkt $\binom{A', A'', A''', \ldots}{A, \ldots}$, ist die Ordinate $\binom{A^0A', A^0A'', A^0A''', \ldots}{A^0A, \ldots}$ des wirklichen A fangspunktes stets $\binom{\text{positiv}}{\text{negativ}}$.

134.

Man kann sich die Ordinaten z der cubischen Linie

$$bx + cx^2 + x^3$$

auch, nach ihren einzelnen Theilen aufgetragen, vorstellen. E ist z. B., Taf. IV. Fig. 1.,

1) für irgend eine positive Abscisse $A^0U' = +x$, die zugehörige Ordinate, nämlich:

$$z = +bx + cx^2 + x^3,$$

oder:

$$U'C' = U'G' + G'P' + P'C',$$

und

2) für irgend eine negative Abscisse $A^0U_1 = -x$ die zugehörige Ordinate, nämlich

$$z = -bx + cx^2 - x^3$$

oder:

$$-U_1C_1 = -U_1G_1 + G_1P_1 - P_1C_1.$$

Denkt man sich nun auf diese Weise für alle Werthe von x die zugehörigen Werthe UG, GP, PC bestimmt, und für die $\binom{\text{negativen}}{\text{positiven}}$ Werthe von x auf den betreffenden Ordinaten die bezüglichen Werthe UG $\binom{\text{abwärts}}{\text{aufwärts}}$, hieran die bezüglichen Werthe von GP aufwärts, und hieran wieder die bezüglichen Werthe von PC $\binom{\text{abwärts}}{\text{aufwärts}}$ getragen, so erhält man durch die stetige Verbindung aller Punkte G, aller Punkte P und aller Punkte C, beziehungsweise eine gerade Linie, eine Parabel und eine cubische Linie, und man kann die gerade Linie auch als Abscissenaxe der Parabel und die Parabel als Abscissenlinie der cubischen Linie betrachten

135.

Denn es ist:

1) für jeden Werth von A^0U der zugehörige Werth

$$UG = b . A^0U,$$

mithin ist die durch die Punkte G gehende Linie eine Gerade und b der Parameter derselben.

Da diese Gerade, der Construction gemäss, mit den beiden krummen Linien nur den Punkt A^0 gemeinschaftlich hat, so ist sie zugleich in diesem Punkte Tangente an diese Curven.

Bezeichnet man den Winkel, welchen sie mit der natürlichen Abscissenaxe bildet, durch φ; so ergiebt sich

$$b = \operatorname{tg} . \varphi.$$

Ferner ist:

2) für jeden Punkt von A^0U der zugehörige Werth

$$UP = b . A^0U \mp c(A^0U)^2,$$

mithin die durch die Punkte P gehende Linie eine Parabel.

136.

Bezeichnet, Taf. IV. Fig. 1., U den Durchschnittspunkt der Axe der Parabel mit der natürlichen Abscissenaxe, ist P der Scheitelpunkt der Parabel und G der Durchschnittspunkt ihrer Axe mit der Tangente A^0G, so folgt aus den Eigenschaften der Parabel:

1) $$UP = PG.$$

Ferner ist:

2) $$UP = b . A^0U - c(A^0U)^2,$$

3) $$UG = b . A^0U.$$

Hieraus folgt:

4) $$b . A^0U = 2c(A^0U)^2,$$

oder:

5) $$A^0U = \frac{b}{2c},$$

6) $$UP = \frac{b^2}{4c}.$$

Bezeichnet daher p den Parameter der Parabel, so ist ihre Scheitelpunktsgleichung:

7) $$(A^0U)^2 = p.UP,$$

oder

8) $$\frac{b^2}{4c^2} = p.\frac{b^2}{4c}.$$

Hieraus folgt:

9) $$p = \frac{1}{c}.$$

137.

1) Ist die Gerade A^0X^0, Taf. IV. Fig. 1., die Abscissenaxe der cubischen Linie:

$$bx + cx^2 + x^3,$$

und denkt man sich zu dieser $\binom{\text{abwärts}}{\text{aufwärts}}$ eine Parallele $\binom{A''X''}{AX}$ in der Entfernung $\left\{\begin{matrix} A^0A'' \\ A^0A \end{matrix}\right\} = a$, so liegt der Durchschnittspunkt $\binom{C''}{C}$ dieser Parallelen mit der cubischen Linie auf der $\binom{\text{linken}}{\text{rechten}}$ Seite der Ordinatenaxe, und die Entfernung $\binom{A''C''}{AC}$ dieses Durchschnittspunktes von der Ordinatenaxe bezeichnet die reelle $\binom{\text{negative}}{\text{positive}}$ Wurzel $\mp w$ der Gleichung:

$$0 = \pm a + by + cy^2 + y^3.$$

2) Erhält aber die mit der natürlichen Abscissenaxe parallele Linie eine solche Lage $A^V X^V$, dass sie die beiden Biegungen der cubischen Linie, die cubische Linie selbst also in drei Punkten C^V, C^{VI}, C^{VII} schneidet; so bezeichnen die Entfernungen: $A^V C^V$, $A^V C^{VI}$, $A^V C^{VII}$ drei negative Wurzeln: $-\overset{1}{w}$, $-\overset{2}{w}$, $-\overset{3}{w}$ der gegebenen Gleichung:

$$0 = +a + by + cy^2 + y^3,$$

für welche $A^0A^V = +a$ ist.

138.

I. Ist aber die mit der natürlichen Abscissenaxe parallele Linie Tangente an eine der Biegungen der cubischen Linie, wie $\begin{pmatrix} A'''S'' \\ A^{IV}S' \end{pmatrix}$; so kann man den Berührungspunkt $\begin{pmatrix} S'' \\ S' \end{pmatrix}$ als Endpunkt des aufwärts gehenden und zugleich als Anfangspunkt des abwärtsgehenden Theiles der Biegung betrachten, und es besteht also für ihn seine Entfernung von der Ordinatenaxe doppelt.

Die Entfernungen $\begin{pmatrix} A'''S'', \; A'''S'', \; A'''C'' \\ A^{IV}S', \; A^{IV}S', \; A^{IV}C^{IV} \end{pmatrix}$ bezeichnen daher in diesem Falle die drei Wurzeln der gegebenen Gleichung:

$$0 = + a + by + cy^2 + y^3,$$

unter welchen zwei einander vollkommen gleich sind, und für welche $\left.\begin{matrix} A^0A''' \\ A^0A^{IV} \end{matrix}\right\} = + a$ ist.

Es ist daher:

$$1) \qquad \left.\begin{matrix} A'''S'' \\ A^{IV}S' \end{matrix}\right\} = -\tfrac{1}{3}c \mp \tfrac{1}{3}\sqrt{c^2 - 3b},$$

$$2) \qquad \left.\begin{matrix} A'''S'' \\ A^{IV}S' \end{matrix}\right\} = -\tfrac{1}{3}c \mp \tfrac{1}{3}\sqrt{c^2 - 3b},$$

$$3) \qquad \left.\begin{matrix} A'''C''' \\ A^{IV}C^{IV} \end{matrix}\right\} = -\tfrac{1}{3}c \pm \tfrac{2}{3}\sqrt{c^2 - 3b}, \qquad [17.\ B.\ 7)].$$

Im Hinblicke auf [17. A. 2) und 5) und B. 2) und 5)] ergiebt sich alsbald:

$$4) \qquad A^0A''' = \frac{3bc - 2(c^2 - 3b)(c + \sqrt{c^2 - 3b})}{27} = q_+ .$$

$$5) \qquad A^0A^{IV} = \frac{3bc - 2(c^2 - 3b)(c - \sqrt{c^2 - 3b})}{27} = q_- .$$

II. Entsprechen umgekehrt einer vorgelegten cubischen Gleichung zwei gleiche reelle Wurzeln, so ist die Abscissenaxe jedesmal Tangente an die cubische Linie, und jede der gleichen Wurzeln ist gleich der Entfernung des Berührungspunktes von der Ordinatenaxe.

139.

Ist A', Taf. IV. Fig. 1., der Halbirungspunkt der [illegible] $A'''A^{IV}$ der beiden an die Biegungungen der [illegible]

zogenen und mit der natürlichen Abscissenaxe parallellaufe Tangenten $A'''S''$ und $A^{IV}S'$, also A^0A' die mittlere arithmeti Proportionale zwischen A^0A''' und A^0A^{IV}; so ergiebt sich, [138. 4), 5)]

1) $$A^0A' = \frac{9bc-2c^3}{27} = q.$$

Wählt man nun eine durch diesen Halbirungspunkt A' hende Gerade $A'X'$ als Abscissenaxe, A' als Anfangspunkt ist A^0A' die Ordinate dieses Anfangspunktes und

2) $$0 = \frac{9bc-2c^3}{27} + by + cy^2 + y^3$$

die construirte Gleichung, deren Wurzeln nach [91.] sind:

3) $$A'M' = -\tfrac{1}{3}c + \tfrac{1}{3}\sqrt{3c^2-9b},$$

4) $$A'M = -\tfrac{1}{3}c,$$

5) $$A'M'' = -\tfrac{1}{3}c - \tfrac{1}{3}\sqrt{3c^2-9b}.$$

140.

Vermindert man jede der Grössen: $A'M'$, $A'M$, $A'M''$ um Grösse $A'M = -\frac{1}{3}c$, d. h. schreibt man in Gleichung [139. $-\frac{1}{3}c + y$ für y; so geht diese Gleichung über in:

1) $$0 = -\tfrac{1}{3}(c^2-3b).y + y^3,$$

deren Wurzeln sind:

2) $$M = 0,$$

3) $$\left.\begin{matrix} MM' \\ MM'' \end{matrix}\right\} = \pm\tfrac{1}{3}\sqrt{3c^2-9b}.$$

Betrachten wir in 1) y als veränderlich, so schreiben wir:

4) $$z = -\tfrac{1}{3}(c^2-3b).x + x^3,$$

und es folgt: gleichen entgegengesetzten Abscissen entspre gleiche, aber entgegengesetzte Ordinaten.

Man kann daher sagen:

5) Jede cubische Linie hat einen Mittelpunkt und jede durch denselben gelegte Gerade MC', welche den ei

Ast der cubischen Linie in C'' schneidet, schneidet, rückwärts verlängert, auch den andern Ast in gleicher Entfernung

$$MC'' = MC^{IX}.$$

6) Es ist daher jedes Stück $C''MC^{IX}$ einer durch den Mittelpunkt gelegten geraden, die cubische Linie in zwei Punkten C'', C^{IX} schneidenden Linie ein Durchmesser der cubischen Linie. Läuft derselbe mit der Abscissenaxe parallel, so heisse er horizontaler Durchmesser $M'M''$ der cubischen Linie.

7) Jede cubische Linie wird durch ihren Mittelpunkt in zwei Aeste geschieden, welche einander congruent sind.

8) Sind homologe Theile zweier cubischen Linien congruent, so sind es die cubischen Linien selbst.

9) Zieht man zu dem Mittelpunkte M der cubischen Linie eine Gerade $T'M$ ($T''M$), welche den horizontalen Durchmesser $M'M''$ unter dem Winkel χ schneidet, und deren Parameter nach 4)

$$\operatorname{tg}\chi = -\tfrac{1}{3}(c^2 - 3b)$$

ist, so ist dieselbe Tangente der cubischen Linie in dem Mittelpunkt.

10) Man kann die cubische Linie [139. 2)] nach Gleichung 4) auch von dem Mittelpunkte aus construiren, indem man den horizontalen Durchmesser als Abscissenaxe annimmt.

11) Ist

$$9bc \gtrless 2c^3,$$

so ist die Ordinate $A^0A' = q$ [139. 1)] des natürlichen Anfangspunktes A^0 stets $\binom{\text{positiv}}{\text{negativ}}$, und der natürliche Anfangspunkt A^0 liegt $\binom{\text{oberhalb}}{\text{unterhalb}}$ des horizontalen Durchmessers.

12) Eine gegebene cubische Gleichung von ihrem quadratischen Gliede befreien, heisst in geometrischer Beziehung Nichts anders als den natürlichen Anfangspunkt der Coordinaten auf den Mittelpunkt, also den wirklichen Anfangspunkt auf die Verticalaxe des Mittelpunktes, reduciren und wir wollen daher

13) die Gleichung [1) oder 4)] die Gleichung des Mittelpunktes nennen.

14) Da wir die cubische Linie 4) zu construiren im Stande sind, wenn uns die Grösse $c^2 - 3b$ bekannt ist, so heisse sie Parameter der cubischen Linie.

141.

Die durch den Mittelpunkt M der cubischen Linie gezogene und mit der $\binom{\text{natürlichen Abscissenaxe}}{\text{Ordinatenaxe}}$ parallele Linie $\binom{A'M}{M\mathfrak{M}}$ können wir die $\binom{\text{Horizontal-}}{\text{Vertical-}}$ Axe des Mittelpunktes nennen. Diejenigen Punkte S'', S' der cubischen Linie, in welchen dieselbe von den, mit der natürlichen Abscissenaxe A^0X^0 parallellaufenden, Tangenten $A'''X'''$, $A^{IV}X^{IV}$ berührt werden, heissen Scheitelpunkte, und zwar heisse der, oberhalb des horizontalen Durchmessers liegende, Berührungspunkt S'', ihr oberer, der andere, S', ihr unterer Scheitelpunkt; und wir wollen unter $\binom{\text{oberer}}{\text{unterer}}$ Scheitellinie jedesmal denjenigen Theil $\binom{MS''C^{IV}}{MS'C'''}$ der cubischen Linie verstehen, welcher, vom Mittelpunkt an gerechnet, zwischen diesen beiden Tangenten liegt, und durch den $\binom{\text{oberen}}{\text{unteren}}$ Scheitelpunkt $\binom{S''}{S'}$ geht.

Die den $\binom{\text{oberen}}{\text{unteren}}$ Scheitelpunkt $\binom{S''}{S'}$ berührende Tangente $\binom{A'''X'''}{A^{IV}X^{IV}}$ heisse $\binom{\text{obere}}{\text{untere}}$ Scheitel-Tangente. Das Stück $\binom{MS''}{MS'}$ der $\binom{\text{oberen}}{\text{unteren}}$ Scheitellinie, welches zwischen dem Mittelpunkte M und dem $\binom{\text{oberen}}{\text{unteren}}$ Scheitelpunkte $\binom{S''}{S'}$ liegt, heisse der innere (Scheitel-)Zweig des $\binom{\text{oberen}}{\text{unteren}}$ Scheitels.

Das Stück $\binom{S''C^{IV}}{S'C'''}$ des $\binom{\text{oberen}}{\text{unteren}}$ Scheitels, welches zwischen dem $\binom{\text{oberen}}{\text{unteren}}$ Scheitelpunkte $\binom{S''}{S'}$ und der $\binom{\text{unteren}}{\text{oberen}}$ Scheitel-Tangente $\binom{A^{IV}X^{IV}}{A'''X'''}$ liegt, heisse der äussere (Scheitel-)Zweig des $\binom{\text{oberen}}{\text{unteren}}$ Scheitels.

Die Senkrechte $\begin{pmatrix} S''U^{IV}\ (S'U''') \\ S''W''\ (S'W') \end{pmatrix}$, gefällt von dem oberen (unteren) Scheitelpunkte auf $\begin{pmatrix} \text{die gegenüberliegende Scheitel-Tangente} \\ \text{den horizontalen Durchmesser} \end{pmatrix}$ heisse die Höhe des $\begin{pmatrix} \text{äusseren} \\ \text{inneren} \end{pmatrix}$ Zweiges $\begin{pmatrix} S''C^{IV}\ (S'C''') \\ S''M\ \ (S'M) \end{pmatrix}$, und ihre Projection $\begin{pmatrix} C^{IV}U^{IV}\ (C'''U''') \\ MW''\ \ (MW') \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} \text{die untere (obere) Scheitel-Tangente} \\ \text{den horizontalen Durchmesser} \end{pmatrix}$ die Grundlinie dieses Scheitelzweiges.

Den Durchschnittspunkt $\begin{pmatrix} C''' \\ C^{IV} \end{pmatrix}$ der cubischen Linie mit der $\begin{pmatrix} \text{oberen} \\ \text{unteren} \end{pmatrix}$ Scheitel-Tangente können wir den $\begin{pmatrix} \text{Anfangs-} \\ \text{End-} \end{pmatrix}$punkt der Scheitel nennen. Derjenige Theil $\begin{pmatrix} C'''C\ldots. \\ C^{IV}C^{VIII}\ldots. \end{pmatrix}$ der cubischen Linie, welcher vom $\begin{pmatrix} \text{Anfangspunkte } C''' \\ \text{Endpunkte } C^{IV} \end{pmatrix}$ der Scheitel an gerechnet, die Fortsetzung des $\begin{pmatrix} \text{unteren} \\ \text{oberen} \end{pmatrix}$ Scheitels bildet, heisse in seiner unbegrenzten Verlängerung insbesondere der $\begin{pmatrix} \text{aufwärts} \\ \text{abwärts} \end{pmatrix}$ gehende Ast.

142.

Es folgt leicht:

1) Die Höhen der äusseren Scheitelzweige sind einander gleich.

2) Die Höhen der inneren Scheitelzweige sind einander gleich.

3) Die Höhe eines inneren Scheitelzweiges ist die Hälfte der Höhe eines äusseren Scheitelzweiges.

Es ist:

4). Die Höhe jedes äusseren Scheitelzweiges, nämlich:

$$S''U^{IV} = S'U''' = A'''A^{IV} = A^0A^{IV} - A^0A'''$$
$$= \tfrac{4}{27}(c^2-3b)\sqrt{c^2-3b}. \qquad [138.\ 4),\ 5)].$$

Es ist:

5) Die Höhe jedes inneren Scheitelzweiges, nämlich:

$$S''W'' = S'W' = A'A''' = A'A^{IV} = \tfrac{2}{27}(c^2-3b)\sqrt{c^2-3b}.$$

Es ist:

6) Die Grundlinie des äusseren Zweiges des $\binom{\text{oberen}}{\text{unteren}}$ Scheitels, nämlich:

$$\left.\begin{matrix} C^{IV}U^{IV} \\ C''U''' \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} A^{IV}C^{IV} - A'''S'' \\ A^{IV}S' - A'''C'' \end{matrix}\right\} = -\tfrac{1}{3}\sqrt{c^2-3b}. \quad [138.\ 1)\ 3)].$$

Die Grundlinien der äusseren Scheitelzweige sind daher einander gleich.

Es ist:

7) Die Grundlinie des inneren Zweiges des $\binom{\text{oberen}}{\text{unteren}}$ Scheitels nämlich:

$$\left.\begin{matrix} MW'' \\ MW' \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} A'''S'' - A'M \\ A'M - A^{IV}S' \end{matrix}\right\} = -\tfrac{1}{3}\sqrt{c^2-3b}. \quad \left[\begin{matrix} 138.\ 1)\ \text{u.}\ 139.\ 4) \\ 139.\ 4)\ \text{,,}\ 138.\ 2) \end{matrix}\right]$$

Die Grundlinien der inneren Scheitelzweige sind daher einander gleich.

8) Die Grundlinien der äusseren Scheitelzweige sind gleich den Grundlinien der inneren.

9) Die beiden äusseren Scheitelzweige sind einander congruent.

10) Die beiden inneren Scheitelzweige sind einander congruent.

Es ist:

11) Die Entfernung des $\binom{\text{Endpunktes } M''}{\text{Anfangspunktes } M'}$ des horizontalen Durchmessers von der Höhe $\binom{S''U^{IV}}{S'U'''}$ des äusseren Scheitelzweiges, nämlich:

$$\left.\begin{matrix} M''W'' \\ M'W' \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} A'M'' - A'''S'' \\ A^{IV}S' - A'M' \end{matrix}\right\} = -\tfrac{1}{3}\sqrt{c^2-3b}\,.\,[\sqrt{3}-1].$$

$$\left[\begin{matrix} 139.\ 5)\ \text{und}\ 138.\ 1) \\ 138.\ 2)\ \text{,,}\ 139.\ 3) \end{matrix}\right].$$

Daher erhält man:

12) Den Unterschied dieser Linie und einer Grundlinie der Scheitelzweige, nämlich:

$$C^{IV}N'' = C'''N' = -\tfrac{1}{3}\sqrt{c^2-3b}\,.\,[2-\sqrt{3}].$$

Aus 7) und 11) ergiebt sich:

13) Es ist der horizontale Durchmesser der cubischen Linie, nämlich:

$$M'M'' = -\tfrac{2}{3}\sqrt{3c^2-9b} = -\tfrac{2}{3}\sqrt{3}.\sqrt{c^2-3b}.$$

Aus 6) folgt:

14) Es ist der Theil jeder, den Scheitelpunkt S'', S' berührenden Tangente, welcher zwischen diesem Scheitelpunkte und dem $\begin{pmatrix}\text{Anfangspunkte } C'''\\ \text{Endpunkte } C^{IV}\end{pmatrix}$ der Scheitel liegt, nämlich:

$$S''C''' = S'C^{IV} = -\sqrt{c^2-3b},$$

daher ist:

15) Das Verhältniss des horizontalen Durchmessers zu dieser Linie, nämlich:

$$\frac{M'M''}{S''C'''} = \tfrac{2}{3}\sqrt{3}.$$

Es ist:

16) Dasjenige Stück $\begin{pmatrix}T''W''\\ T'W'\end{pmatrix}$ der durch den $\begin{pmatrix}\text{oberen}\\ \text{unteren}\end{pmatrix}$ Scheitelpunkt $\begin{pmatrix}S''\\ S'\end{pmatrix}$ auf den horizontalen Durchmesser $M'M''$ gefällten Senkrechten, welches zwischen diesem Durchmesser und der an den Mittelpunkt gelegten Tangente $T'T''$ liegt, nämlich:

$$\left.\begin{aligned}T''W'' &= -MW''.\mathrm{tg}\chi\\ T'W' &= +MW'.\mathrm{tg}\chi\end{aligned}\right\} = \pm\tfrac{1}{9}(c^2-3b)\sqrt{c^2-3b}. \text{ [140. 9) u. 142. 7)]}.$$

17) Das Verhältniss dieses Stückes $\begin{pmatrix}T''W''\\ T'W'\end{pmatrix}$ zu der Höhe $\begin{pmatrix}S''W''\\ S'W'\end{pmatrix}$ des inneren Scheitelzweiges ist daher ein constantes, nämlich gleich $\tfrac{3}{2}$, [16) und 142. 5)], d. h. es ist:

$$\left\{\begin{matrix}T''S''\\ T'S'\end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2}.\left\{\begin{matrix}S''W''\\ S'W'\end{matrix}\right\},$$

und daher sind diese Tangenten MT'', MT' leicht zu construiren.

18) Die beiden Scheitel können als in ein Rechteck $K'C'''K''C^{IV}K'$ eingeschrieben betrachtet werden, dessen Grundlinie:

$$K'C^{IV}(K''C''') = \tfrac{1}{3}\sqrt{c^2-3b},$$

und dessen Höhe:

$$K'C'''(K''C^{IV}) = \tfrac{4}{27}(c^2-3b)\sqrt{c^2-3b}$$

ist.

19) Das Scheitel-Rechteck wird durch die Vertikala Mittelpunktes und durch die beiden Höhen der äusseren telzweige in vier, (und jedes dieser durch die Horizontala Mittelpunktes wieder in zwei), congruente Rechtecke getb

20) Der Flächeninhalt des Scheitel-Rechtecks ergiel nämlich:

$$K'C'''K''C^{IV}K' = \tfrac{16}{81}(c^2-3b)^2.$$

21) Ziehen wir, Taf. IV. Fig. 2., die Diagonalen $C'''C$ $K'K''$ des Scheitel-Rechteckes, so erhalten wir die Ent des Anfangspunktes C''' von dem Endpunkte C^{IV} der S als eine solche Diagonale, und wir wollen sie daher den nalen Durchmesser der Scheitel nennen, und zw grösseren, um ihn von dem Durchmesser $L'L''$ der Sche unterscheiden, der nur ein Theil der Diagonale $K'K''$ ist.

Es ist:

22) $$C'''C^{IV} = \tfrac{4}{27}\sqrt{(c^2-3b)^2+81}\,.\sqrt{c^2-3b},$$

daher:

23) $$A'''A^{IV}:C'''C^{IV} = (c^2-3b):\sqrt{(c^2-3b)^2+81},$$ [I

24) $$A^{IV}C^{IV}:C'''C^{IV} = 9:\sqrt{(c^2-3b)^2+81},$$

25) $$A^{IV}C^{IV}:A'''A^{IV} = 9:(c^2-3b),$$

ferner:

26) $$S'S'' = \tfrac{4}{27}\sqrt{4(c^2-3b)^2+81}\,.\sqrt{c^2-3b},$$

daher

27) $$S'S'':A'''A^{IV} = \sqrt{4(c^2-3b)^2+81}:(c^2-3b)$$

u. s. w.

143.

Betrachtet man $\binom{A'''}{A^{IV}}$ als den Anfangspunkt der Co ten, bezeichnet also, Taf. IV. Fig. 1., die cubische Linie di chung:

1) $0=\frac{3bc-2(c^2-3b)(c\pm\sqrt{c^2-3b})}{27}+by+cy^2+y^3,$

und schreibt man:

2) $-\frac{1}{3}c\pm\frac{1}{3}\sqrt{c^2-3b}+y$ anstatt y; [138. 3)]

so ergiebt sich, aus 1) die Gleichung:

3) $0=+(c^2-3b).y\pm 2\sqrt{c^2-3b}.y^2+y^3.$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind, Taf. IV. Fig. 2.:

4) $\left.\begin{matrix}C'''\\C^{IV}\end{matrix}\right\}=0,\quad \left.\begin{matrix}C'''S''\\C^{IV}S'\end{matrix}\right\}=\mp\sqrt{c^2-3b},\quad \left.\begin{matrix}C'''S''\\C^{IV}S'\end{matrix}\right\}=\mp\sqrt{c^2-3b}.$

Betrachten wir wieder y als veränderlich und schreiben für Gleichung 3):

5) $z=+(c^2-3b).x\pm 2\sqrt{c^2-3b}.x^2+x^3,$

so können wir die cubische Linie vom $\begin{pmatrix}\text{Anfangspunkt } C'''\\\text{Endpunkt } C^{IV}\end{pmatrix}$ der Scheitel aus construiren, da wir durch die vorgenommene Transformation den Anfangspunkt nach diesem Punkt der Scheitel verlegt haben, und deswegen wollen wir vorstehende Gleichung, die Gleichung des $\begin{pmatrix}\text{Anfangs-}\\\text{End-}\end{pmatrix}$punktes der Scheitel nennen.

6) Zieht man, Taf. IV. Fig. 1., zu dem $\begin{pmatrix}\text{Anfangspunkte } C'''\\\text{Endpunkte } C^{IV}\end{pmatrix}$ der Scheitel eine gerade Linie $\begin{pmatrix}C'''Q'\\C^{IV}Q''\end{pmatrix}$, welche die Abscissenaxe $\begin{pmatrix}A'''C'''\\A^{IV}C^{IV}\end{pmatrix}$ unter dem Winkel ψ schneidet, und deren Parameter:

$$\operatorname{tg}\psi=c^2-3b$$

ist, so ist sie Tangente an die cubische Linie in dem $\begin{pmatrix}\text{Anfangspunkte } C'''\\\text{Endpunkte } C^{IV}\end{pmatrix}$ der Scheitel.

Es ist:

7) Dasjenige Stück $\begin{pmatrix}Q'U'''\\Q''U^{IV}\end{pmatrix}$ der durch den $\begin{pmatrix}\text{unteren}\\\text{oberen}\end{pmatrix}$ Scheitelpunkt $\begin{pmatrix}S'\\S''\end{pmatrix}$ auf die Abscissenaxe $\begin{pmatrix}A'''X'''\\A^{IV}X^{IV}\end{pmatrix}$ gefällten Senkrechten, welches zwischen dieser Abscissenaxe und der in

dem Anfangspunkte $\binom{C'''}{C^{IV}}$ der Coordinaten an die cubische Lini[e]
gezogenen Tangente $\binom{C'''Q'}{C^{IV}Q''}$ liegt, nämlich:

$$\left.\begin{matrix} Q'U''' = C'''U''' \\ Q''U^{IV} = C^{IV}U^{IV} \end{matrix}\right\}.\mathrm{tg}\psi = \mp\tfrac{1}{3}(c^2-3b)\sqrt{c^2-3b}. \quad [6) \text{ u. } 142. 6$$

8) Das Verhältniss dieses Stückes $\binom{Q'U'''}{Q''U^{IV}}$ zu der Höh[e] $\binom{S'U'''}{S''U^{IV}}$ des äusseren Scheitelzweiges ist daher ein constant[e] nämlich gleich $\frac{3}{4}$ [7) u. 142. 4)], d. h. es ist: $\left.\begin{matrix} Q'S' \\ Q''S'' \end{matrix}\right\} = \frac{3}{4}.\left\{\begin{matrix} S'U''' \\ S''U^{IV} \end{matrix}\right.$
daher die Tangente $\binom{C'''Q'}{C^{IV}Q''}$ leicht zu construiren, und es folg[t]
weiter:

$$9) \qquad \left.\begin{matrix} Q''T''' \\ Q'T' \end{matrix}\right\} = 4.\left\{\begin{matrix} T''S'' \\ T'S' \end{matrix}\right\} = A'''A^{IV}.$$

144.

Verlegt man den Anfangspunkt der Coordinaten der Gleichung [139. 2)] nach dem $\binom{\text{Anfangspunkte } M'}{\text{Endpunkte } M''}$ des horizontalen Durch messers, oder vermindert man jede der Grössen $A'M'$, $A'M$ $A'M''$ um:

$$1) \qquad \left.\begin{matrix} A'M' \\ A'M'' \end{matrix}\right\} = -\tfrac{1}{3}c \pm \tfrac{1}{3}\sqrt{3c^2-9b},$$

d. h. schreibt man in Gleichung [139. 2)]:

$$2) \qquad -\tfrac{1}{3}c \pm \tfrac{1}{3}\sqrt{3c^2-9b} + y \text{ für } y,$$

so geht diese Gleichung über in:

$$3) \qquad 0 = \tfrac{2}{9}(3c^2-9b).y \pm \sqrt{3c^2-9b}.y^2 + y^3.$$

Die Wurzeln sind in diesem Falle, Taf. IV. Fig. 3.:

4)

$$\left.\begin{matrix} M' \\ M'' \end{matrix}\right\} = 0, \quad \left.\begin{matrix} M'M \\ M''M \end{matrix}\right\} = \mp\tfrac{1}{3}\sqrt{3c^2-9b}, \quad \left.\begin{matrix} M'M'' \\ M''M' \end{matrix}\right\} = \mp\tfrac{2}{3}\sqrt{3c^2-9b}.$$

Betrachten wir y wieder als veränderlich, so schreiben wir für z

$$5) \qquad z = \tfrac{2}{9}(3c^2-9b).x \pm \sqrt{3c^2-9b}.x^2 + x^3,$$

und wir wollen diese Gleichung die Gleichung des $\binom{\text{Anfangs-}}{\text{End-}}$ $\binom{\text{punktes}}{\text{punktes}}$ des horizontalen Durchmessers nennen.

145.

Verlegt man den Anfangspunkt der Coordinaten der Gleichung [143. 1)] nach dem $\binom{\text{oberen}}{\text{unteren}}$ Scheitelpunkt $\binom{S''}{S'}$, d. h. schreibt man:

$$1) \qquad -\tfrac{1}{3}c \mp \tfrac{1}{3}\sqrt{c^2-3b} + y \text{ für } y,$$

so ergiebt sich die Gleichung:

$$2) \qquad 0 = \mp\sqrt{c^2-3b}\,.\,y^2 + y^3,$$

deren Wurzeln sind:

$$3) \qquad \left.\begin{matrix}S''\\S'\end{matrix}\right\} = 0,\ \left.\begin{matrix}S''\\S'\end{matrix}\right\} = 0,\ \left.\begin{matrix}S''C'''\\S'C^{IV}\end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{c^2-3b}.$$

Betrachten wir y wieder als veränderlich, so schreiben wir für 2):

$$4) \qquad z = \mp\sqrt{c^2-3b}\,.\,x^2 + x^3,$$

und wir wollen diese Gleichung die Gleichung des $\binom{\text{oberen}}{\text{unteren}}$ Scheitelpunktes nennen.

146.

Schreibt man in Gleichung [145. 2)]:

$$1) \qquad \mp u + y \text{ anstatt } y,$$

so geht dieselbe über in:

$$2) \qquad 0 = \mp\sqrt{c^2-3b}\,.\,u^2 \mp u^3$$
$$+ (2\sqrt{c^2-3b}\,.\,u + 3u^2)\,.\,y \mp (\sqrt{c^2-3b} + 3u)y^2 + y^3,$$

und setzt man den Coefficienten von y, nämlich:

$$3) \qquad 2\sqrt{c^2-3b}\,.\,u + 3u^2 = \tfrac{1}{3}(c^2-3b),$$

so folgt:

$$4) \qquad u = \mp\tfrac{1}{3}\sqrt{c^2-3b}\,(\sqrt{2}-1),$$

und diesen Werth für u in 2) substituirt, giebt:

$$5)\qquad 0=\mp\tfrac{1}{27}(2-\sqrt{2})(c^2-3b)\sqrt{c^2-3b}$$
$$+\tfrac{1}{3}(c^2-3b).y\mp\sqrt{2}.\sqrt{c^2-3b}.y^2+y^3,$$

oder, indem wir y als veränderlich betrachten:

$$6)\qquad z=+\tfrac{1}{3}(c^2-3b).x\mp\sqrt{2}.\sqrt{c^2-3b}.x^2+x^3.$$

Es folgt aus 5), indem wir die absoluten Grössen der Li Taf. IV. Fig. 2., in Betracht ziehen:

$$7)\qquad \left.\begin{array}{l}K''E''=K'E'\\ F''L''=F'L'\end{array}\right\}=\frac{2-\sqrt{2}}{27}(c^2-3b)\sqrt{c^2-3b},$$

$$8)\qquad S''F''=S'F'=\tfrac{1}{3}(\sqrt{2}-1)\sqrt{c^2-3b},$$

$$9)\qquad \left.\begin{array}{l}K''F''=K'F'\\ E''L''=E'L'\end{array}\right\}=\tfrac{1}{3}(2-\sqrt{2})\sqrt{c^2-3b},$$

folglich ist:

$$10)\qquad \left.\begin{array}{l}K''E''\\ K'E'\end{array}\right\}:K''C^{IV}=(2-\sqrt{2}):4,\quad [142.\ 18)]$$

$$11)\qquad \left.\begin{array}{l}E''L''\\ E'L'\end{array}\right\}:K'C^{IV}=(2-\sqrt{2}):4,\quad [142.\ 18)]$$

daher:

$$12)\qquad K''E'':K''C^{IV}=E''L'':K'C^{IV},$$

d. h. 13) die durch die Punkte L' und L'' gelegte Gerade i ihrer Verlängerung Diagonale des Scheitelrechteckes und de $L'L''$ der kleinere diagonale Durchmesser der Scheitel [142.

Es folgt leicht weiter:

$$\left.\begin{array}{ll}14)\quad K''L''=\dfrac{2-\sqrt{2}}{27}\\[2ex] 15)\quad L'L''=\dfrac{2\sqrt{2}}{27}\end{array}\right\}.\sqrt{(c^2-3b)^2+81}.\sqrt{c^2-3b},$$

also ist:

$$16)\qquad C''C^{IV}:L'L''=2:\sqrt{2}.\quad [142.\ 22)]$$

Bezeichnet man den Winkel, welchen die durch den l L'' gelegte, und mit der Abscissenaxe parallel laufende, $L''W^{IV}$ mit der in dem Punkte L'' an die cubische Linie gezo Tangente $L''T^{IV}$ bildet, nämlich Winkel $T^{IV}L''W^{IV}$ mit ist, nach 6):

17) $$\operatorname{tg}\omega = +\tfrac{1}{3}(c^2 - 3b),$$

also der $\operatorname{tg}\chi$ entgegengesetzt. [140. 9)]

Macht man daher, Taf. IV. Fig. 2.:

18) $T'''W'' = T_{,,}W''$, und zieht: MT''',

so ist:

19) $$L''T^{IV} \mathrel{\#} MT_{,,}.$$

147.

I. Es ist nach dem Vorhergehenden einleuchtend, dass denkt man sich die Grössen c und b als veränderlich, die Entfernung der Scheitel-Tangenten, also die Höhen der inneren und äusseren Scheitelzweige, ferner die Grundlinien dieser Scheitelzweige u. s. w., alle sich mit dem Parameter $c^2 - 3b$ ändern, und dass dies daher auch mit den Scheitelzweigen selbst der Fall sei. Nimmt derselbe ab, so wird die Entfernung der beiden Scheitel-Tangenten kleiner, d. h. sie nähern sich einander, und ebenso nähern sich die Scheitelpunkte und die Endpunkte der äusseren Scheitelzweige dem Mittelpunkte.

II. Wird $c^2 - 3b = 0$, so fallen die Scheitel-Tangenten mit der Horizontalaxe des Mittelpunktes, und die beiden Scheitelpunkte und Endpunkte der äusseren Scheitelzweige mit dem Mittelpunkte selbst zusammen, d. h. die Scheitelzweige verschwinden und die Horizontalaxe wird in diesem Falle selbst Tangente des Mittelpunktes der cubischen Linie.

Wegen des Zusammenfallens der Scheitelpunkte mit dem Mittelpunkte werden auch, Taf. IV. Fig. I., die Linien

1) $$\left.\begin{matrix} A'''S'' \\ A^{IV}S' \end{matrix}\right\} = A'M,$$ Taf. VI. Fig. 23.,

und es entsprechen mithin der Gleichung in diesem Falle drei vollkommen gleiche Wurzeln, jede gleich

2) $$A'M = -\frac{c}{3},$$ [139. 3), 5)].

In diesem Falle wird aber:

3) $$A^0A' = \frac{c^3}{27},$$

und daher aus Gleichung [139. 2)]:

4) $$0 = \frac{c^3}{27} + \frac{c^2}{3} \cdot y + cy^2 + y^3. \qquad [9.\ 3)-7)]$$

III. Wird $c^2 - 3b < 0$, so werden die Höhen und Grundlinien der Scheitelzweige unmögliche Grössen, d. h. die Scheitel, also auch die Scheitel-Tangenten, sind in diesem Falle imaginär. Es kann daher stets nur ein Durchschnittspunkt der Abscissenaxe mit der cubischen Linie stattfinden, oder die construirte Gleichung hat stets nur eine reelle Wurzel.

148.

Ist A^0X^0, Taf. IV. Fig. 1., die natürliche Abscissenaxe der cubischen Linie:

1) $$z = bx + cx^2 + x^3,$$

so bezeichnet der Punkt: $A^0 = 0$, selbst eine Wurzel der Gleichung:

2) $$0 = by + cy^2 + y^3,$$

und die beiden andern Wurzeln sind:

3) $$-\tfrac{1}{2}c + \tfrac{1}{2}\sqrt{c^2 - 4b}, \quad -\tfrac{1}{2}c - \tfrac{1}{2}\sqrt{c^2 - 4b}.$$

Wären diese Wurzeln reelle Grössen, also $c^2 > 4b$, so müsste die natürliche Abscissenaxe den oberen Scheitel der cubischen Linie in zwei Punkten schneiden, d. h. es müsste der Anfangspunkt der Coordinaten ein Punkt des äusseren Zweiges des unteren Scheitels sein. Wäre aber:

4) $$c^2 = 4b,$$

so entsprächen der Gleichung 2) zwei vollkommen gleiche Wurzeln, jede gleich $-\tfrac{1}{2}c$; daher wäre für diesen Fall die natürliche Abscissenaxe selbst die obere Scheitel-Tangente, und der Anfangspunkt der Coordinaten fiele mit dem Anfangspunkt C''' der Scheitel zusammen.

Da offenbar, in Taf. IV. Fig. 1., die natürliche Abscissenaxe A^0X^0 weder den oberen Scheitel schneidet, noch berührt, so bezeichnet die cubische Linie dieser Figur eine Gleichung, für welche $c^2 < 4b$, und, der vorhandenen Scheitel wegen, eine Gleichung, für welche $c^2 > 3b$ ist.

149.

Unzweifelhaft hängt, nach dem Vorhergehenden, die Lage na-

türlichen Anfangspunktes A^0 zu den Scheiteln der cubischen Linie, Taf. IV. Fig. 1., von der Grösse des Parameters ab. Setzt man

$$1)\qquad A^0A''' = \frac{2bc - 2(c^2-3b)(c+\sqrt{c^2-3b})}{27} = 0, \quad [138.\ 4)]$$

und:

$$2)\qquad A'''C'' = -\tfrac{1}{3}c + \tfrac{2}{3}\sqrt{c^2-3b} = 0, \quad [138.\ 3)]$$

so lässt sich aus 1) folgern, und aus 2) ergiebt sich:

$$3)\qquad c^2 = 4b.$$

Findet daher diese Bedingung statt, so fällt der natürliche Anfangspunkt A^0, Taf. IV. Fig. 2., mit dem Anfangspunkt C''' der Scheitel zusammen, d. h. die natürliche Abscissenaxe wird dann selbst obere Scheitel-Tangente, und die construirte Linie entspricht der Gleichung:

$$4)\qquad z = \frac{c^2}{4}\cdot x + cx^2 + x^3.$$

Die Grundlinien der Scheitelzweige ergeben sich in diesem Falle, nämlich:

$$5)\qquad C'''U''' = C^{IV}U^{IV} = -\tfrac{1}{6}c, \quad [142.\ 6)]$$

und die Höhen der äusseren Scheitelzweige (und des Scheitel-Rechtecks), nämlich:

$$6)\qquad S'U''' = S''U^{IV} = K'C''' = \tfrac{1}{54}c^3. \quad [142.\ 4)]$$

Als Grundlinie des Scheitel-Rechteckes ergiebt sich:

$$7)\qquad K'C^{IV} = \tfrac{2}{3}c,$$

also ist der Flächeninhalt des Scheitel-Rechteckes:

$$8)\qquad K'C'''K''C^{IV}K' = \tfrac{1}{81}c^4.$$

Denkt man sich die Dreiecke $C^{IV}U^{IV}Q''$ und $C'''U'''Q'$ so verrückt, dass der Endpunkt C^{IV} und der Anfangspunkt C''' der Scheitel mit dem Mittelpunkt M, und die Grundlinie $\binom{C^{IV}U^{IV}}{C'''U'''}$ des äusseren Zweiges des $\binom{\text{oberen}}{\text{unteren}}$ Scheitels mit der Grundlinie $\binom{MW'}{MW''}$ des inneren Zweiges des $\binom{\text{unteren}}{\text{oberen}}$ Scheitels zusammenfällt, so bildet die Tangente $C^{IV}Q''$ des Endpunktes der Scheitel mit der Tangente $C'''Q'$ des Anfangspunktes der Scheitel eine einzige gerade Linie, d. h.

9) der absteigende Ast steht mit dem aufsteigend(tigem Zusammenhange.

In gleicher Weise lässt sich zeigen, dass

10) der absteigende und aufsteigende Ast, wenn mar in paralleler Lage verrückt und mit den Endpunkten irgend eines beliebigen Durchmessers $C''C^{VIII}$ zusamn denkt, in stetigem Zusammenhange stehen.

150.

Setzt man:

1) $$A^0A' = \frac{9bc-2c^3}{27} = 0,$$ [

und

2) $$A'M' = -\tfrac{1}{3}c + \tfrac{1}{3}\sqrt{3c^2-9b} = 0,$$ [

so lässt sich aus 1) folgern, und aus 2) ergiebt sich:

3) $$c^2 = \tfrac{9}{2}b.$$

Findet daher diese Bedingung statt, so fällt der Anfangspunkt A^0, Taf. IV. Fig. 3., mit dem Anfangspunk horizontalen Durchmessers, die natürliche Abscissenaxe a mit diesem Durchmesser zusammen. Die construirte I spricht in diesem Falle der Gleichung:

4) $$0 = \tfrac{2}{9}c^2.y + cy^2 + y^3.$$

151.

Setzt man:

1) $$A^0A^{IV} = \frac{3bc-2(c^2-3b)(c-\sqrt{c^2-3b})}{27} = 0,$$

und:

2) $$A^{IV}S' = -\tfrac{1}{3}c + \tfrac{1}{3}\sqrt{c^2-3b} = 0,$$

so lässt sich aus 1) folgern, und aus 2) ergiebt sich:

3) $$b = 0.$$

Findet daher diese Bedingung statt, so fällt der natü fangspunkt A^0, Taf. IV. Fig. 3., mit dem unteren Sche S', d. h. die natürliche Abscissenaxe mit der unteren Tangente $A^{IV}X^{IV}$ zusammen.

Die construirte Linie entspricht in diesem Falle der Gleichung:

4) $$0 = + cy^2 + y^3.$$

152.

Setzt man:

1) $$A^0A' = \frac{9bc - 2c^2}{27} = 0, \quad [139.\ 1)]$$

und:

2) $$A'M = -\tfrac{1}{3}c = 0, \quad [139.\ 4)]$$

so lässt sich aus 1) folgern, und aus 2) ergiebt sich:

3) $$c = 0.$$

Findet daher diese Bedingung statt, so fällt der natürliche Anfangspunkt A^0 mit dem Mittelpunkte der cubischen Linie zusammen und die construirte Linie entspricht der Gleichung:

4) $$0 = -by + y^3.$$

Die absolute Grösse der Grundlinie der Scheitelzweige ergiebt sich:

5) $$MW' = MW'' = \tfrac{1}{3}\sqrt{3b}, \quad [142.\ 6)\ 7)]$$

und die absolute Höhe der inneren Scheitelzweige:

6) $$S'W' = S''W'' = \tfrac{2}{27} . 3b\sqrt{3b},$$

also die Grundlinie des Scheitel-Rechteckes:

7) $$K'C^{IV} = \tfrac{4}{3}\sqrt{3b},$$

daher der Inhalt desselben:

8) $$K'C'''K''C^{IV}K' = \tfrac{16}{9}b^2.$$

153.

Setzt man ferner:

1) $$A^0A''' = \frac{3bc - 2(c^2 - 3b)(c + \sqrt{c^2 - 3b})}{27} = 0, \quad [138.\ 4)]$$

und:

2) $$A'''S'' = -\tfrac{1}{3}c - \tfrac{1}{3}\sqrt{c^2 - 3b} = 0, \quad [138.\ 1)]$$

so geschieht beiden Gleichungen Genüge:

3) für einen negativen Werth von c, und für: $b = 0$.

Finden daher diese Bedingungen statt, so fällt der natürli Anfangspunkt A^0, Taf. IV. Fig. 2., mit dem oberen Scheitelpu S'', d. h. die natürliche Abscissenaxe selbst mit der ob Scheitel-Tangente $A'''X'''$ zusammen.

Die construirte Linie entspricht in diesem Falle der Gleich

4) $$0 = -cy^2 + y^3.$$

154.

Setzt man:

1) $$A^0A' = \frac{9bc - 2c^3}{27} = 0, \qquad [139. 1$$

und:

2) $$M'M'' = -\tfrac{1}{3}c - \tfrac{1}{3}\sqrt{3c^2 - 9b} = 0, \qquad [139. 6$$

so geschieht beiden Gleichungen Genüge für einen negativen W von c, und für:

3) $$(-c)^2 = \tfrac{9}{2}b.$$

Finden daher diese Bedingungen statt, so fällt der natürl Anfangspunkt A^0 mit dem Endpunkte M'' des horizontalen D messers, die natürliche Abscissenaxe also selbst mit di Durchmesser zusammen.

Die construirte Linie entspricht in diesem Falle der Gleich

4) $$0 = +\tfrac{2}{9}c^2 . y - cy^2 + y^3.$$

155.

Setzt man:

1) $$A^0A^{IV} = \frac{3bc - 2(c^2 - 3b)(c - \sqrt{c^2 - 3b})}{27} = 0, \quad [13$$

und:

2) $$A^{IV}C^{IV} = -\tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{3}\sqrt{c^2 - 3b} = 0, \qquad [138.$$

so geschieht beiden Gleichungen Genüge für:

3) einen negativen Werth von c, und für:

$$(-c)^2 = 4b.$$

Finden daher diese Bedingungen statt, so fällt der natür Anfangspunkt A^0, Taf. IV. Fig. 2., mit dem Endpunkte C^{IV}

Scheitel zusammen, und die natürliche Abscissenaxe wird selbst untere Scheitel-Tangente.

Die construirte Linie entspricht in diesem Falle der Gleichung:

$$4)\qquad 0 = +\frac{c^2}{4}\cdot y - cy^2 + y^3.$$

156.

Hieraus und aus [149. 4)] folgt:

$$1)\qquad -\left(\frac{c^2}{4}\cdot y - cy^2 + y^3\right) = \frac{c^2}{4}(-y) + c(-y)^2 + (-y)^3,$$

d. h.:

Nimmt man für irgend eine positive Abscisse y der, aus dem Endpunkte C^{IV} der Scheitel construirten, cubischen Linie die zugehörige Ordinate negativ, so ist sie gleich der zu derselben negativen Abscisse gehörigen Ordinate der, aus dem Anfangspunkt C''' der Scheitel construirten, cubischen Linie. Oder es ist, bezeichnen $E'L''$ und $E''L'$, Taf. VI. Fig. 16., zwei mit der Vertikalaxe des Mittelpunktes parallellaufende Linien, und ist:

$$2)\qquad L''\mathfrak{M}'' = \mathfrak{M}''E'',$$

$$3)\qquad E'H'' = E''H'.$$

157.

Ist: $c^2 > 3b$, so folgt aus [149.—155.]:

1) Entspricht die construirte Linie der Gleichung:

$$0 = +by \pm cy^2 + y^3, \quad \text{und ist:} \quad c^2 < 4b,$$

so liegt die natürliche Abscissenaxe $\binom{\text{oberhalb}}{\text{unterhalb}}$ der $\binom{\text{oberen}}{\text{unteren}}$ Scheitel-Tangente, ihr natürlicher Anfangspunkt A^0 ist demnach ein Punkt des $\binom{\text{aufwärts}}{\text{abwärts}}$ gehenden Astes.

2) Entspricht die construirte Linie der Gleichung:

$$0 = +by \pm cy^2 + y^3, \quad \text{und ist:} \quad c^2 \begin{cases} > 4b \\ < \frac{9}{2}b \end{cases}$$

so liegt die natürliche Abscissenaxe zwischen der $\binom{\text{oberen}}{\text{unteren}}$

Scheitel-Tangente und der Horizontalaxe des Mittelpunkt
ihr natürlicher Anfangspunkt A^0 ist ein Punkt des äussere
ges des $\begin{pmatrix}\text{unteren}\\ \text{oberen}\end{pmatrix}$ Scheitels.

3) Entspricht die construirte Linie der Gleichung:

$$0 = + by \pm cy^2 + y^3, \quad \text{und ist} \quad c^2 > \tfrac{8}{3}b,$$

so liegt die natürliche Abscissenaxe zwischen der (ur
ol
Scheitel-Tangente und der Horizontalaxe des Mittelpunkt
ihr natürlicher Anfangspunkt A^0 ist ein Punkt des äussere
ges des $\begin{pmatrix}\text{unteren}\\ \text{oberen}\end{pmatrix}$ Scheitels.

4) Entspricht die construirte Linie der Gleichung:

$$0 = - by \pm cy^2 + y^3,$$

so liegt die natürliche Abscissenaxe zwischen der Horizo
des Mittelpunktes und der $\begin{pmatrix}\text{unteren}\\ \text{oberen}\end{pmatrix}$ Scheitel-Tangente
ihr natürlicher Anfangspunkt A^0 ist ein Punkt des inneren
ges des $\begin{pmatrix}\text{unteren}\\ \text{oberen}\end{pmatrix}$ Scheitels.

158.

Schreibt man in Gleichung:

1) $$0 = \pm by + cy^2 + y^3$$

$-y$ anstatt y, so geht dieselbe über in:

2) $$0 = \pm by - cy^2 + y^3.$$

Ergeben sich nun bei Gleichung 1), indem man y als
derlich betrachtet, für positive (negative) Abscissen die Ord
positiv oder negativ, so ergeben sich bei Gleichung 2) fü
selben Abscissen negativ (positiv) dieselben Ordinaten n
oder positiv.

Abscissen und Ordinaten der Gleichung 2) sind also gleich g
Abscissen und Ordinaten der Gleichung 1) entgegengesetzt,

3) Durch Construirung der Gleichung 1) ist zugleich au
Gleichung 2) construirt, wenn man nur der Constructions-l
eine entgegengesetzte Lage ertheilt.

159.

Wenn man für die Gleichung:

1) $$0 = +a + by + cy^2 + y^3$$

schreibt:

2) $$0 = +m^3a + m^2b(my) + mc(my^2) + (my)^3.$$

oder:

3) $$0 = +\frac{a}{m^3} + \frac{b}{m^2}\left(\frac{y}{m}\right) + \frac{c}{m}\left(\frac{y}{m}\right)^2 + \left(\frac{y}{m}\right)^3,$$

diese Gleichungen construirt, und dabei einen und denselben Massstab für die Abscissen zu Grunde legt, so werden:

4) Die Entfernungen aller homologen Punkte von den bezüglichen Ordinatenaxen — also auch die Entfernngen der Durchschnittspunkte der cubischen Linie mit ihren Abscissenaxen — für die Gleichung $\binom{2)}{3)}$ sich m mal $\binom{\text{grösser}}{\text{kleiner}}$ ergeben, als für die Gleichung 1). Man wird also, um aus der construirten Gleichung $\binom{2)}{3)}$ die Wurzeln für Gleichung 1) zu erhalten, diese Entfernungen m mal $\binom{\text{kleiner}}{\text{grösser}}$ machen.

Behält man bei der Construction dieser Gleichungen auch für die Ordinaten einen und denselben Massstab bei, so werden

5) für dic Gleichung $\binom{2)}{3)}$ alle homologen Punkte von den bezüglichen Abscissenaxen einen m^3mal $\binom{\text{grösseren}}{\text{kleineren}}$ Abstand haben, als für Gleichung 1).

Es folgt:

6) Es ist einerlei, ob man bei Construction der Gleichung $\binom{2)}{3)}$ den Massstab der Gleichung 1) zu Grunde lege, oder ob man bei der Construction der Gleichung 1) den Massstab der Abscissen $m$mal und den Massstab der Ordinaten m^3mal $\binom{\text{vergrössere}}{\text{verkleinere}}$.

7) Es ist einerlei, ob man bei Construction der Gleichung 1) den Massstab der Gleichung $\binom{2)}{3)}$ zu Grunde lege, oder ob man

bei Construction der Gleichung $\binom{2)}{3)}$ den Massstab der Abscissen m mal, und den Massstab der Ordinaten m^3 mal $\binom{\text{verkleinere}}{\text{vergrössere}}$.

160.

Schreiben wir daher für Gleichung [143. 1)]:

$$1) \qquad 0 = \begin{Bmatrix} 27q+ \\ 27q- \end{Bmatrix} + 9b(3y) + 3c(3y)^2 + (3y)^3,$$

und construiren dieselbe nach dem Massstabe der Gleichung [143. 1)], so werden uns alle bisher bestimmten Abscissen eine 3mal, und alle bisher bestimmten Ordinaten eine 27mal grössere Grösse vorstellen.

Schreiben wir nun in [143. 6)]:

$$(\mp) \pm r \text{ für } z,$$

und setzen:

$$2) \quad 0 = (\pm) \mp 27r + 9(c^2 - 3b)(3x) \pm 6\sqrt{c^2 - 3b}(3x)^2 + (3x)^3;$$

so wird, bezüglich ihrer Abscissen und Ordinaten, dasselbe der Fall sein, wie bei Construirung der Gleichung 1). Da die construirte cubische Linie der Gleichung [143. 6)], Taf. IV. Fig. 2., identisch ist mit der construirten Linie der Gleichung [143. 1)], Taf. IV. Fig. 1., so ist dieses auch der Fall mit den construirten cubischen Linien der Gleichungen 1) und 2).

Denken wir uns in gleicher Weise auch die Gleichung:

$$3) \qquad 0 = \pm 27a + 9b(3y) + 3c(3y)^2 + (3y)^3$$

construirt, so ist auch diese mit den beiden construirten Linien 1) und 2) identisch, und sie unterscheiden sich sämmtlich nur durch die verschiedene Lage ihrer wirklichen und natürlichen Anfangspunkte.

161.

Denkt man sich diese drei construirten cubischen Linien [160. 1)—3)] so aufeinander gelegt, dass sie sich decken, so fällt, Taf. V. Fig. 4.—15., der wirkliche und natürliche Anfangspunkt A^0 der Linie 1) mit dem natürlichen Anfangspunkt A^0 der Linie 3) und der natürliche Anfangspunkt $\binom{C'''}{C''}$ der Linie 2) mit dem

$\left.\begin{matrix}\text{Anfangs-}\\ \text{End-}\end{matrix}\right)$punkte der Scheitel der beiden andern cubischen Li-
ien zusammen, und der wirkliche Anfangspunkt A der Linie 3)
egt, je nach der Bedeutung des Werthes von a, über oder un-
ır dem natürlichen Anfangspunkte A^0 [133. 4)].

Es folgt:

1) Die Entfernung $\begin{pmatrix}A^0A'''\\ A^0A^{IV}\end{pmatrix}$ des natürlichen Anfangspunktes
er Linie 1) und 3) von der $\begin{pmatrix}\text{oberen}\\ \text{unteren}\end{pmatrix}$ Scheitel-Tangente ist
leich $\begin{pmatrix}27q+\\ 27q-\end{pmatrix}$.

2) Die Entfernung A^0A des natürlichen Anfangspunktes der
inie 3) von der wirklichen Abscissenaxe AX ist gleich $\pm 27a$.
133. 4)].

3) Die Entfernung $\left\{\begin{matrix}BC'''\\ BC^{IV}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}AA'''\\ AA^{IV}\end{matrix}\right\}$ des natürlichen An-
ıngspunktes $\begin{pmatrix}C'''\\ C^{IV}\end{pmatrix}$ der Linie 2) von der wirklichen Abscissen-
ce AX ist gleich $(\pm)\mp 27r$.

4) Die Entfernung $AC(AC', AC'')$ der Ordinate A^0A des wirk-
:hen Anfangspunktes A der construirten cubischen Linie 3) von
rem Durchschnittspunkte $C(C', C'')$ mit der wirklichen Abscis-
ınaxe AX, bezeichnet stets eine reelle Wurzel dieser cubischen
leichung 3).

Ebenso bezeichnet

5) Die Entfernung $BC(BC', BC'') = p\,(=3x)$ der Ordinate
$\left.\begin{matrix}BC'''\\ BC^{IV}\end{matrix}\right)$ des natürlichen Anfangspunktes $\begin{pmatrix}C'''\\ C^{IV}\end{pmatrix}$ der construir-
n Linie 2) von ihrem Durchschnittspunkte $C(C', C'')$ mit der
irklichen Abscissenaxe AX stets eine Wurzel der Gleichung 2).

6) Die Entfernung $\begin{pmatrix}A'''C'''\\ A^{IV}C^{IV}\end{pmatrix}$ des Durchschnittspunktes
$\left.\begin{matrix}A'''\\ A^{IV}\end{matrix}\right)$ der $\begin{pmatrix}\text{oberen}\\ \text{unteren}\end{pmatrix}$ Scheitel-Tangente mit der Ordinatenaxe
ın dem $\begin{pmatrix}\text{Anfangspunkte } C'''\\ \text{Endpunkte } C^{IV}\end{pmatrix}$ der Scheitel ist stets eine Wur-
l der Gleichung 1), also eine bekannte Grösse; es ist nämlich:

$$\left.\begin{matrix}A'''C'''\\ A^{IV}C^{IV}\end{matrix}\right\} = -c \pm 2\sqrt{c^2 - 3b}. \quad [138.\ 3)\ \text{u.}\ 160.\ 1)]$$

Aus dieser Darstellung geht hervor, dass

7) $A^{IV}C^{IV}$, für einen positiven Werth von c, stets eine gative Grösse bedeutet, und dass $A'''C'''$ negativ oder po sein könne, jenachdem

$$c \gtrless 2\sqrt{c^2-3b}$$

ist. Wir werden daher stets bei einem positiven Werthe von

$$-c+2\sqrt{c^2-3b} \quad \text{für} \quad \pm A'''C'''$$

und

$$-c-2\sqrt{c^2-3b} \quad „ \quad -A^{IV}C^{IV}$$

anschreiben müssen.

162.

Ist:

$$0=+a+by+cy^2+y^3 \qquad [47.]$$

die zu construirende Gleichung, und $c^2<4b$, so liegt die nat liche Abscissenaxe A^0X^0 stets oberhalb der oberen Scheit Tangente, Taf. V. und VI. Fig. 4.—8a., [157. 1)].

Liegt nun zugleich auch

1) die wirkliche Abscissenaxe AX oberhalb der oberen Sch tel-Tangente, aber unterhalb der natürlichen Abscissenaxe, Taf. Fig. 4., so ist:

$A^0A<A^0A'''$; nämlich: $27a<27q+$,

$A^0A'''-A^0A=AA'''$, „ $27(q+-a)=27r$,

$-AC=-A'''C'''+BC$, „ $(3y)=-c+2\sqrt{c^2-3b}+$

Schneidet aber

2) die wirkliche Abscissenaxe die beiden Scheitel oberh der Horizontalaxe des Mittelpunktes, Taf. V. Fig. 5., so ist:

$A^0A>A^0A'''$, nämlich $27a>27q+$,

$A^0A-A^0A'''=AA'''$, „ $27(a-q+)=27r$,

$$\left.\begin{aligned}-AC&=-A'''C'''-BC,\\-AC'&=-A'''C'''-BC',\\-AC''&=-A'''C'''-BC'',\end{aligned}\right\} \quad „ \quad (3y)=-c+\sqrt{c^2-3b}-$$

Schneidet dagegen:

3) die wirkliche Abscissenaxe die beiden Scheitel unterhalb der Horizontalaxe des Mittelpunktes, Taf. V. Fig. 6., so ist:

$A^0A < A^0A^{IV}$, nämlich: $27a < 27q$,

$A^0A^{IV} - A^0A = AA^{IV}$ „ $27(q_- - a) = 27r$,

$\left.\begin{array}{l} AC = -A^{IV}C^{IV} + BC, \\ -AC' = -A^{IV}C^{IV} + BC', \\ -AC'' = -A^{IV}C^{IV} + BC'', \end{array}\right\}$ „ $(3y) = -c - 2\sqrt{c^2 - 3b} + p$.

Liegt:

4) die wirkliche Abscissenaxe unterhalb der unteren Scheitel-Tangente, Taf. V. Fig. 7., so ist:

$A^0A > A^0A^{IV}$, nämlich: $27a > 27q_-$,

$A^0A - A^0A^{IV} = AA^{IV}$, „ $27(a - q_-) = 27r$,

$-AC = -A^{IV}C^{IV} - BC$, „ $(3y) = -c - 2\sqrt{c^2 - 3b} - p$.

Liegt aber:

5) die wirkliche Abscissenaxe oberhalb der natürlichen Abscissenaxe, Taf. VI. Fig. 8ᵃ., so ist:

$-A^0A < +A^0A'''$, nämlich: $-27a < 27q+$,

$A^0A + A^0A''' = AA'''$, „ $27(a + q+) = 27r$,

$+AC = -A'''C''' + BC$, „ $(3y) = -c + 2\sqrt{c^2 - 3b} + p$.

Es erstreckt sich also dieser Fall auf [48. 1,)], wobei jedoch nur die oberen Vorzeichen in Berücksichtigung kommen.

163.

Ist

$$0 = \mp a + by + cy^2 + y^3 \qquad [48.]$$

die zu construirende Gleichung, und $c^2 > 4b$, so ist der natürliche Anfangspunkt A^0 stets ein Punkt des äusseren Zweiges des unteren Scheitels, Taf. V. Fig. 8ᵇ. — 11., [157. 2) 3)].

Liegt nun

1) die wirkliche Abscissenaxe oberhalb der oberen Scheitel-Tangente, Taf. V. Fig. 8ᵇ., so ist:

$-A^0A < -A^0A'''$, nämlich: $-27a < -27q+$,

$A^0A - A^0A''' = AA'''$, „ $27(a-q+) = 27r$,

$+AC = +A'''C''' + BC$, „ $(3y) = -c + 2\sqrt{c^2 - 3}$

Es erstreckt sich also dieser Fall auf [48. 1)], wobei die unteren Vorzeichen in Berücksichtigung kommen.

Schneidet

2) die wirkliche Abscissenaxe die beiden Scheitel ob der Horizontalaxe des Mittelpunktes, Taf. V. Fig. 9., so ist:

$-A^0A > -A^0A'''$, nämlich: $-27a > -27q+$,

$A^0A''' - A^0A = AA'''$, „ $27(q+ - a) = 27r$,

$$\left.\begin{array}{l} +AC = +A'''C''' - BC, \\ -AC' = +A'''C''' - BC', \\ -AC'' = +A'''C''' - BC'', \end{array}\right\} \quad „ \quad (3y) = -c + 2\sqrt{c^2 - 3}$$

Schneidet dagegen

3) die wirkliche Abscissenaxe die beiden Scheitel unte der Horizontalaxe des Mittelpunktes, Taf. V. Fig. 10., so ist:

$+A^0A < +A^0A^{IV}$, nämlich: $+27a < +27q-$,

$A^0A^{IV} - A^0A = AA^{IV}$, „ $27(q- - a) = 27r$,

$$\left.\begin{array}{l} -AC = -A^{IV}C^{IV} + BC, \\ -AC' = -A^{IV}C^{IV} + BC', \\ -AC'' = -A^{IV}C^{IV} + BC'', \end{array}\right\} \quad „ \quad (3y) = -c - 2\sqrt{c^2 - 3}$$

Liegt

4) die wirkliche Abscissenaxe unterhalb der unteren Sch Tangente, Taf. V. Fig. 11, so ist:

$+A^0A > +A^0A^{IV}$, nämlich: $+27a > +27q-$,

$A^0A - A^0A^{IV} = AA^{IV}$, „ $27(a - q-) = 27r$,

$-AC = -A^{IV}C^{IV} - BC$, „ $(3y) = -c - 2\sqrt{c^2 - 3}$

164.

Ist

$$0 = \mp a - by + cy^2 + y^3 \qquad [4$$

nstruirende Gleichung, so ist der natürliche Anfangspunkt ein Punkt des inneren Zweiges des unteren Scheitels, 'ig. 12.—15., [157. 4)].

t nun

e wirkliche Abscissenaxe AX oberhalb der oberen Schei-nte, Taf. V. Fig. 12., so ist:

$-A^0A'''$, nämlich: $-27a < -27q+$,

$A^0A''' = AA'''$, „ $27(a-q+) = 27r$,

$+A'''C''' + BC$, „ $(3y) = -c + 2\sqrt{c^2+3b} + p$.

eidet

e wirkliche Abscissenaxe die beiden Scheitel oberhalb zontalaxe des Mittelpunktes, Taf. V. Fig. 13., so ist:

$-A^0A'''$, nämlich $-27a > -27q+$,

$-A^0A = AA'''$, „ $27(q+-a) = 27r$,

$:+A'''C'''-BC$,
$:+A'''C'''-BC'$, „ $(3y) = -c+2\sqrt{c^2+3b}-p$.
$:+A'''C'''-BC''$,

eidet dagegen:

e wirkliche Abscissenaxe die beiden Scheitel unterhalb zontalaxe des Mittelpunktes, Taf. V. Fig. 14., so ist:

$+A^0A^{IV}$, nämlich: $+27a < +27q-$,

$-A^0A = AA^{IV}$ „ $27(q- -a) = 27r$,

$:-A^{IV}C^{IV}+BC$,
$:-A^{IV}C^{IV}+BC'$, „ $(3y) = -c-2\sqrt{c^2+3b}+p$.
$:-A^{IV}C^{IV}+BC''$,

t:

e wirkliche Abscissenaxe unterhalb der unteren Scheitel-, Taf. V. Fig. 15., so ist:

$+A^0A^{IV}$, nämlich: $+27a > +27q-$,

$A^0A^{IV} = AA^{IV}$, „ $27(a-q-) = 27r$,

$-A^{IV}C^{IV}-BC$, „ $(3y) = -c-2\sqrt{c^2+3b}-p$.

165.

Sind die zu construirenden Gleichungen:

1) $0 = -a + by - cy^2 + y^3$, und ist: $c^2 < 4b$, [50.]

2) $0 = \pm \quad + \quad - \quad +$, „ „ $c^2 > 4b$, für $-a$, [51.]
$c^2 \gtrless 4b$, „ $+a$,

3) $0 = \pm \quad - \quad - \quad +$, [52.]

so ergiebt sich hierfür ganz dieselbe Betrachtungsweise, wie beziehungsweise [162. 163. 164.], wenn man, nach (158. 3)] der Constructionsebene eine entgegengesetzte Lage ertheilt, also hierdurch die in [162.—164.] behandelten Grössen in die entgegengesetzten verwandelt.

Es wird nicht schwer fallen jene Fälle auf diese anzuwenden.

166.

Es geht aus dem abgehandelten hervor, dass man die reellen Wurzeln der Gleichung [160. 3)]', und mithin auch der Gleichung:

1) $$0 = a + by + cy^2 + y^3$$

für jeden positiven und negativen Werth der Coefficienten a, b, c leicht bestimmen könne, wenn man aus Gleichung [160. 2)] für jeden Werth von $27r$ die zugehörige Wurzel

$$3x = BC, \quad (BC', BC'') = p$$

zu bestimmen im Stande sei. Nimmt man nun den Massstab der Abscissen dieser Gleichung [160. 2)] $\sqrt{c^2 - 3b}$ mal, und den ihrer Ordinaten $(\sqrt{c^2 - 3b})^3$ mal kleiner [159. 3)]; so geht dieselbe über in:

2)

$$0 = (\pm) \mp \frac{27r}{(c^2-3b)^{\frac{3}{2}}} + 9 \cdot \left[\frac{3x}{(c^2-3b)^{\frac{1}{2}}}\right] \pm 6 \cdot \left[\frac{3x}{(c^2-3b)^{\frac{1}{2}}}\right]^2 + \left[\frac{3x}{(c^2-3b)^{\frac{1}{2}}}\right]^3, \quad [44.\ 4)]$$

also in die Zahlengleichung:

3) $$R = +9P \pm 6P^2 + P^3, \qquad \left[45. \begin{matrix} \text{II.} \\ \text{I.} \end{matrix}\right]$$

wodurch nunmehr die geometrische Bedeutung des Verfahrens

der Auflösung der vorgelegten Gleichung 1), $c^2 > 3b$ vorausgesetzt, mittelst der Tabellen I. und II., mit Ausnahme des Verfahrens der Interpolirung, ihre Erörterung gefunden haben dürfte.

167.

Was diese Tabellen selbst anlangt, so wurde zu jedem eingeschriebenen Werthe von P der zugehörige Werth von R berechnet, ein Verfahren, das zum Theil für Tabelle I. überflüssig war.

Man erhält nämlich für Gleichung [166. 3)] nach [142. 18)]

1) $$K'C^{IV} = 4, \quad K'C''' = 4,$$

also ist das umgeschriebene Rechteck der Scheitel ein Quadrat, Taf. VI. Fig. 16., und setzt man:

2) $$P = 0, 1, 2, 3, 4;$$

so folgt:

3) $$R = 0, 4, 2, 0, 4.$$

Hat man daher:

4) für alle Werthe, von $P = 0$ bis zu $P = 2$, die zugehörigen Werthe von R berechnet, ist also für irgend eine Abscisse $P = C'''E''$ (< 2), Taf. VI. Fig. 16., die zugehörige Ordinate $R = E''H'$ gefunden; so kann man von dem Satze [156. 1) 3)] Anwendung machen, nach welchem sich für eine andere Abscisse $C'''L''$, welche um ebensoviel > 2, wie $C'''E'' < 2$ ist, die zugehörige Ordinate:

$$L''H'' = 4 - E'H'' = 4 - E''H'$$

ergiebt. Ist z. B.

5) $$P = 0{,}007, \text{ also } R = 0{,}062706343, \qquad \text{[Tab. I.]}$$

so ist:

$$P = 2 - 1{,}993,$$

also ist für ein anderes

$$P = 2 + 1{,}993 = 3{,}993$$

der zugehörige Werth von

$$R = 4 - 0{,}062706343 = 3{,}937293657.$$

Durch die Anwendung dieses Verfahrens ist Tabelle I. an den betreffenden Stellen ohne Schwierigkeiten einer grossen Erweiterung fähig, weil sie für Werthe von $P > 0$ genauer berechnet ist, als für Werthe von $P < 4$.

168.

Bezeichnet, Taf. VI. Fig. 17.—20., die Abscisse AG' irgend einen in Tabelle I. eingeschriebenen Werth P', und AE' den folgenden Werth P'', sind also die Ordinaten $G'G$ und $E'E$ die bezüglichen Werthe R' und R'', bezeichnet ferner $J'J$ eine zwischen R' und R'' gelegene Ordinate R, zu welcher wir die zugehörige Abscisse $AJ' = AG' + G'J' = P$ zu bestimmen haben, und ziehen wir von den Endpunkten G und J, Taf. VI. Fig. 17. und 20., und J und E, Taf. VI. Fig. 18. und 19., der Ordinaten R', R, R'' die mit der Abscissenaxe parallelen Linien GF, JL, Taf. VI. Fig. 17. und 20., und JL, EF Taf. VI. Fig. 18. und 19.; so ergeben sich:

1) $\begin{cases} HJ = J'J - G'G = R - R', \\ LG = G'G - J'J = R' - R, \end{cases}$ Taf. VI. Fig. 17. und 20., „ „ „ 18. „ 19.

Ferner ist

2) $\left\{\begin{array}{l} FE = E'E - G'G = R'' - R' \\ FG = G'G - E'E = R' - R'' \end{array}\right\} = D.$ Taf. VI. Fig. 17. u. 20., „ „ „ 18. „ 19.

Setzen wir nun:

3) $G'E' = \begin{Bmatrix} FG \\ FE \end{Bmatrix} = 1,$ Taf. VI. Fig. 17. und 20., „ „ „ 18. „ 19

und

4) $\left\{\begin{array}{c} HJ : HG = FE : FG \\ R - R' : HG = D : 1 \end{array}\right\},$ Taf. VI. Fig. 17. und 20.

5) $\left\{\begin{array}{c} LG : LJ = FG : FE \\ R' - R : LJ = D : 1 \end{array}\right\};$ Taf. VI. Fig. 18. und 19.

so folgt:

6) $HG = G'J' = \frac{HJ.FG}{FE} = \frac{R - R'}{D},$ Taf. VI. Fig. 17. und 20.

7) $LJ = G'J' = \frac{LG.FE}{FG} = \frac{R' - R}{D},$ Taf. VI. Fig. 18 und 19.

[57 u. f.]

Die Proportionen 4) und 5) setzen voraus, dass das Stück GJE der cubischen Linie eine gerade Linie sei. Da dieselbe in Wirklichkeit aber von einer Geraden abweicht, so sind die Formeln 6) und 7) zur Bestimmung der Grösse $G'J'$ nur annähernd richtig.

Als richtige Proportionen ergeben sich, indem man den Endpunkt G der Ordinate R' mit dem Endpunkte E der Ordinate R'' durch eine Gerade GE verbindet, und durch deren Durchschnittspunkt H' mit der Ordinate R eine weitere Parallele $L'H'$ zur Abscissenaxe zieht, nämlich:

8) $$\begin{cases} HH' : HG = FE : FG, & \text{Taf. VI. Fig. } 17^a. \text{ und } 20^a. \\ L'G : \begin{Bmatrix} L'H' \\ LJ \end{Bmatrix} = FG : FE, & \text{„ „ „ } 18^a. \text{ „ } 19^a. \end{cases}$$

Hieraus folgt:

9) $$\begin{cases} HG = \dfrac{HH'.FG}{FE}, \\ LJ = \dfrac{L'G.FE}{FG}. \end{cases}$$

Da nun

10) für das $\begin{Bmatrix} \text{1. Rechteck } HH' < HJ \\ \text{2. „ } L'G > LG \\ \text{3. „ } L'G < LG \\ \text{4. „ } HH' > HJ \end{Bmatrix}$ ist, so folgt auch:

11) dass der im $\begin{Bmatrix} \text{1. und 3. Rechteck} \\ \text{2. „ 4. „} \end{Bmatrix}$ für $G'J'$ gefundene Werth um eine gewisse Grösse zu $\begin{pmatrix} \text{vermindern} \\ \text{vermehren} \end{pmatrix}$ sei.

169.

Denkt man sich die Grundlinie $C^{IV}U^{IV}$ ($C'''U'''$) Taf. VI. Fig. 21, des äusseren Scheitelzweiges in n gleiche Theile, jeden gleich e, getheilt, so dass

1) $$C^{IV}U^{IV} = \tfrac{1}{3}c = ne \qquad [149.\ 5)]$$

ist, und aus den Theilungspunkten Parallelen mit der Höhe $S''U^{IV}$ des äusseren Scheitelzweiges gezogen, so entstehen — denkt man sich weiter diese Parallelen gehörig verlängert und aus dem jedesmaligen Durschnittspunkt einer folgenden Parallele mit der cubischen Linie, nach der vorhergehenden eine Parallele zur

Grundlinie $C^{IV}U^{IV}$ gezogen —lauter Parallelogramme, deren G sammtinhalt F' sich folgendermassen darstellt:

2)

$$F' = \left[\frac{c^2}{4}.e-c.e^2+e^3\right].e \qquad [155.\ 4)$$
$$+\left[\frac{c^2}{4}.(2e)-c(2e)^2+(2e)^3\right].e$$
$$+\left[\frac{c^2}{4}.(3e)-c(3e)^2+(3e)^3\right].e$$
$$+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$
$$+\left[\frac{c^2}{4}.((n-1)e)-c((n-1)e)^2+((n-1)e)^3\right].e$$
$$+\left[\frac{c^2}{4}.(ne)-c(ne)^2+(ne)^3\right].e$$
$$= e^2\left[\frac{c^2}{4}(1+2+3+\ldots.+(n-1)+n)\right.$$
$$-c(1^2+2^2+3^2+\ldots.+(n-1)^2+n^2).e$$
$$\left.+(1^3+2^3+3^3+\ldots.+(n-1)^3+n^3).e^2\right]$$
$$= e^2\left[\frac{c^2}{8}(n^2+n)-\frac{c}{6}(2n^3+3n^2+n).e+\tfrac{1}{4}(n^4+2n^3+n^2).e^2\right]$$

Setzt man $n=\infty$, so wird:

3) $$F' = n^2e^2\left[\frac{c^2}{8}-\frac{c}{3}.ne+\tfrac{1}{4}n^2e^2\right].$$

Und setzt man für ne seinen Werth aus 1), so ergiebt s Flächeninhalt $C^{IV}U^{IV}S''M''C^{IV}$ des, von einem äusseren seiner Grundlinie und seiner Höhe begrenzten, Theil Scheitels, nämlich:

4) $$F' = \frac{11}{5184}.c^4.$$

Aus der Vergleichung mit [149. 8)] folgt:

5) $$K'C'''K''C^{IV}K' : C^{IV}U^{IV}S''M''C^{IV} = 64:11,$$

... der von seiner Höhe und Grundlinie beg

170.

Denkt man sich in gleicher Weise die Grundlinie MW'' (MW'), Taf. VI. Fig. 21., des inneren Scheitelzweiges in n gleiche Theile, jeden gleich e, getheilt, so dass

1) $$MW'' = \tfrac{1}{3}\sqrt{3b} = ne \qquad [152.\ 5)]$$

ist, so ergiebt die Rechnung für den Flächeninhalt $MC^{V}S''W''M = F''$ eines von seiner Höhe und Grundlinie begrenzten inneren Scheitelzweiges, nämlich:

2) $$\begin{aligned} F'' = \; & [b(e) - e^3] \cdot e \qquad [152.\ 4)] \\ & + [b(2e) - (2e)^3] \cdot e \\ & + [b(3e) - (3e)^3] \cdot e \\ & + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ & + [b(ne) - (ne)^3] \cdot e \\ = \; & \tfrac{1}{2}e^2 b(n^2 + n) - \frac{e^4}{4}(n^4 + 2n^3 + n^2). \end{aligned}$$

Setzt man $n = \infty$, so wird:

3) $$F'' = \tfrac{1}{2}b \cdot n^2e^2 - \tfrac{1}{4}n^4e^4,$$

und wieder für ne seinen Werth aus 1) gesetzt, ergiebt:

4) $$F'' = \tfrac{5}{36}b^2.$$

Aus der Vergleichung mit [152. 8)] folgt:

5) $$K'C'''K''C^{IV}K' : MC^{V}S''W''M = 64 : 5,$$

d. h. es ist der Flächeninhalt eines inneren Scheitelzweiges gleich $\tfrac{5}{64}$ des Flächeninhaltes des ganzen Scheitel-Rechteckes.

171.

Denkt man sich die Grundlinie des Scheitel-Rechteckes, und ebenso seine Höhe, in acht gleiche Theile eingetheilt, und durch die Theilungspunkte Parallelen mit der Höhe und Grundlinie gezogen, so dass hierdurch das Scheitel-Rechteck in 64 congruente Rechtecke abgetheilt wird [142. 19)]; so bezeichnet Taf. VI. Fig.22. die Grösse der Flächeninhalte der einzelnen Theile der Scheitelzweige, durch diese Rechtecke ausgedrückt, giebt also die Verhältnisse an, in welchen diese Theile selbst zu einander stehen.

Macht man in Taf. VI. Fig. 21.

$$C^{IV}K''' = C^{IV}U^{IV} = \tfrac{1}{6}c, \qquad [149. 5)$$

und denkt sich die Ordinaten $K'''C^X$ gezogen, so bestimmt der Inhalt F''' der, von den Coordinaten des Punktes C^X dem Theile $C^{IV}C^{IX}C^X$ der cubischen Linie eingeschlossen Fläche, aus [169. 3)], nämlich

1) $$F''' = n^2e^2\left[\frac{c^2}{8} + \frac{c}{3} \cdot ne + \tfrac{1}{4}n^2e^2\right],$$

oder

2) $$F''' = \frac{27}{5184} \cdot c^4.$$

172.

Allgemein ergiebt sich der Inhalt F jeder von einem Theile der cubischen Linie und den zugehörigen Coordinaten eingeschlossenen Fläche, die Abscissen vom Anfangspunkte C''', oder vom Endpunkte C^{IV} der Scheitel gerechnet und gleich x gesetzt: [143. 5)]

1) $$F = x^2 . [\tfrac{1}{6}(c^2-3b) \pm \tfrac{1}{3}\sqrt{c^2-3b} . x + \tfrac{1}{4}x^2],$$

oder die Abscissen x vom Mittelpunkte gerechnet, [140. 4)]:

2) $$F = x^2[\tfrac{1}{6}(c^2-3b) - \tfrac{1}{4}x^2].$$

173.

Wir gründeten die Bestimmung der Wurzeln einer gegebenen cubischen Gleichung:

1) $$0 = a + by + cy^2 + y^3,$$

2) $$c^2 > 3b$$

vorausgesetzt, auf die Verlegung des natürlichen Anfangspunktes nach dem $\left(\begin{matrix}\text{Anfangspunkte } C''' \\ \text{Endpunkte } C^{IV}\end{matrix}\right)$ der Scheitel,

oder:

3) $$c^2 \gtrless 3b$$

angenommen, auf die Verlegung des natürlichen Anfangspunktes nach dem Mittelpunkte der cubischen Linie.

Wir hätten sie, wie sich leicht nachweisen lässt, ebensowohl ei der Bedingung 2) auf die Verlegung des natürlichen Anfangs-unktes (nach dem Scheitelpunkte $\binom{S'}{S''}$, oder dem Endpunkte $\binom{M'}{M''}$ des horizontalen Durchmessers gründen können.

Auch ist leicht ersichtlich, dass eine Verlegung des natür-ichen Anfangspunktes nach den genannten Punkten nicht an-vendbar sei, wenn die Bedingung:

4) $$c^2 < 3b$$

stattfinde, also der Parameter negativ sei, weil dann, nach [147. III.] die Scheitel selbst unmöglich sind.

Wir sind daher, im Falle diese Bedingung stattfindet, ge-nöthigt, den natürlichen Anfangspunkt nach dem Mittelpunkte M ler cubischen Linie zu verlegen.

174.

Im Nachstehenden sei die Bedingung:

$$c^2 < 3b$$

vorausgesetzt.

Wenn man den Massstab der Abscissen der zu construiren-den Gleichung [139. 2)] 3mal, und den ihrer Ordinaten 27mal, vergrössert, so ergiebt sich:

1) $$0 = 27q + 9b(3y) + 3c(3y)^2 + (3y)^3.$$

Verfährt man in gleicher Weise mit der Mittelpunktsgleichung [140. 4)], indem man r für z schreibt, so erhält man:

2) $$0 = -27r + (9b - 3c^2)(3x) + (3x)^3;$$

die construirten Linien beider Gleichungen sind mit der construir-ten Linie der Gleichung:

3) $$0 = \pm 27a + 9b(3y) + 3c(3y)^2 + (3y)^3,$$

identisch und unterscheiden sich nur durch die verschiedene Lage der wirklichen und natürlichen Anfangspunkte.

175.

Denkt man sich diese drei construirten cubischen Linien aufeinander gelegt, dass sie sich decken, so fällt, Taf. VIII.

Fig. 40.—42., der wirkliche und natürliche Anfangspunkt A^0 der Linie 1) mit dem natürlichen Anfangspunkt A^0 der Linie 3), und der natürliche Anfangspunkt M der Linie 2) mit dem Mittelpunkte der beiden andern cubischen Linien zusammen, und der wirkliche Anfangspunkt A der Linie 3) liegt, je nach der positiven oder negativen Bedeutung des Werthes von a, unter oder über den natürlichen Anfangspunkte A^0 [133. 4)].

Es folgt:

1) Die Entfernung A^0A' des natürlichen Anfangspunktes der Linie 1) und 3) von der Horizontalaxe des Mittelpunktes ist gleich $27q$ [139. 1)]. Sie ist $\binom{\text{positiv}}{\text{negativ}}$, wenn der Punkt A^0 $\binom{\text{über}}{\text{unter}}$ den Punkt A' liegt.

2) Die Entfernung A^0A des natürlichen Anfangspunktes der Linie 3) von der wirklichen Abscissenaxe AX ist gleich: $\pm 27a$, wenn der natürliche Anfangspunkt A^0 $\binom{\text{über}}{\text{unter}}$ dem wirklichen Anfangspunkt A liegt [133. 4)].

3) Die Entfernung $BM = A'A$ des natürlichen Anfangspunktes der Linie 2) von der wirklichen Abscissenaxe AX ist gleich $27r$.

4) Die Entfernung AC der Ordinate A^0A des wirklichen Anfangspunktes A der construirten cubischen Linie 3) von ihrem Durchschnittspunkte C mit der wirklichen Abscissenaxe AX, bezeichnet stets die reelle Wurzel dieser cubischen Linie 3).

Ebenso bezeichnet:

5) Die Entfernung $BC = p (= 3x)$ der Ordinate BM des Mittelpunktes der construirten Gleichung 2) von ihrem Durchschnittspunkte C mit der wirklichen Abscissenacxe AX stets eine Wurzel der Gleichung 2).

6) Die Entfernung $A'M$ des Durchschnittspunktes A' der Horizontalaxe des Mittelpunktes mit der Ordinatenaxe von dem Mittelpunkte ist stets eine Wurzel der Gleichung 1), also eine bekannte Grösse, es ist nämlich:

$$A'M = -c. \qquad [139. 4)]$$

176.

Ist

$$0 = \pm a + by + cy^2 + y^3 \qquad [94.]$$

die zu construirende Gleichung und:

$$9bc > 2c^3, \quad \text{nämlich:} \quad \tfrac{9}{2}b > c^2,$$

so liegt die natürliche Abscissenaxe stets über der Horizontalaxe des Mittelpunktes [140. 11)]. Liegt nun:

1) die wirkliche Abscissenaxe zwischen der natürlichen Abscissenaxe und der Horizontalaxe des Mittelpunktes, Taf. VIII. Fig. 40. so ist:

$$A^0A < A^0A'; \qquad \text{nämlich:} \quad +27a < +27q,$$

$$A^0A' - A^0A = AA', \qquad \text{„} \quad 27(q-a) = 27r,$$

$$-AC = -A'M + BC, \qquad \text{„} \quad (3y) = -c + p.$$

Liegt aber die wirkliche Abscissenaxe oberhalb der natürlichen, Taf. VIII. Fig. 41., so ist:

$$-A^0A < +A^0A', \qquad \text{nämlich:} \quad -27a < +27q,$$

$$A^0A' - A^0A = AA', \qquad \text{„} \quad 27(q+a) = 27r,$$

$$+AC = -A'M + BC, \qquad \text{„} \quad (3y) = -c + p.$$

Liegt

3) die wirkliche Abscissenaxe unterhalb der Horizontalaxe des Mittelpunktes [Taf. VIII. Fig. 42.], so ist:

$$+A^0A > +A^0A', \qquad \text{nämlich:} \quad +27a > +27q,$$

$$A^0A - A^0A' = AA', \qquad \text{„} \quad 27(a-q) = 27r,$$

$$-AC = -A'M - BC, \qquad \text{„} \quad (3y) = -c - p.$$

177.

Ist

$$0 = \pm a + by - cy^2 + y^3 \qquad [95.]$$

die zu construirende Gleichung, so ergiebt sich hierfür ganz dieselbe Betrachtungsweise, wie [176.], wenn man, nach [158. 3)], der Constructionsebene eine entgegengesetzte Lage ertheilt, also hierdurch die in [176.] behandelten Grössen in die entgegengesetzten verwandelt.

178.

Es geht hieraus hervor, dass man die reelle Wurzel der Gleichung [174. 3)], oder der Gleichung:

1) $$0 = a + by + cy^2 + y^3$$

für jeden positiven oder negativen Werth der Coefficienten a und c leicht bestimmen könne, wenn man aus Gleichung [174. 2)] für jeden Werth von $27r$ die zugehörige Wurzel

$$3x = BC = p$$

zu bestimmen im Stande sei. Nimmt man nun den Massstab der Abscissen dieser Gleichung [174. 2)] $\sqrt{9b - 3c^2}$ mal, und den ihrer Ordinaten $(\sqrt{9b - 3c^2})^3$ mal kleiner [159. 3)]; so geht dieselbe über in:

2)
$$0 = -\frac{27r}{(9b - 3c^2)^{\frac{3}{2}}} + \left[\frac{3x}{(9b - 3c^2)^{\frac{1}{2}}}\right] + \left[\frac{3x}{(9b - 3c^2)^{\frac{1}{2}}}\right]^3, \quad [91.\ 4)]$$

also in die Zahlengleichung:

3) $$R = + P + P^3, \qquad [91.\ III.]$$

wodurch die geometrische Bedeutung des Verfahrens der Auflösung der vorgelegten Gleichung mittelst der Tabelle III., ihre Erörterung gefunden haben dürfte, indem wir den Nachweis der geometrischen Bedeutung der Interpolirung dem Leser überlassen.

179.

Im Nachstehenden sei wieder die Bedingung:

$$c^2 > 3b,$$

also die cubische Linie mit Scheiteln versehen, vorausgesetzt. Die Gleichung [174. 2)] erhält dann die Form:

$$0 = \pm 27r - (3c^2 - 9b)(3x) + (3x)^3.$$

Dagegen ändern sich die Gleichungen [174. 1) und 3)] nicht, und die in [175.] aufgestellten Sätze behalten ihre Gültigkeit. Der Grösse p entsprechen jedoch, wenn die wirkliche Abscissenaxe AX die beiden Scheitel schneidet, die drei Werthe: BC, BC', BC''.

180.

Ist:

$$0 = \pm a + by + cy^2 + y^3$$

die zu construirende Gleichung, und

$$\pm 27q = + 9bc - 2c^3, \quad \text{also} \quad \tfrac{9}{2}b \gtrless c^2, \qquad [114.]$$

so liegt die natürliche Abscissenaxe stets $\begin{pmatrix}\text{oberhalb}\\\text{unterhalb}\end{pmatrix}$ der Horizontalaxe des Mittelpunktes [157. 1) — 3)], die wirkliche Abscissenaxe aber, je nach der $\begin{pmatrix}\text{positiven}\\\text{negativen}\end{pmatrix}$ Bedeutung des Werthes von a $\begin{pmatrix}\text{unterhalb}\\\text{oberhalb}\end{pmatrix}$ der natürlichen Abscissenaxe. Es unterscheiden sich folgende Fälle:

1) Es liegt die natürliche Abscissenaxe oberhalb der Horizontalaxe des Mittelpunktes, und zwischen beiden die wirkliche Abscissenaxe. In diesem Falle schneidet letztere entweder beide Scheitel, Taf. VII. Fig. 25., oder sie schneidet sie nicht, Taf. VII. Fig. 24., und es ist hierbei einerlei, ob auch die natürliche Abscissenaxe die Scheitel schneide oder nicht schneide. Es ergiebt sich:

$$\left.\begin{array}{lll} +A^0A < +A^0A', & \text{nämlich:} & +27a < +27q, \\ A^0A' - A^0A = AA', & \text{,,} & 27(q-a) = 27r, \\ -AC = -A'M + BC, & \text{,,} & (3y) = -c + p, \end{array}\right\} \text{Taf. VII. Fig. 24. und 25.}$$

und

$$\left.\begin{array}{l} -AC' = -A'M - BC' \\ -AC'' = -A'M - BC'' \end{array}\right\}, \text{ nämlich: } (3y) = -c - p, \text{ Taf. VII. Fig. 25.}$$

2) Es liegt die wirkliche Abscissenaxe oberhalb der natürlichen, und diese oberhalb der Horizontalaxe des Mittelpunktes. In diesem Falle ist:

$$\left.\begin{array}{lll} -A^0A < +A^0A' & \text{nämlich:} & -27a < +27q, \\ A^0A' + A^0A = AA', & \text{,,} & 27(q+a) = 27r, \\ +AC = -A'M + BC, & \text{,,} & (3y) = -c + p, \end{array}\right\} \text{Taf. VII. Fig. 26. und 27.}$$

und

$$\left.\begin{array}{l} -AC' = -A'M - BC' \\ -AC'' = -A'M - BC'' \end{array}\right\}, \text{ nämlich: } (3y) = -c - p. \text{ Taf. VII. Fig. 27.}$$

3) Es liegt die natürliche Abscissenaxe oberhalb und die wirkliche Abscissenaxe unterhalb der Horizontalaxe des Mittelpunktes. In diesem Falle ist:

nämlich: $-27a > -27q$,
„ $27(q-a) = 27r$,
$(3y) = -c-p$, Taf. VIII. Fig. 36.
„ „ $= - +$
„ $= - +$

181.

$= \pm a - by + cy^2 + y^3$

leichung, und

$-27q = -9bc - 2c^3$, [115.]

Anfangspunkt stets ein Punkt des inneren Scheitels [157. 4)], die natürliche Asscis- r stets die beiden Scheitel unterhalb der elpunktes.

sich folgende Fälle:

bscissenaxe liegt unterhalb der natürlichen hält:

ämlich: $+27a > -27q$,
„ $27(q+a) = 27r$, Taf. VII. Fig. 34. und 35.
„ $(3y) = -c-p$,

, nämlich: $(3y) = -c+p$. Taf. VII. Fig. 35.

bscissenaxe liegt zwischen der natürlichen des Mittelpunktes.

nämlich: $-27a > -27q$,
„ $27(q-a) = 27r$,
$(3y) = -c-p$, Taf. VIII. Fig. 37.
„ $= - +$
$= - +$

$$\left.\begin{array}{lll} +A^0A > +A^0A', & \text{nämlich:} & +27a > 27q, \\ A^0A - A^0A' = AA', & \text{„} & 27(a-q) = 27r, \\ -AC = -A'M - BC, & \text{„} & (3y) = -c-p, \end{array}\right\}$$ Taf. VII Fig. 30. un

und

$$\left.\begin{array}{l} -AC' = -A'M + BC' \\ -AC'' = -A'M + BC'' \end{array}\right\}, \text{ nämlich: } (3y) = -c+p.$$ Taf. VII. F

4) Es liegt die wirkliche Abscissenaxe unterhalb der lichen und diese unterhalb der Horizontalaxe des Mittelpu und der natürliche Anfangspunkt ist ein Punkt des äusseren ges des unteren Scheitels. In diesem Falle ergiebt sich:

$$\left.\begin{array}{lll} +A^0A > -A^0A', & \text{nämlich:} & +27a > -27q, \\ A^0A + A^0A' = AA', & \text{„} & 27(a+q) = 27r, \\ -AC = -A'M - BC, & \text{„} & (3y) = -c-p, \end{array}\right\}$$ Taf. VII. Fig. 32. un

und

$$\left.\begin{array}{l} -AC' = -A'M + BC' \\ -AC'' = -A'M + BC'' \end{array}\right\}, \text{ nämlich: } (3y) = -c+p,$$ Taf. VII. F

5) Es liegt die natürliche Abscissenaxe unterhalb un wirkliche Abscissenaxe oberhalb der Horizontalaxe des M punktes. Man hat in diesem Falle:

$$\left.\begin{array}{lll} -A^0A < -A^0A', & \text{nämlich:} & -27a < -27q, \\ A^0A - A^0A' = AA', & \text{„} & 27(a-q) = 27r, \\ +AC = -A'M + CB, & \text{„} & (3y) = -c+p, \end{array}\right\}$$ Taf. VII. Fig. 28. und

und

$$\left.\begin{array}{l} -AC' = -A'M - BC' \\ -AC'' = -A'M - BC'' \end{array}\right\}, \text{ nämlich: } (3y) = -c-p,$$ Taf. VII. Fi

6) Es liegt die natürliche Abscissenaxe unterhalb der lichen und diese unterhalb der Horizontalaxe des Mittelpu und der natürliche Anfangspunkt ist ein Punkt des äus Zweiges des unteren Scheitels. Man erhält:

$$\left.\begin{array}{ll} -A^0A > -A^0A' & \text{nämlich: } -27a > -27q, \\ A^0A' - A^0A = AA', & \text{„} \quad 27(q-a) = 27r, \\ \left.\begin{array}{l} -AC = -A'M - BC, \\ -AC' = -A'M + BC', \\ -AC'' = -A'M + BC'', \end{array}\right\} & \begin{array}{l} (3y) = -c - p, \\ \text{„} \quad \text{„} = - \; + \\ \text{„} = - \; + \end{array} \end{array}\right\} \text{Taf. VIII. Fig. 36.}$$

181.

Ist:

$$0 = \pm a - by + cy^2 + y^3$$

die zu construirende Gleichung, und

$$-27q = -9bc - 2c^3, \qquad [115.]$$

so ist der natürliche Anfangspunkt stets ein Punkt des inneren Zweiges des unteren Scheitels [157. 4)], die natürliche Abscissenaxe schneidet daher stets die beiden Scheitel unterhalb der Horizontalaxe des Mittelpunktes.

Es unterscheiden sich folgende Fälle:

1) Die wirkliche Abscissenaxe liegt unterhalb der natürlichen Abscissenaxe. Man erhält:

$$\left.\begin{array}{ll} +A^0A > -A^0A', & \text{nämlich: } +27a > -27q, \\ A^0A' + A^0A = AA', & \text{„} \quad 27(q+a) = 27r, \\ -AC = -A'M - BC, & \text{„} \quad (3y) = -c - p, \end{array}\right\} \text{Taf. VII. Fig. 34. und 35.}$$

und

$$\left.\begin{array}{l} +AC' = -A'M + BC' \\ +AC'' = -A'M + BC'' \end{array}\right\}, \text{ nämlich: } (3y) = -c + p. \quad \text{Taf. VII. Fig. 35.}$$

2) Die wirkliche Abscissenaxe liegt zwischen der natürlichen und der Horizontalaxe des Mittelpunktes.

Es ergiebt sich:

$$\left.\begin{array}{ll} -A^0A > -A^0A', & \text{nämlich: } -27a > -27q, \\ A^0A' - A^0A = AA', & \text{„} \quad 27(q-a) = 27r, \\ \left.\begin{array}{l} -AC = -A'M - BC, \\ -AC = -A'M + BC', \\ +AC' = -A'M + BC'', \end{array}\right\} & \begin{array}{l} (3y) = -c - p, \\ \text{„} \quad = - \; + \\ \quad = - \; + \end{array} \end{array}\right\} \text{Taf. VIII. Fig. 37.}$$

3) Die wirkliche Abscissenaxe liegt oberhalb der Horizontalaxe des Mittelpunktes. Es ist:

$$\left.\begin{aligned} -A^0A &< -A^0A' & \text{nämlich: } -27a &< -27q, \\ A^0A - A^0A' &= AA', & \text{„} \quad 27(a-q) &= 27r, \\ +AC &= -A'M + BC, & \text{„} \quad (3y) &= -c + p, \end{aligned}\right\} \text{Taf. VIII. Fig. 38. und 39.}$$

und

$$\left.\begin{aligned} -AC' &= -A'M - BC' \\ -AC'' &= -A'M - BC'' \end{aligned}\right\}, \text{ nämlich: } (3y) = -c - p. \text{ Taf. VIII. Fig. 39.}$$

182.

Ist:

$$0 = a \pm by - cy^2 + y^3 \qquad [116.\ 117.]$$

die zu construirende Gleichung, so ergiebt sich hierfür ganz dieselbe Betrachtungsweise, wie in [180. und 181.], wenn man, nach [158. 3)], der Constructions-Ebene eine entgegengesetzte Lage ertheilt, also hierdurch die behandelten Grössen in die entgegengesetzten verwandelt.

183.

Es folgt hieraus, dass man die reellen Wurzeln der Gleichung [174. 3)], $c^2 > 3b$ vorausgesetzt, oder der Gleichung:

$$1) \qquad 0 = a + by + cy^2 + y^3,$$

für jeden positiven oder negativen Werth der Coefficienten a, b, c leicht bestimmen könne, wenn man aus Gleichung [179.] für jeden Werth von $27r$ die zugehörige Wurzel:

$$2) \qquad 3x = BC,\ (BC',\ BC'') = p$$

zu bestimmen im Stande sei. Nimmt man nun den Massstab der Abscissen dieser Gleichung [179.] $\sqrt{3c^2 - 9b}$ mal, und den ihrer Ordinaten $(\sqrt{3c^2 - 9b})^3$ mal kleiner [159. 3)]; so geht dieselbe über in:

$$3) \quad 0 = \pm \frac{27r}{(3c^2 - 9b)^{\frac{3}{2}}} - \left[\frac{3x}{(3c^2 - 9b)^{\frac{1}{2}}}\right] + \left[\frac{3x}{(3c^2 - 9b)^{\frac{1}{2}}}\right]^3,$$

also in die Zahlengleichung:

$$4) \qquad \mp R = -P + P^3. \qquad [111.\ \text{IV.}]$$

184.

diese Zahlengleichung ist, Taf. VIII. Fig. 44.:

$$b = -1, \text{ und } c = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} K'C^{IV} &= K''C''' = \tfrac{4}{3}\sqrt{3}, \\ K'C''' &= K''C^{IV} = \tfrac{4}{9}\sqrt{3}, \end{aligned}\right\} \qquad [142.\ 18)]$$

hin ist:

$$K'C^{IV} : K'C''' = 3 : 1,$$

ist die Höhe des Scheitel-Rechteckes gleich ⅓ seiner
ıie.

wir die Abscissen der Zahlengleichung [183. 4)] von dem
ınkte aus zu nehmen haben [152. 4)]; so ist die Höhe
neren Scheitelzweiges zugleich die grösste Ordinate, und
bt sich daher als ein grösster Werth von R:

$$S'W' = S''W'' = \tfrac{2}{9}\sqrt{3}, \quad [152.\ 6)\ \text{u.}\ 112.\ 1)]$$

zugehörige Werth von P:

$$MW' = MW'' = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}. \quad [152.\ 5)\ \text{u.}\ 112.\ 2)]$$

$$P = MM'(MM'')$$

zugehörige Werth von R gleich Null, und daher ergiebt
s [140. 3)]:

$$P = 1.$$

$$R = C'''E' = C^{IV}E'' = S'W'$$

$$P = ME' = ME'' = \tfrac{1}{2}K'C^{IV} = \tfrac{2}{3}\sqrt{3},$$

$$C^{IV}N'' = C'''N' = \tfrac{2}{3}\sqrt{3} - 1.$$

185.

· haben bei den geometrischen Untersuchungen bisher stets
urzel als eine einnamige Grösse betrachtet und wollen
r die geometrische Bedeutung der zweitheiligen Wurzel-
ıer Erörterung unterwerfen und dabei vorläufig wieder:

$$c^2 > 3b$$

voraussetzen.

Schneidet die Abscissenaxe AX, Taf. VIII. Fig. 43., di
tel der cubischen Linie in den Punkten C, C', C'', und se

$$\left.\begin{array}{lll} 1) & -AC & = -w, \\ 2) & -AC' & = -\mathfrak{a} + \alpha, \\ 3) & -AC'' & = -\mathfrak{a} - \alpha, \end{array}\right\}$$

so folgt:

$$4) \quad -\mathfrak{a} = -\frac{AC'' + AC'}{2} = -A\mathfrak{C},$$

$$5) \quad \pm\alpha = \pm\frac{AC'' - AC'}{2} = \left\{\begin{array}{l} +C'\mathfrak{C}, \\ -C''\mathfrak{C}. \end{array}\right.$$

Nun ist:

$$6) \quad -AB = -A'M = -\tfrac{1}{3}c, \qquad [13$$

und als Summe der drei Wurzeln ist:

$$7) \quad -AC - AC' - AC'' = -c,$$

daher:

$$8) \quad -3AB = -AC - AC' - AC'',$$

also:

$$9) \quad -\frac{3AB - AC}{2} = -\frac{AC'' + AC'}{2} = -A\mathfrak{C} = -\mathfrak{a}.$$

Bezeichnet demnach:

$$10) \quad -AC(, -AC', -AC'') = -w$$

die erste Wurzel, so bezeichnet:

$$11) \quad -A\mathfrak{C}(, -A\mathfrak{C}', -A\mathfrak{C}'') = -\mathfrak{a}$$

den ersten Theil der beiden andern Wurzeln, und dei
$\mathfrak{C}(, \mathfrak{C}', \mathfrak{C}'')$ ergiebt sich als Halbirungspunkt der En
$C'C''(, C''C, C'C)$ der betreffenden Schneidungspunkte d
schen Linie mit der Abscissenaxe AX.

Denkt man sich nun

12) Die Entfernung $A'''A^{IV}$ der Scheitel-Tangenten
beliebige Anzahl (gleicher) Theile eingetheilt, und durch di

lungspunkte Parallelen [illegible] jedesmalige Entfernung [illegible] birungspunkte € € € [illegible] bunden: so [illegible] die [illegible] Curve [illegible] andern Wurzeln.

Ebenso [illegible]

[illegible]

Punktes [illegible] der Abscissen[illegible] der beiden [illegible] Wurzeln.

[illegible]

Ihrer Natur [illegible] selbst eine [illegible] Linie [illegible] punkte, [illegible] ten der [illegible]

Ihrer Eigenschaft [illegible] Curve der S[illegible]

Die Höhen [illegible] Linien sind daher [illegible] genommen. [illegible] zweige der ursprünglichen [illegible] Linie [illegible] wie die ihrer Halb[illegible] der Scheitel. Für [illegible] sich daher alsbald:

1) $z = + \sqrt{c^2 - 3b(2x) - (2x)^2}$ [illegible]

als Mittelpunktsgleichung. (140 [illegible])

2) $z = -(c^2 - 3b(2x)) \mp 2\sqrt{(c^2 - 3b(2x))^2 - (2x)^3}$ [illegible]

als Gleichung des (Anfangspunktes S' / Endpunktes S'') der Scheitel. (143 [illegible])

3) $z = -\frac{1}{3}(3c^2 - 9b(2x)) \mp \sqrt{(3c^2 - 9b(2x))^2 - (2x)^3}$ [illegible]

als Gleichung des (Anfangspunktes M' / Endpunktes M'') des horizontalen Durchmessers. (144. [illegible])

$$4)\qquad z = \pm\sqrt{c^2-3b}\,.\,(2x)^2-(2x)^3,$$

als Gleichung des $\binom{\text{unteren}}{\text{oberen}}$ Scheitelpunktes $\binom{S''}{S'}$. [145. 4)]

187.

Mit Hülfe jeder dieser Gleichungen lassen sich die Zweige der Halbirungscurve der Scheitel, über ihren Anfangs- und Endpunkt hinaus, leicht fortsetzen, und es ergiebt sich:

1) dass für jede mit der Abscissenaxe parallellaufende Linie $C^V\mathfrak{C}^V$, Taf. IX. Fig. 46., die Entfernung ihres Durchschnittspunktes C^V mit der cubischen Linie von der Vertikalaxe des Mittelpunktes doppelt so gross sei, wie die Entfernung ihres Durchschnittspunktes $\mathfrak{C}^V$ mit der Halbirungscurve der Scheitel von der Vertikalaxe des Mittelpunktes.

Es ist nämlich für jeden Punkt $\mathfrak{C}^V$ der Halbirungscurve der Scheitel:

$$2)\qquad B^V\mathfrak{C}^V = \frac{B^VC^V}{2}.$$

Hat man die Halbirungscurve über die Scheitel hinaus construirt, so bezeichnet

3) die Entfernung $C^V\mathfrak{C}^V$ eines jeden Punktes $\mathfrak{C}^V$ derselben von der Ordinatenaxe den reellen Theil $-\alpha$ der beiden imaginären Wurzeln [3. II.].

Denkt man sich, Taf. IX, Fig. 46., für $c^2 > 4b$,

4) die Halbirungscurve der Scheitel so weit fortgesetzt, bis sie die Ordinatenaxe schneidet, so wird:

$$B\mathfrak{A}^0 = \tfrac{2}{3}c,$$

$$\underline{BA_0 = \tfrac{1}{3}c}$$

daher $\qquad \mathfrak{A}^0A_0 = c,$

und es ist in diesem Falle der reelle Theil $-\alpha$ der beiden imaginären Wurzeln gleich Null, nämlich:

$$A_0 = 0.$$

Denkt man sich

5) Die Halbirungscurve der Scheitel über ihren Schneidungspunkt A_0 mit der Ordinatenaxe weiter fortgesetzt, so werden die Entfernungen $A^V\mathfrak{C}^V$ ihrer Punkte $\mathfrak{C}^V$ von der Ordinatenaxe eine

entgegengesetzte Lage haben, d. h. es wird der erste Theil der beiden imaginären Wurzeln positiv.

188.

Wählt man, Taf. VIII. Fig. 45., den oberen Scheitelpunkt S'' als Anfangspunkt der Coordinaten, also die obere Scheitel-Tangente als Abscissenaxe, und setzt ein beliebiges Stück derselben:

1) $$-\mathfrak{M}S'' = -u,$$

fällt durch den Endpunkt $\mathfrak{M}$ desselben eine Senkrechte $\mathfrak{C}\mathfrak{M}$, welche die Halbirungscurve der Scheitel in dem Punkte $\mathfrak{C}$ schneidet, und zieht durch diesen Schneidungspunkt eine Parallele $A\mathfrak{C}$ zur Abscissenaxe; so ist das Stück $\mathfrak{C}W$ dieser Parallelen, welches zwischen der Halbirungscurve und der Verlängerung $S''W$ der Höhe des oberen Scheitels liegt, nämlich:

2) $$-\mathfrak{C}W = -\mathfrak{M}S'' = -u.$$

Nun ist:

3) $$-A\mathfrak{C} = -\mathfrak{C}W - AW = -\mathfrak{C}W - A'''S'',$$

oder:

4) $$+\mathfrak{a} = +u + \tfrac{1}{3}c + \tfrac{1}{3}\sqrt{c^2 - 3b}. \qquad [138.\ 1)]$$

Substituiren wir diesen Werth von $\mathfrak{a}$ in die Grösse unter dem Wurzelzeichen der Forméel [8. 1)], so erhalten wir:

5) $$2\mathfrak{a}c - 3\mathfrak{a}^2 - b = -3u^2 - 2u\sqrt{c^2 - 3b} = \alpha^2,$$

nämlich:

6) $$\pm\alpha\sqrt{-1} = \pm\sqrt{3u^2 + 2u\sqrt{c^2 - 3b}}\,.\sqrt{-1}.$$

Es bezeichnet also dieser Ausdruck den zweiten oder imaginären Theil der beiden imaginären Wurzeln.

Es folgt für

$$\mathfrak{a} = 0, \quad \text{oder} \quad u = \tfrac{1}{3}c - \tfrac{1}{3}\sqrt{c^2 - 3b},$$

wird:

7) $$\alpha^2 = -b.$$

189.

Bildet man sich ein, es bezeichne, Taf. VIII. Fig. 45.,

1) $\left.\begin{matrix}+\mathfrak{C}J\\ -\mathfrak{C}\mathfrak{J}\end{matrix}\right\}$ diese imaginäre Grösse $\pm\alpha\sqrt{-1}$, [188. 6)]

so ist:

2) $\left.\begin{matrix}+JW\\ -\mathfrak{J}W\end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{3u^2+2u\sqrt{c^2-3b}}.\sqrt{-1}-u,$

und es entspricht dem Punkte $\mathfrak{C}$ die Gleichung:

3) $z = -(c^2-3b)(2u)+2\sqrt{c^2-3b}.(2u)^2-(2u)^3,$ [186. 2)]

in welchem Ausdrucke u einen negativen Werth bezeichnet.

Schreibt man nun in der Gleichung des oberen Scheitelpunktes S'', nämlich in:

4) $z = -\sqrt{c^2-3b}.x^2+x^3,$ [145. 4)]

5) $\pm\sqrt{3u^2+2u\sqrt{c^2-3b}}.\sqrt{-1}-u$ anstatt x,

so ergiebt sich als Gleichung für den Punkt $\mathfrak{C}$:

6) $z = +(c^2-3b)(2u)+2\sqrt{c^2-3b}.(2u)^2+(2u)^3,$

in welchem Ausdrucke u einen positiven, also entgegengesetzten, Werth bezeichnet.

Hieraus folgt:

7) dass sich über den Scheitelpunkt S'' des oberen Scheitels dessen $\begin{pmatrix}\text{äusserer}\\ \text{innerer}\end{pmatrix}$ Zweig als $\begin{pmatrix}\text{innerer}\\ \text{äusserer}\end{pmatrix}$ Ast imaginär fortsetze.

Analog findet sich:

8) dass sich auch unter den Scheitelpunkt S' des unteren Scheitels dessen $\begin{pmatrix}\text{äusserer}\\ \text{innerer}\end{pmatrix}$ Zweig als $\begin{pmatrix}\text{innerer}\\ \text{äusserer}\end{pmatrix}$ Ast imaginär fortsetze, sowie:

9) dass diese Aeste einander congruent seien.

190.

Zur Versinnlichung dieser imaginären Aeste kann man sich vorstellen, es seien die, dem Punkte $\mathfrak{C}$ entsprechenden, entgegengesetzten Werthe $\mathfrak{C}J$ und $\mathfrak{C}\mathfrak{J}$, oberhalb und unterhalb der Constructionsebene, in dem Punkte $\mathfrak{C}$ errichteten Senkrechten, deren Horizontal-Projection der Punkt $\mathfrak{C}$ selbst sei, und es bezeichne die durch den Punkt $\mathfrak{C}$ gelegte, mit der Abscissenaxe

parallellaufende Gerade $C\mathfrak{C}$ die Trace einer in dieser Geraden auf die Constructionsebene senkrecht errichteten Ebene.

Denkt man sich die, in dieser Ebene liegenden und in eine einzige Gerade zusammenfallenden Senkrechten, $\mathfrak{C}J$ und $\mathfrak{C}\mathfrak{J}$, in die Trace umgelegt, d. h. den Ausdruck [188. 6)] von seinem imaginären Faktor $\sqrt{-1}$ befreit, so ziehen wir zur Versinnlichung der imaginären Aeste nur den Werth von

$$1) \qquad \pm\alpha = \pm\sqrt{3u^2 + 2u\sqrt{c^2 - 3b}}$$

in Betracht.

Theilt man nun die obere Scheitel-Tangente $A'''S''$ von dem Anfangspunkte der Coordinaten S'' aus, nach der negativen Seite hin, in Abscissen: u, $2u$, $3u$, ... nu ab, errichtet in den Theilungspunkten die senkrechten Ordinaten zur Halbirungscurve der Scheitel, und zieht durch die Endpunkte dieser Ordinaten Parallelen zur Abscissenaxe, so erhält man die bezüglichen Werthe von α, wenn man in 1) u, $2u$, $3u$, ... nu für u substituirt.

Diese so erhaltenen Werthe sind dann von dem Endpunkte der bezüglichen Ordinaten rechts und links abzutragen und die so erhaltenen Endpunkte durch eine stetige krumme Linie mit einander zu verbinden, wodurch sich die oberen imaginären Aeste versinnlichen.

In analoger Weise ist zur Versinnlichung der unteren imaginären Aeste zu verfahren.

191.

Es ist die Zweckmässigkeit einleuchtend, den Werth von u möglichst klein zu wählen.

Setzt man u gleich dem $m$ten Theile der Grundlinie eines Scheitelzweiges der ursprünglichen cubischen Linie, nämlich:

$$1) \qquad nu = \frac{n}{m} \cdot \tfrac{1}{3}\sqrt{c^2 - 3b},$$

so ergiebt sich:

$$2) \qquad \left.\begin{matrix} +\mathfrak{C}J \\ -\mathfrak{C}\mathfrak{J} \end{matrix}\right\} = \pm\alpha = \pm\frac{1}{m}\sqrt{\tfrac{1}{3}(c^2 - 3b)n(n + 2m)},$$

und als zugehörige Ordinate:

$$3) \qquad \mathfrak{C}N = \frac{2n}{3m} \cdot \left(\frac{3m + 2n}{3m}\right)^2 (c^2 - 3b)\sqrt{c^2 - 3b}.$$

192.

Ist:

1) $$c^2 = 3b,$$

also der Parameter gleich Null, so geben die Gleichungen 4), 143. 6), 144. 5), 145. 4)] sämmtlich über in:

2) $$z = + x^3.$$

Da sich hierfür die Scheitelpunkte S' und S'' in dem Mittelp *M* vereinigen, so kann man sich auch vorstellen, es sei die struirte Linie dieser Gleichung aus zwei äusseren Aesten in i gemeinschaftlichen Scheitelpunkte zusammengesetzt.

Die Gleichungen der Halbirungscurve der Scheitel [18 —4)] gehen sämmtlich über in:

3) $$z = -(2x)^3,$$

und es folgt, wie [187. 2)]:

4) $$B^V \mathfrak{C}^V = \frac{B^V C^V}{2};$$

es ist die Halbirungscurve der Scheitel daher leicht zu constru

193.

Ist nun die gegebene Gleichung:

1) $$0 = + a + \frac{c^2}{3} \cdot y + cy^2 + y^3,$$ [9.

so liegt die wirkliche Abscissenaxe AX ihrer construirten C Taf. IX. Fig. 47., unterhalb der natürlichen Abscissenaxe [133. 4)], und wir haben:

2) $$y = - AC = - AB - BC = - \tfrac{1}{3}c - x,$$

3) $$z = CN = + A^0A - A^0A' = a - \frac{c^3}{27},$$ [147. I

also ist:

4) $$BC = x = \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{27a - c^3},$$ [192.

welche Darstellung die geometrische Bedeutung der reellen zel der Gleichung [9. 8)] in ihrer zweitheiligen Form nachw

Auf analoge Weise, oder nach [192. 4)] ergiebt sich:

5) $$B\mathfrak{C} = \tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{6}\sqrt[3]{27a - c^3},$$

und es folgt alsbald als erster Theil der beiden andern Wurzeln:

6) $$-\alpha = -A\mathfrak{C} = -AB + B\mathfrak{C} = -\tfrac{1}{3}c + \tfrac{1}{6}\sqrt[3]{27a - c^3}.$$

Aus [188. 6)] ergiebt sich dann, wenn wir $\frac{1}{2}x$ für u schreiben:

7) $$\alpha\sqrt{-1} = \tfrac{1}{2}x\sqrt{3}.\sqrt{-1},$$

oder:

8) $$\pm\alpha\sqrt{-1} = \pm\tfrac{1}{6}\sqrt[3]{27a - c^3}.\sqrt{-3}.$$

Zur Versinnlichung der imaginären Aeste erhalten wir daher:

9) $$\mathfrak{C}J = \mathfrak{C}\mathfrak{J} = B\mathfrak{C}.\sqrt{3},$$

und sind die imaginären Aeste hiernach leicht zu construiren.

194.

Ist:

1) $$c^2 < 3b,$$

also der Parameter negativ, so geht die Gleichung [140. 4)] über in:

2) $$z = \tfrac{1}{3}(3b - c^2).x + x^3.$$

Da die construirte Curve dieser Gleichung nicht mit Scheiteln versehen ist, so kann man sich vorstellen es sei dieselbe gleichsam aus zwei Aesten in den Endpunkten eines und desselben Durchmessers einer mit Scheiteln versehenen cubischen Linie zusammengesetzt [149. 10)].

Die Gleichung der Halbirungscurve der Scheitel, (deren Benennung wir beibehalten wollen) ergiebt sich, nach [186. 1)]:

3) $$z = -\tfrac{1}{3}(3b - c^2)(2x) - (2x)^3,$$

und es folgt wieder:

4) $$B^V\mathfrak{C}^V = \frac{B^V C^V}{2}.$$

195.

Ist, Taf. IX. Fig. 48., die mit accentuirten C bezeichnete Curve die cubische Linie der Gleichung:

1) $$z = bx + cx^2 + x^3,$$

und die mit accentuirten 𝔈 bezeichnete, die zugehörige Halt curve der Scheitel, so ist, fällt man von irgend einem P der Halbirungscurve eine Senkrechte 𝔈𝔐 auf die Horizo des Mittelpunktes:

2) $$-M\mathfrak{M} = -B\mathfrak{C} = -u,$$

3) $$-A\mathfrak{C} = -B\mathfrak{C} - AB,$$

oder:

4) $$\mathfrak{a} = +u + \tfrac{1}{3}c.$$

Substituiren wir diesen Werth von $\mathfrak{a}$ in die Grösse unt Wurzelzeichen der Formel [8. 1)], so erhalten wir:

5) $$2\mathfrak{a}c - 3\mathfrak{a}^2 - b = -3u^2 - \tfrac{1}{3}(3b - c^2) = \alpha^2,$$

nämlich:

6) $$\pm\alpha\sqrt{-1} = \pm\sqrt{3u^2 + \tfrac{1}{3}(3b - c^2)}\,.\sqrt{-1},$$

oder, $\frac{n}{m}$ für u geschrieben:

7) $$\pm\alpha = \pm\frac{1}{m}\sqrt{3n^2 + \tfrac{1}{3}(3b - c^2)m^2}.$$

Es bezeichnet also 6) den imaginären Theil der beide ginären Wurzeln.

196.

Wenn wir die Gleichung:

1) $$0 = -(bc - a) + (b + c^2).\mathfrak{B} - 2c.\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{B}^3 \quad [1.$$

in Betracht ziehen, und in [140. 13)] $-2c$ für c, und $+($ für b schreiben, so erhalten wir als Parameter dieser Gleicl wieder:

2) $$c^2 - 3b.$$

Mithin ist ihre cubische Linie identisch mit der const Gleichung:

3) $$0 = a + by + cy^2 + y^3,$$

und beide unterscheiden sich nur in der verschiedenen Lag natürlichen und wirklichen Anfangspunkte und Abscissenax

Wegen des $\begin{pmatrix}\text{positiven}\\ \text{negativen}\end{pmatrix}$ Vorzeichens des quadratischen Gliedes liegt die natürliche Abscissenaxe der construirten Gleichung $\begin{pmatrix}\text{3) oberhalb}\\ \text{1) unterhalb}\end{pmatrix}$ der $\begin{pmatrix}\text{oberen}\\ \text{unteren}\end{pmatrix}$ Scheitel-Tangente, wenn $c^2 < 4b$, dagegen liegt die natürliche Abscissenaxe zwischen der $\begin{pmatrix}\text{oberen}\\ \text{unteren}\end{pmatrix}$ Scheitel-Tangente und der Horizontalaxe des Mittelpunktes wenn $c^2 \begin{Bmatrix} > 4b \\ < \frac{9}{2}b \end{Bmatrix}$, und sie liegt zwischen der $\begin{pmatrix}\text{unteren}\\ \text{oberen}\end{pmatrix}$ Scheitel-Tangente und der Horizontalaxe des Mittelpunktes, wenn $c^2 > \frac{9}{8}b$ ist [157. 1)—3)].

197.

Ist, Taf. IX. Fig. 46.,

1) $$c^2 < 4b,$$

so ist:

2) $$A^0A' = +q = \frac{9bc - 2c^3}{27}; \qquad [139.\ 1)]$$

dagegen ergiebt sich wenn man in derselben Formel $-2c$ für $+c$, und $+(b + c^2)$ für $+b$ schreibt:

3) $$\mathfrak{A}^0\mathfrak{A}' = -\mathfrak{q} = -\frac{18bc + 2c^3}{27},$$

als Entfernung der bezüglichen natürlichen Abscissenaxen von der Horizontalaxe des Mittelpunktes.

Beide Abscissenaxen sind demnach um die Grösse:

4) $$A^0A' + \mathfrak{A}^0\mathfrak{A}' = q + \mathfrak{q} = bc$$

von einander entfernt.

In gleicher Weise ergiebt sich:

5) $$-A'M = \tfrac{1}{3}c, \qquad [139.\ 4)]$$

6) $$+\mathfrak{A}'M = -\tfrac{1}{3}(-2c) = +\tfrac{2}{3}c,$$

daher ist die Summe beider Entfernungen:

7) $$+A'M + \mathfrak{A}'M = \mathfrak{A}'A' = +c,$$

und es ergiebt sich daher als Entfernung beider Ordinatenaxen von dem Mittelpunkte:

8) $$\mathfrak{A}'M = 2A'M.$$

Ist nun für Gleichung [196. 3)] die Ordinate des wirklichen Anfangspunktes A gleich $+a$, so liegt die wirkliche Abscissenaxe um diese Grösse A^0A unter dem natürlichen Anfangspunkte A^0.

Nun ist für Gleichung [196. 1)] die Ordinate des Anfangspunktes, nämlich:

9) $$\mathfrak{A}^0\mathfrak{A} = -(bc-a),$$

d. h. sie liegt um diese Grösse über dem natürlichen Anfangspunkt $\mathfrak{A}^0$. Da nun:

10) $$(bc-a)+a = bc = q+\mathfrak{q} = \mathfrak{A}^0\mathfrak{A}_0 = A^0A_0$$

ist, so folgt, dass die wirklichen Abscissenaxen beider cubischen Linien eine einzige gerade Linie $\mathfrak{A}A$ bilden. Es ist daher, nach 7):

11) $$\mathfrak{A}A = c = +AC + AC' + AC'', \qquad [186. 7)]$$

daher:

12) $$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{A}C'' = \mathfrak{A}A - AC'' = AC + AC' = \overset{1}{w} + \overset{2}{w}, \\ \mathfrak{A}C' = \mathfrak{A}A - AC' = AC + AC'' = \overset{1}{w} + \overset{3}{w}, \\ \mathfrak{A}C = \mathfrak{A}A - AC = AC' + AC'' = \overset{2}{w} + \overset{3}{w}, \end{array}\right\} \qquad [2.]$$

198.

Ist:

1) $$bc = a,$$

d. h. fällt die wirkliche Abscissenaxe mit der natürlichen zusammen, so bezeichnet:

2) $$\mathfrak{A}^0A_0 = -c$$

die reelle Wurzel der Gleichung:

3) $$0 = bc + by + cy^2 + y^3$$

und:

4) $$\mathfrak{A}^0 = 0,$$

die reelle Wurzel der Gleichung [196. 1)].

Für diesen Fall ist der reelle Theil der beiden imaginären Wurzeln gleich Null [187. 4)] und der imaginäre Theil, nach [188. 7)]:

5) $$\pm \alpha \sqrt{-1} = \pm \sqrt{-b}.$$ [7.]

199.

Ist [6.]

$$bc < a,$$

so liegt die wirkliche Abscissenaxe unterhalb der natürlichen $\mathfrak{A}^0 A_0$, und der reelle Theil der beiden imaginären Wurzeln ist positiv [187. 5)].

200.

Nähert sich die Ordinatenaxe $A^0 A_0$ dem Scheitel-Rechtecke, also der natürliche Anfangspunkt A^0 dem Anfangspunkte C''' der Scheitel, so nähert sich zugleich auch die Ordinatenaxe $\mathfrak{A}^0 \mathfrak{A}_0$ demselben, also der Anfangspunkt $\mathfrak{A}^0$ dem Endpunkte C^{IV} der Scheitel. Beide Verrückungen der Axen finden jedoch nach Massgabe der Bedingung [197. 8)] statt.

Fällt der natürliche Anfangspunkt A^0 mit dem Anfangspunkt C''' der Scheitel zusammen, so ist die Entfernung der Ordinatenaxe $\mathfrak{A}^0 \mathfrak{A}_0$ von dem Mittelpunkte, nämlich:

1) $$\mathfrak{A}' M' = \tfrac{2}{3} \sqrt{c^2 - 3b}.$$

Ist der natürliche Anfangspunkt A^0 ein Punkt des äusseren Zweiges des unteren Scheitels, so ist die Entfernung

2) $$\mathfrak{A}' M' < \tfrac{2}{3} \sqrt{c^2 - 3b}.$$

Schneidet in diesem Falle die wirkliche Abscissenaxe die Scheitel und liegt sie zugleich oberhalb der natürlichen, d. h. ist das von der Unbekannten unabhängige Glied negativ [18. 1)]; so ist eine reelle Wurzel positiv, und die beiden andern sind negativ, die drei reellen, auf die Ordinatenaxe $\mathfrak{A}^0 \mathfrak{A}_0$ bezüglichen Wurzeln aber sind positiv.

Schneidet die Ordinatenaxe $A^0 A_0$ die cubische Linie in dem unteren Scheitelpunkte S' so schneidet sie die Ordinatenaxe $\mathfrak{A}^0 \mathfrak{A}_0$ in dem Endpunkte C^{IV} der Scheitel.

Schneidet die Ordinatenaxe $A^0 A_0$ den inneren Zweig des unteren Scheitels, so schneidet die Ordinatenaxe $\mathfrak{A}^0 \mathfrak{A}_0$ die obere Scheitellinie. Schneidet hierbei zugleich die wirkliche Abscissenaxe die Scheitel unterhalb der natürlichen, ist also die Ordinate des wirklichen Anfangspunktes positiv [21.]; so sind zwei

reelle Wurzeln positiv und die dritte ist negativ, und dasselbe ist für die drei auf die Ordinatenaxe $\mathfrak{A}^0\mathfrak{A}_0$ bezüglichen reellen Wurzeln der Fall [23.].

Schneidet aber hierbei die wirkliche Abscissenaxe die Scheitel oberhalb der natürlichen, ist also die Ordinate des wirklichen Anfangspunktes negativ [25.]; so ist eine reelle Wurzel positiv und die beiden andern sind negativ. Von den drei auf die Ordinatenaxe $\mathfrak{A}^0\mathfrak{A}_0$ bezüglichen Wurzeln aber sind entweder zwei positiv und eine negativ, oder sie sind sämmtlich positiv, u. s. w.

Wir überlassen dem Leser die Fortsetzung dieser Betrachtungen, so wie die Fortsetzung der geometrischen Untersuchungen auf die in dieser Abtheilung nicht behandelten Formeln der vorhergehenden Abtheilungen.

XXV.

Der pythagoräische Lehrsatz in der Sphärik.

Von

Herrn *Jos. Eilles*

in München.

In Schulz's Sphärik Bd. II. p. 114 findet sich folgender Satz bewiesen:

„Wenn man in einem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke auf die Hypotenuse ein Perpendikel fällt, so ist die trigonometrische Tangente jeder Kathete die mittlere geometrische Proportionale zwischen der trigonometrischen Tangente der ganzen Hypotenuse und der trigonometrischen Tangente jenes Abschnittes der Hypotenuse, der an der Kathete anliegt."

Ich legte mir die Frage vor, ob es nicht ein Analogon des pythagoräischen Lehrsatzes für sphärische rechtwinklige Dreiecke

gäbe, und fand solches auf ähnliche Weise, wie sich der pythagoräische Lehrsatz aus der ähnlichen Eigenschaft ebener rechtwinkliger Dreiecke ableiten lässt.

Bezeichnet man die Hypotenuse mit c, die Katheten mit a und b, und die ihnen anliegenden Abschnitte der Hypotenuse bezüglich mit a' und b', so ist dem erwähnten Satze zufolge:

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{tg}^2 a = \operatorname{tg} c . \operatorname{tg} a' \\ \operatorname{tg}^2 b = \operatorname{tg} c . \operatorname{tg} b'\end{array}\right\}, \qquad (1)$$

I. Sind die an der Hypotenuse anliegenden Winkel gleichartig, so ist:

$$a' + b' = c.$$

Addirt man nun die Gleichungen (1), so wird:

$$\operatorname{tg}^2 a + \operatorname{tg}^2 b = \operatorname{tg} c . (\operatorname{tg} a' + \operatorname{tg} b'). \qquad (2)$$

Multiplizirt man die Gleichungen (1) und subtrahirt das Produkt von $\operatorname{tg}^2 c$, so wird:

$$\operatorname{tg}^2 c - \operatorname{tg}^2 a . \operatorname{tg}^2 b = \operatorname{tg}^2 c . (1 - \operatorname{tg} a' . \operatorname{tg} b'). \qquad (3)$$

Dividirt man die Gleichung (2) durch die Gleichung (3), so wird:

$$\frac{\operatorname{tg}^2 a + \operatorname{tg}^2 b}{\operatorname{tg}^2 c - \operatorname{tg}^2 a . \operatorname{tg}^2 b} = \frac{1}{\operatorname{tg} c} . \operatorname{tg}(a' + b') = 1,$$

woraus:

$$\operatorname{tg}^2 a + \operatorname{tg}^2 b + \operatorname{tg}^2 a . \operatorname{tg}^2 b = \operatorname{tg}^2 c$$

folgt.

II. Sind die der Hypotenuse anliegenden Winkel ungleichartig, ist also $\angle A$ stumpf, dagegen $\angle B$ spitz, so ist:

$$a' - b' = c.$$

Subtrahirt man in diesem Falle die Gleichungen (1), so wird

$$\operatorname{tg}^2 a - \operatorname{tg}^2 b = \operatorname{tg} c . (\operatorname{tg} a' - \operatorname{tg} b'). \qquad (2')$$

Addirt man das Produkt der Gleichungen (1) zu $\operatorname{tg}^2 c$, so wird:

$$\operatorname{tg}^2 c + \operatorname{tg}^2 a . \operatorname{tg}^2 b = \operatorname{tg}^2 c . (1 + \operatorname{tg} a' . \operatorname{tg} b'). \qquad (3')$$

Daher wird durch Division:

$$\frac{\operatorname{tg}^2 a - \operatorname{tg}^2 b}{\operatorname{tg}^2 c + \operatorname{tg}^2 a . \operatorname{tg}^2 b} = \frac{1}{\operatorname{tg} c} . \operatorname{tg}(a' - b') = 1,$$

folglich wird

$$\mathrm{tg}^2 a = \mathrm{tg}^2 c + \mathrm{tg}^2 b + \mathrm{tg}^2 a . \mathrm{tg}^2 b.$$

Es spaltet sich also in der Sphärik der pythagoräische Lehrsatz in die folgenden zwei Sätze:

1) Sind in einem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke die Winkel an der Hypotenuse gleichartig, so ist das Quadrat der trigonometrischen Tangente der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate der trigonometrischen Tangenten der beiden Katheten vermehrt um das Produkt der Quadrate der trigonometrischen Tangenten der Katheten.

2) Sind die an der Hypotenuse anliegenden Winkel ungleichartig, so ist das Quadrat der trigonometrischen Tangente der dem stumpfen Winkel gegenüberliegende Katheten gleich der Summe der Quadrate der trigonometrischen Tangenten der Hypotenuse und der anderen Kathete vermehrt um das Produkt aus den Quadraten der trigonometrischen Tangenten beider Katheten.

Zu bemerken ist, dass ich unter rechtwinkligen sphärischen Dreiecken mit Schulz nur solche verstehe, in denen nur *ein* Winkel ein rechter ist.

Ich glaube, dass dieser Satz wenigstens nicht allgemein bekannt ist, indem er sich sonst ganz gewiss in dem vortrefflichen Werke über Sphärik von Schulz finden würde. Auch möchte es vielleicht möglich sein, mittels dieses Satzes manche Sätze der Planimetrie, die durch den pythagoräischen Lehrsatz erwiesen werden, auf die Sphärik überzutragen; und es wäre in dieser Beziehung wohl wünschenswerth, in der Sphärik ähnliche Erweiterungen des pythagoräischen Lehrsatzes auf andere Dreiecke zu haben, wie man sie in der Planimetrie hat.

XXVI.

Theorie der Aequivalenzen.

Von
dem Herausgeber.

Einleitung.

Jeder Mathematiker kennt die Rolle, welche gegenwärtig die sogenannte laterale Erweiterung des Zahlengebiets in unserer Wissenschaft spielt, und weiss, dass eine gewisse Dunkelheit, von der jedenfalls die von Alters her übliche Darstellungsweise der Lehre von den sogenannten imaginären Grössen nicht freizusprechen ist, einem der grössten Geometer aller Zeiten zu der Einführung dieser lateralen Erweiterung des Zahlengebiets in die Wissenschaft die erste und nächste Veranlassung gegeben hat. Ob nun aber die Lehre von den sogenannten lateralen Zahlen — welche Bezeichnungsweise ich für jetzt absichtlich gebrauchen will —, die zur Ersetzung der imaginären Grössen bestimmt sind, sowohl an sich, als auch mit ihren weiteren Consequenzen in der Functionenlehre und der höheren Mathematik überhaupt, bereits so weit ausgebildet worden ist, dass sie ganz diejenige Klarheit und Bestimmtheit besitzt, welche man namentlich dann nothwendig fordern muss, wenn eine solche neue Lehre in den mathematischen Unterricht ohne Weiteres eingeführt werden soll, ist eine Frage, welche zu beantworten einestheils hier für jetzt überhaupt nicht der Ort ist, und deren Beantwortung anderntheils Erörterungen nothwendig machen würde, an die man, wenn sie erspriesslich sein sollten, doch zuletzt die Forderung einer weiteren Aufklärung und, wo möglich, völlig strengen, keinem weiteren Zweifel Raum lassenden Begründung und Darstellung des ganzen fraglichen Gegenstandes stellen müsste. Ich will hier für jetzt

nur so viel sagen, und halte dies nicht unbemerkt zu lassen für nöthig, dass nach meiner Erfahrung man, vorzugsweise in Deutschland, in Schriften oder auch bei anderen Gelegenheiten von Leuten, die sich Mathematiker nennen, deren mathematische Einsichten aber freilich oft nur noch auf der Oberfläche über einem ziemlich unsicheren Grunde schwimmen oder vielmehr laviren, in gegenwärtiger Zeit gerade über den fraglichen Gegenstand höchst absonderliche Dinge äussern und aussprechen hört, die selbst oft für neue Erfindungen gehalten werden, namentlich aber dann, wenn sie bei dem Unterrichte solcher jungen Leute, die als erste Anfänger in die Pforten der höheren Mathematik einzutreten versuchen, benutzt werden, nur zu deren totaler Verwirrung führen können und müssen, eine Bemerkung, welche man in einer Zeitschrift, die hauptsächlich auch der Förderung des mathematischen Unterrichts gewidmet sein soll, wohl verzeihlich finden wird.

Ich selbst habe über den hier besprochenen Gegenstand, obgleich seit vielen Jahren eifrig mit demselben beschäftigt, bis jetzt gar nichts veröffentlicht, sondern habe mich im Archive auf die Mittheilung fremder, mir gütigst eingesandter Arbeiten über denselben beschränkt, denen ich immer besonders gern einen Platz in dieser Zeitschrift eingeräumt habe, wovon ich auch fernerhin nicht abweichen werde. Die vorher erwähnten Erfahrungen und andere Gründe veranlassen mich aber jetzt, nach und nach, wenn gerade der Raum nicht durch andere, insbesondere fremde Arbeiten in Anspruch genommen wird, die Resultate meiner Arbeiten über den fraglichen Gegenstand im Archive mitzutheilen und meine Ansichten über denselben darin niederzulegen, indem ich jetzt mit der vorliegenden und der an diese in gewisser Rücksicht sich anschliessenden nächst folgenden Abhandlung den Anfang mache, dabei aber sogleich hier ausdrücklich bemerke, dass der Inhalt dieser beiden Abhandlungen zwar nicht unmittelbar die sogenannten lateralen Grössen angeht, aber doch insofern zu denselben in näherer Beziehung steht, weil durch die in der vorliegenden Abhandlung entwickelte Theorie eben auch der Gebrauch der sogenannten, allerdings immer in ein gewisses Dunkel gehüllten imaginären Grössen in völlig strenger Weise ersetzt, und durch die nächst folgende Abhandlung sogleich eine bemerkenswerthe Anwendung dieser Theorie geliefert werden soll.

Unter dem Namen „Quantités géométriques" hat auch Cauchy, dessen Klarheit und unvergleichliche Strenge bei analytischen Untersuchungen wohl schwerlich jemals übertroffen werden wird, mehrere sehr werthvolle Abhandlungen über die unter den

Namen imaginäre, unmögliche oder eingebildete Grössen bekannten alten Freunde der Mathematiker geliefert. Noch vorher aber, jedoch in demselben Bande der so vieles Schöne enthaltenden: „Exercices d'Analyse et de Physique mathématique. Tome IV. Paris. 1847." hat er in der Abhandlung: „Mémoire sur la Théorie des équivalences algébriques, substituée à la Théorie des imaginaires" die Theorie und den Gebrauch der imaginären Grössen durch die „Théorie des équivalences", wofür ich mich im Folgenden des Wortes „Aequivalenzen" bedienen werde, zu ersetzen versucht, und zwar nach meiner Meinung, wenn auch nicht in solcher Allgemeinheit wie durch die „Quantités géométriques", doch in einer so schönen, völlig elementaren und so strengen Weise, dass ich schon seit längerer Zeit dieser bei vielen analytischen Untersuchungen mit dem grössten Nutzen in Anwendung zu bringenden Theorie, die von ihrem berühmten Urheber indess mehr skizzirt als völlig ausgeführt worden ist, meine Aufmerksamkeit gewidmet und dieselbe weiter auszuführen und auszubilden gesucht habe. Es ist meine vollkommene Ueberzeugung, dass diese in ihrer Grundidee und ihren Grundlagen ganz von Cauchy herrührende und ihm allein gehörende Theorie in jeder Beziehung verdient, in die Wissenschaft und namentlich auch in den mathematischen Unterricht eingeführt und aufgenommen zu werden, und ich werde mir daher zunächst erlauben, derselben einige Abhandlungen, deren Anfang diese und die nächst folgende Abhandlung bilden, im Archive zu widmen.

---

§ 1.

Allgemeine Voraussetzung.

Alle im Folgenden vorkommenden Zeichen bedeuten ganze rationale algebraische Functionen einer gewissen Grösse, die wir im Allgemeinen durch i bezeichnen werden, constante Grössen natürlich nicht ausgeschlossen, welche als ganze rationale algebraische Functionen des 0ten Grades von i zu betrachten sind; und wenn im Folgenden von Grössen gesprochen wird, so sollen darunter immer ganze rationale algebraische Functionen von i mit Einschluss constanter Grössen verstanden werden. Die durch i bezeichnete Grösse hat man als eine ganz allgemeine, jedoch völlig bestimmte Grösse aufzufassen, der jeder beliebige bestimmte Werth beigelegt werden kann, so dass also im Folgenden alle

Sätze unabhängig von bestimmten Werthen von i oder für jedes i gültig sind.

---

§ 2.

Erklärung. Zwei Grössen heissen äquivalent oder einander äquivalent, wenn, natürlich in algebraischer Auffassung, ihre Differenz durch $1+i^2$ ohne Rest theilbar ist, oder wenn $1+i^2$ in ihrer Differenz aufgeht; zwei Grössen dagegen, welche nicht in einer solchen Beziehung zu einander stehen, deren Differenz also, natürlich in algebraischer Auffassung, durch $1+i^2$ nicht ohne Rest theilbar ist, oder in deren Differenz $1+i^2$ nicht aufgeht, heissen inäquivalent oder einander inäquivalent.

Dass zwei Grössen äquivalent sind, soll durch das zwischen ihre Symbole gesetzte Zeichen $\succeq$ bezeichnet werden; sind also zwei durch P und Q bezeichnete Grössen äquivalent, so wird dieses Verhalten durch

$$P \succeq Q$$

bezeichnet, ein solcher symbolischer Ausdruck heisst überhaupt eine Aequivalenz, und wird gelesen: „P äquivalent Q".

Dass zwei Grössen inäquivalent sind, soll durch das zwischen ihre Symbole gesetzte Zeichen $\frown$ bezeichnet werden; sind also zwei durch P und Q bezeichnete Grössen inäquivalent, so wird dieses Verhalten durch

$$P \frown Q$$

bezeichnet, ein solcher symbolischer Ausdruck heisst überhaupt eine Inäquivalenz, und wird gelesen: „P inäquivalent Q".

Anmerkung. Man wird hierbei an den Begriff der Zahlencongruenz in der Zahlenlehre und an deren bekanntes Zeichen denken, hat aber zu beachten, dass hier, in der Theorie der Aequivalenzen und Inäquivalenzen, die Auffassungsweise eine durchaus algebraische ist, so dass also keinesweges Beides auf ein und Dasselbe hinauskommt.

§. 3.

Zusätze. 1. Zwei gleiche Grössen sind immer äquivalent, oder aus $P=Q$ folgt immer:

$$P \succeq Q.$$

Denn weil $P = Q$ ist, so ist $P - Q = 0$, also natürlich $P - Q$ durch $1 + i^2$ ohne Rest theilbar, und daher nach §. 2.

$$P \simeq Q,$$

w. z. b. w.

2. Jede Grösse ist also immer sich selbst äquivalent, oder es ist immer:

$$P \simeq P.$$

3. Wenn $P \simeq Q$ ist, so ist immer auch $-P \simeq -Q$.

Denn weil $P \simeq Q$ ist, so ist nach §. 2. die Differenz $P - Q$ durch $1 + i^2$ ohne Rest theilbar; also ist offenbar auch $-(P - Q) = (-P) - (-Q)$ durch $1 + i^2$ ohne Rest theilbar, und daher nach §. 2.

$$-P \simeq -Q,$$

w. z. b. w.

4. Wenn $P \frown Q$ ist, so ist immer auch $-P \frown -Q$.

Denn weil $P \frown Q$ ist, so geht nach §. 2. die Grösse $1 + i^2$ in der Differenz $P - Q$ nicht auf oder diese Differenz ist durch $1 + i^2$ nicht ohne Rest theilbar; also ist offenbar auch $-(P - Q) = (-P) - (-Q)$ durch $1 + i^2$ nicht ohne Rest theilbar, und daher nach § 2.

$$-P \frown -Q,$$

w. z. b. w.

5. Wenn zwischen den von i unabhängigen und insofern also constanten Grössen P und Q die Aequivalenz

$$P \simeq Q$$

Statt findet, so ist

$$P = Q.$$

Wäre nicht $P = Q$, also nicht $P - Q = 0$, so wäre die constante Differenz $P - Q$ durch $1 + i^2$ nicht ohne Rest theilbar, es wäre also nach §. 2.

$$P \frown Q,$$

was gegen die Voraussetzung

$$P \simeq Q$$

streitet; daher ist

$$P=Q,$$

w. z. b. w.

6. Aus der Inäquivalenz

$$P \frown Q$$

folgt immer

$$P \text{ ungleich } Q.$$

Wäre $P=Q$ und also $P-Q=0$, so wäre $P-Q$ durch $1+i^2$ ohne Rest theilbar, also nach §. 2.

$$P \simeq Q,$$

was gegen die Voraussetzung

$$P \frown Q$$

streitet; daher kann nicht $P=Q$, und es muss folglich

$$P \text{ ungleich } Q$$

sein, w. z. b. w.

§. 4.

Lehrsatz. Wenn gleichzeitig

$$P=R+p(1+i^2) \text{ und } Q=R+q(1+i^2)$$

gesetzt werden kann, so ist:

$$P \simeq Q.$$

Beweis. Weil nach der Voraussetzung gleichzeitig

$$P=R+p(1+i^2) \text{ und } Q=R+q(1+i^2)$$

gesetzt werden kann, so ist

$$P-Q=(p-q)(1+i^2),$$

also $P-Q$ durch $1+i^2$ ohne Rest theilbar, und daher nach §. 2.

$$P \simeq Q,$$

w. z. b. w.

§. 5.

Lehrsatz. Wenn niemals gleichzeitig

$$P=R+p(1+i^2) \text{ und } Q=R+q(1+i^2)$$

gesetzt werden kann, so ist

$$P \frown Q.$$

Beweis. Man setze:

$$P = r + p(1 + i^2),$$

wo r den bei der Division von P durch $1 + i^2$ bleibenden Rest und also eine ganze rationale algebraische Function von i bezeichnet, welche höchstens vom 1sten Grade ist. Eben so setze man:

$$Q = r' + q(1 + i^2),$$

wo r' den bei der Division von Q durch $1 + i^2$ bleibenden Rest und also eine ganze rationale algebraische Function von i bezeichnet, welche höchstens vom 1sten Grade ist. Also ist

$$P - Q = r - r' + (p - q)(1 + i^2),$$

und weil nun nach der Voraussetzung niemals gleichzeitig

$$P = R + p(1 + i^2) \text{ und } Q = R + q(1 + i^2)$$

gesetzt werden kann, so können im Vorhergehenden die Grössen r und r' nicht einander gleich sein, und es ist also $r - r'$ eine nicht verschwindende ganze rationale algebraische Function von i, welche höchstens vom 1sten Grade ist, weil nach dem Vorhergehenden r und r' von keinem höheren Grade sind. Wegen der obigen Gleichung:

$$P - Q = r - r' + (p - q)(1 + i^2)$$

ist also die ganze rationale algebraische Function $r - r'$, welche höchstens vom 1sten Grade ist, der bei der Division von $P - Q$ durch $1 + i^2$ bleibende Rest, und da dieser Rest, wie wir so eben sahen, nicht verschwindet; so geht $1 + i^2$ in $P - Q$ nicht auf oder $P - Q$ ist durch $1 + i^2$ nicht ohne Rest theilbar, folglich ist nach §. 2.

$$P \frown Q,$$

w. z. b. w.

§. 6.

Lehrsatz. Wenn $P \succeq Q$ ist, so lässt sich jederzeit gleichzeitig

$$P = R + p(1 + i^2) \text{ und } Q = R + q(1 + i^2)$$

setzen.

Beweis. Liesse sich niemals gleichzeitig

$$P = R + p(1+i^2) \quad \text{und} \quad Q = R + q(1+i^2)$$

setzen, so wäre nach §. 5.

$$P \underline{\frown} Q,$$

was gegen die Voraussetzung

$$P \underline{\smile} Q$$

streitet; also muss sich gleichzeitig

$$P = R + p(1+i^2) \quad \text{und} \quad Q = R + q(1+i^2)$$

setzen lassen, w. z. b. w.

Anmerkung. Man kann hierbei immer annehmen, dass die ganze rationale algebraische Function R von i höchstens vom 1sten Grade sei. Bezeichnen nämlich R und R' die bei der Division von P und Q durch $1+i^2$ bleibenden Reste, so sind die ganzen rationalen algebraischen Functionen R und R' höchstens vom 1sten Grade, und es ist:

$$P = R + p(1+i^2) \quad \text{und} \quad Q = R' + q(1+i^2),$$

also:

$$P - Q = R - R' + (p-q)(1+i^2),$$

folglich, weil $R - R'$ eben so wie R und R' höchstens vom 1sten Grade ist, $R - R'$ der bei der Division von $P - Q$ durch $1+i^2$ bleibende Rest. Verschwände nun dieser Rest nicht, oder wäre nicht $R - R' = 0$ oder nicht $R = R'$, so ginge $1+i^2$ in $P - Q$ nicht auf oder es wäre $P - Q$ nicht durch $1+i^2$ ohne Rest theilbar, es wäre also nach §. 2.:

$$P \underline{\frown} Q,$$

was gegen die Voraussetzung des Lehrsatzes

$$P \underline{\smile} Q$$

streitet. Daher können R und R' nicht ungleich sein, es muss also $R = R'$, folglich nach dem Obigen gleichzeitig

$$P = R + p(1+i^2) \quad \text{und} \quad Q = R + q(1+i^2)$$

sein, wo R der bei der Division von P und Q durch $1+i^2$ bleibende Rest, also eine ganze rationale algebraische Function von i ist, deren Grad den 1sten nicht überschreitet; und dass R immer als eine solche Function angenommen werden könne, war eben das, was oben behauptet wurde.

§. 7.

Lehrsatz. Wenn $P \frown Q$ ist, so lässt sich niemals gleichzeitig

$$P = R + p(1 + i^2) \quad \text{und} \quad Q = R + q(1 + i^2)$$

setzen.

Beweis. Liesse sich gleichzeitig

$$P = R + p(1 + i^2) \quad \text{und} \quad Q = R + q(1 + i^2)$$

setzen, so wäre nach §. 4.

$$P \asymp Q,$$

was gegen die Voraussetzung

$$P \frown Q$$

streitet. Also kann niemals gleichzeitig

$$P = R + p(1 + i^2) \quad \text{und} \quad Q = R + q(1 + i^2)$$

gesetzt werden, w. z. b. w.

§. 8.

Lehrsatz. Wenn

$$P_0 \asymp Q, \quad P_1 \asymp Q$$

ist, so ist:

$$P_0 \asymp P_1.$$

Beweis. Weil nach der Voraussetzung $P_0 \asymp Q$ ist, so lässt sich nach §. 6. gleichzeitig setzen:

$$P_0 = R_0 + p_0(1 + i^2) \quad \text{und} \quad Q = R_0 + q(1 + i^2);$$

und weil nach der Voraussetzung $P_1 \asymp Q$ ist, so lässt sich nach §. 6. gleichzeitig setzen:

$$P_1 = R_1 + p_1(1 + i^2) \quad \text{und} \quad Q = R_1 + q'(1 + i^2).$$

Also ist:

$$P_0 - P_1 = R_0 - R_1 + (p_0 - p_1)(1 + i^2),$$
$$0 = R_0 - R_1 + (q - q')(1 + i^2);$$

folglich durch Subtraction:

$$P_0 - P_1 = \{(p_0 - p_1) - (q - q')\}(1 + i^2),$$

woraus sich ergiebt, dass $P_0 - P_1$ durch $1 + i^2$ ohne Rest theilbar, also nach §. 2.

$$P_0 \succeq P_1$$

ist, w. z. b. w.

§. 9.

Zusatz. Wenn

$$P_0 \succeq Q_0, \quad P_1 \succeq Q_1$$

und

$$Q_0 \succeq Q_1$$

ist, so ist auch:

$$P_0 \succeq P_1.$$

Weil nach der Voraussetzung

$$P_1 \succeq Q_1, \quad Q_0 \succeq Q_1$$

ist, so ist nach §. 8.

$$P_1 \succeq Q_0;$$

und weil nun nach der Voraussetzung auch

$$P_0 \succeq Q_0$$

ist, so ist nach §. 8.

$$P_0 \succeq P_1,$$

w. z. b. w.

§. 10.

Lehrsatz. Wenn

$$P_0 \succeq Q_0, \quad P_1 \succeq Q_1, \quad P_2 \succeq Q_2, \ldots. P_{n-1} \succeq Q_{n-1}$$

ist, so ist:

$$P_0 + P_1 + P_2 + \ldots. + P_{n-1} \succeq Q_0 + Q_1 + Q_2 + \ldots. + Q_{n-1}.$$

Beweis. Wegen der Voraussetzung lässt sich nach §. 6. gleichzeitig setzen:

$$P_0 = R_0 + p_0(1+i^2) \quad \text{und} \quad Q_0 = R_0 + q_0(1+i^2),$$
$$P_1 = R_1 + p_1(1+i^2) \quad \text{,,} \quad Q_1 = R_1 + q_1(1+i^2),$$
$$P_2 = R_2 + p_2(1+i^2) \quad \text{,,} \quad Q_2 = R_2 + q_2(1+i^2),$$

u. s. w.

$$P_{n-1} = R_{n-1} + p_{n-1}(1+i^2) \quad \text{und} \quad Q_{n-1} = R_{n-1} + q_{n-1}(1+i^2);$$

also ist:

$$P_0+P_1+P_2+\ldots.+P_{n-1}$$
$$=R_0+R_1+R_2+\ldots.+R_{n-1}+(p_0+p_1+p_2+\ldots.+p_{n-1})(1+i^2)$$

und

$$Q_0+Q_1+Q_2+\ldots.+Q_{n-1}$$
$$=R_0+R_1+R_2+\ldots.+R_{n-1}+(q_0+q_1+q_2+\ldots.+q_{n-1})(1+i^2),$$

folglich nach §. 4.

$$P_0+P_1+P_2+\ldots.+P_{n-1}\simeq Q_0+Q_1+Q_2+\ldots.+Q_{n-1},$$

w. z. b. w.

§. 11.

Lehrsatz. Wenn

$$P_0\simeq Q_0,\quad P_1\simeq Q_1$$

ist, so ist:

$$P_0-P_1\simeq Q_0-Q_1.$$

Beweis. Wegen der Voraussetzung lässt sich nach §. 6. gleichzeitig setzen:

$$P_0=R_0+p_0(1+i^2) \text{ und } Q_0=R_0+q_0(1+i^2),$$
$$P_1=R_1+p_1(1+i^2) \quad „ \quad Q_1=R_1+q_1(1+i^2);$$

also ist:

$$P_0-P_1=R_0-R_1+(p_0-p_1)(1+i^2),$$
$$Q_0-Q_1=R_0-R_1+(q_0-q_1)(1+i^2);$$

folglich nach §. 4.:

$$P_0-P_1\simeq Q_0-Q_1,$$

w. z. b. w.

§. 12.

Lehrsatz. Wenn

$$P\simeq Q\pm Q_1$$

ist, so ist immer:

$$P\mp Q_1\simeq Q.$$

Beweis. Weil nach der Voraussetzung

$$P\simeq Q\pm Q_1$$

und nach §. 3. 2.

$$Q_1 \simeq Q_1$$

ist; so ist nach §. 11. und §. 10.

$$P \mp Q_1 \simeq Q \pm Q_1 \mp Q_1,$$

also:

$$P \mp Q_1 \simeq Q,$$

w. z. b. w.

§. 13.

Lehrsatz. Wenn

$$P_0 \simeq Q_0, \quad P_1 \simeq Q_1$$

ist, so ist:

$$P_0 P_1 \simeq Q_0 Q_1.$$

Beweis. Wegen der Voraussetzung lässt sich nach §. 6. gleichzeitig setzen:

$$P_0 = R_0 + p_0(1+i^2) \quad \text{und} \quad Q_0 = R_0 + q_0(1+i^2),$$
$$P_1 = R_1 + p_1(1+i^2) \quad \text{,,} \quad Q_1 = R_1 + q_1(1+i^2);$$

also ist:

$$P_0 P_1 = R_0 R_1 + (p_0 R_1 + p_1 R_0)(1+i^2) + p_0 p_1 (1+i^2)^2,$$
$$Q_0 Q_1 = R_0 R_1 + (q_0 R_1 + q_1 R_0)(1+i^2) + q_0 q_1 (1+i^2)^2;$$

und es lässt sich daher gleichzeitig setzen:

$$P_0 P_1 = R_0 R_1 + \{p_0 R_1 + p_1 R_0 + p_0 p_1 (1+i^2)\}(1+i^2),$$
$$Q_0 Q_1 = R_0 R_1 + \{q_0 R_1 + q_1 R_0 + q_0 q_1 (1+i^2)\}(1+i^2);$$

folglich ist nach §. 4.:

$$P_0 P_1 \simeq Q_0 Q_1,$$

w. z. b. w.

Anmerkung. Wenn

$$P_0 \simeq Q_0, \quad P_1 \simeq Q_1$$

ist, so ist natürlich auch:

$$P_0 \simeq Q_0, \quad Q_1 \simeq P_1;$$

also nach dem Lehrsatze:

$$P_0 Q_1 \simeq Q_0 P_1,$$

was hier nur bemerkt wird, weil sich durch diese Aequivalenz die Aequivalenz

$$\frac{P_0}{Q_0} \succeq \frac{P_1}{Q_1},$$

von der natürlich im eigentlichen Sinne keine Rede sein kann, als ersetzt betrachten lässt.

§. 14.

Zusatz. Wenn $P \succeq Q$ ist, so ist

$$\Pi P \succeq \Pi Q.$$

Weil nach der Voraussetzung

$$P \succeq Q$$

und nach §. 3. 2.

$$\Pi \succeq \Pi$$

ist, so ist nach §. 13.

$$\Pi P \succeq \Pi Q,$$

w. z. b. w.

§. 15.

Lehrsatz. Wenn

$$P_0 \succeq Q_0,\ P_1 \succeq Q_1,\ P_2 \succeq Q_2, \ldots . P_{n-1} \succeq Q_{n-1}$$

ist, so ist:

$$P_0 P_1 P_2 \ldots . P_{n-1} \succeq Q_0 Q_1 Q_2 \ldots . Q_{n-1}.$$

Beweis. Weil nach der Voraussetzung

$$P_0 \succeq Q_0,\ P_1 \succeq Q_1$$

ist, so ist nach §. 13.

$$P_0 P_1 \succeq Q_0 Q_1.$$

Hiernach und nach der Voraussetzung ist:

$$P_0 P_1 \succeq Q_0 Q_1,\ P_2 \succeq Q_2;$$

also nach §. 13.

$$P_0 P_1 P_2 \succeq Q_0 Q_1 Q_2.$$

Hiernach und nach der Voraussetzung ist:

$$P_0 P_1 P_2 \succeq Q_0 Q_1 Q_2, \quad P_3 \succeq Q_3;$$

also nach §. 13.

$$P_0 P_1 P_2 P_3 \succeq Q_0 Q_1 Q_2 Q_3.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar, und es i also offenbar allgemein:

$$P_0 P_1 P_2 \ldots . P_{n-1} \succeq Q_0 Q_1 Q_2 \ldots . Q_{n-1},$$

w. z. b. w.

§. 16.

Zusatz. Wenn $P \succeq Q$ ist und m eine positive ganz Zahl bezeichnet, so ist:

$$P^m \succeq Q^m.$$

Nach der Voraussetzung hat man die folgenden Aequivalenz:

$$P \succeq Q, \quad P \succeq Q, \quad P \succeq Q, \ldots . \quad P \succeq Q;$$

deren Anzahl m sein mag; also ist nach §. 15.

$$PPP \ldots . P \succeq QQQ \ldots . Q,$$

folglich, weil die Anzahl der Factoren eines jeden der beiden Producte m ist:

$$P^m \succeq Q^m,$$

w. z. b. w.

§. 17.

Lehrsatz. Wenn

$$P_0 \succeq Q_0, \quad P_1 \frown Q_1$$

ist, so ist:

$$P_0 \pm P_1 \frown Q_0 \pm Q_1$$

und

$$P_1 \pm P_0 \frown Q_1 \pm Q_0.$$

Beweis. Weil nach der Voraussetzung

$$P_0 \succeq Q_0$$

ist, so lässt sich nach §. 6. gleichzeitig setzen:

$$P_0 = R_0 + p_0(1+i^2) \quad \text{und} \quad Q_0 = R_0 + q_0(1+i^2),$$

wobei sich nach §. 6. Anmerkung zugleich immer annehmen lässt, dass die Function R_0 höchstens vom 1sten Grade ist, was hier geschehen soll. Weil ferner nach der Voraussetzung

$$P_1 \frown Q_1$$

ist, so lässt sich nach §. 7. niemals gleichzeitig

$$P_1 = R_1 + p_1(1+i^2) \quad \text{und} \quad Q_1 = R_1 + q_1(1+i^2)$$

setzen; man kann also nur gleichzeitig

$$P_1 = R_1 + p_1(1+i^2) \quad \text{und} \quad Q_1 = R_1 + R_1' + q_1(1+i^2)$$

setzen, wo R_1' niemals verschwinden kann, kann aber natürlich annehmen, dass die Functionen R_1 und $R_1 + R_1'$ höchstens vom 1sten Grade sind, woraus sich dann von selbst ergiebt, dass auch R_1' höchstens vom 1sten Grade sein kann. Aus den obigen Gleichungen ergiebt sich:

$$P_0 \pm P_1 = R_0 \pm R_1 + (p_0 \pm p_1)(1+i^2),$$
$$Q_0 \pm Q_1 = R_0 \pm R_1 \pm R_1' + (q_0 \pm q_1)(1+i^2);$$

und könnte man nun gleichzeitig

$$P_0 \pm P_1 = R + p(1+i^2) \quad \text{und} \quad Q_0 \pm Q_1 = R + q(1+i^2)$$

setzen, so wäre nach den vorstehenden Gleichungen:

$$R + p(1+i^2) = R_0 \pm R_1 + (p_0 \pm p_1)(1+i^2),$$
$$R + q(1+i^2) = R_0 \pm R_1 \pm R_1' + (q_0 \pm q_1)(1+i^2);$$

also, wenn man subtrahirt:

$$(p-q)(1+i^2) = \mp R_1' + \{(p_0 \pm p_1) - (q_0 \pm q_1)\}(1+i^2),$$

folglich:

$$\mp R_1' = \{(p-q) - (p_0 \pm p_1) + (q_0 \pm q_1)\}(1+i^2)$$

oder:

$$\mp R_1' = \{(p-q) - (p_0 - q_0) \mp (p_1 - q_1)\}(1+i^2).$$

Weil R_1' nicht verschwindet, so verschwindet auch

$$(p-q) - (p_0 - q_0) \mp (p_1 - q_1)$$

nicht, und $1+i^2$ geht in $\mp R_1'$ auf, was ungereimt ist, da diese nicht verschwindende ganze rationale algebraische Function von i höchstens vom 1sten Grade ist. Also ist es unmöglich, gleichzeitig

$$P_0 \pm P_1 = R + p(1+i^2) \quad \text{und} \quad Q_0 \pm Q_1 = R + q(1+i^2)$$

zu setzen, oder es lässt sich niemals gleichzeitig

$$P_0 \pm P_1' = R + p(1+i^2) \quad \text{und} \quad Q_0 \pm Q_1 = R + q(1+i^2)$$

setzen, woraus sich nach §. 5. die Inäquivalenz

$$P_0 \pm P_1 \frown Q_0 \pm Q_1$$

ergiebt. Dass aus der Voraussetzung des Satzes auch

$$P_1 \pm P_0 \frown Q_1 \pm Q_0$$

folgt, versteht sich mit Rücksicht auf §. 3. 4. nun von selbst, und der Satz ist daher vollständig bewiesen.

§. 18.

Zusatz. Wenn

$$P \frown Q \pm Q_1$$

ist, so ist immer

$$P \mp Q_1 \frown Q.$$

Weil nach der Voraussetzung

$$P \frown Q \pm Q_1$$

und nach §. 3. 2.

$$Q_1 \simeq Q_1$$

ist, so ist nach §. 17.

$$P \mp Q_1 \frown Q \pm Q_1 \mp Q_1,$$

also:

$$P \mp Q_1 \frown Q,$$

w. z. b. w.

§. 19.

Lehrsatz. Wenn das Product PQ durch $1+i^2$ ohne Rest theilbar und der Factor P durch $1+i^2$ nicht ohne Rest theilbar ist, so ist der Factor Q durch $1+i^2$ ohne Rest theilbar.

Beweis. Weil nach der Voraussetzung PQ durch $1+i^2$ theilbar ist, so kann man

$$1) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad PQ = \varpi(1+i^2)$$

setzen. Nun setze man

$$2) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad P = R + p(1+i^2)$$

nd nehme an, dass die ganze rationale algebraische Function R öchstens vom 1sten Grade sei, wozu man natürlich jederzeit erechtigt ist; da nach der Voraussetzung der Factor P durch $+ i^2$ nicht ohne Rest theilbar ist, so kann R niemals verschwinen, weil nach 2), wenn dies der Fall wäre, der Factor P durch $+ i^2$ ohne Rest theilbar sein würde. Aus 2) folgt:

$$3) \ldots\ldots\ldots PQ = RQ + pQ(1+i^2),$$

ınd es ist also, wenn man diese Gleichung mit 1) vergleicht:

$$\bar{\omega}(1+i^2) = RQ + pQ(1+i^2),$$

ılso:

$$4) \ldots\ldots\ldots RQ = (\bar{\omega} - pQ)(1+i^2),$$

olglich RQ durch $1+i^2$ ohne Rest theilbar. Man setze nun:

$$5) \ldots\ldots\ldots Q = R_1 + p_1(1+i^2),$$

ınd nehme an, dass die ganze rationale algebraische Function R_1 ıöchstens vom 1sten Grade sei, wozu man natürlich jederzeit ıerechtigt ist, so ist:

$$6) \ldots\ldots\ldots RQ = RR_1 + p_1 R(1+i^2),$$

ılso, wenn man diese Gleichung mit 4) vergleicht:

$$(\bar{\omega} - pQ)(1+i^2) = RR_1 + p_1 R(1+i^2),$$

olglich:

$$7) \ldots\ldots\ldots RR_1 = (\bar{\omega} - pQ - p_1 R)(1+i^2),$$

woraus sich ergiebt, dass RR_1 durch $1+i^2$ ohne Rest theilbar st. Nach dem Obigen sind R und R_1 im Allgemeinen von der Form:

$$R = a + bi, \quad R_1 = a_1 + b_1 i;$$

ıo dass also:

$$\begin{aligned} RR_1 &= (a+bi)(a_1+b_1 i) \\ &= aa_1 + (ab_1 + ba_1)i + bb_1 i^2 \\ &= aa_1 - bb_1 + (ab_1 + ba_1)i + bb_1(1+i^2), \end{aligned}$$

olglich:

$$\frac{RR_1}{1+i^2} = bb_1 + \frac{aa_1 - bb_1 + (ab_1 + ba_1)i}{1+i^2}$$

st, und es muss also, weil nach dem Obigen

$$\frac{RR_1}{1+i^2}$$

eine ganze rationale algebraische Function von i ist, auch

$$\frac{aa_1 - bb_1 + (ab_1 + ba_1)i}{1 + i^2}$$

eine solche Function von i sein, oder es muss

$$aa_1 - bb_1 + (ab_1 + ba_1)i$$

durch $1 + i^2$ ohne Rest theilbar sein, was offenbar nur dann der Fall sein kann, wenn gleichzeitig

$$aa_1 - bb_1 = 0, \quad ab_1 + ba_1 = 0$$

ist. Durch Erhebung dieser Gleichungen auf's Quadrat erhält man:

$$a^2a_1^2 - 2aba_1b_1 + b^2b_1^2 = 0,$$

$$a^2b_1^2 + 2aba_1b_1 + b^2a_1^2 = 0;$$

also, wenn man addirt:

$$a^2(a_1^2 + b_1^2) + b^2(a_1^2 + b_1^2) = 0$$

oder:

$$(a^2 + b^2)(a_1^2 + b_1^2) = 0.$$

Folglich ist entweder $a^2 + b^2 = 0$ oder $a_1^2 + b_1^2 = 0$. Wäre $a^2 + b^2 = 0$, so wäre abgesondert $a = 0$, $b = 0$; also nach dem Obigen

$$R = a + bi = 0,$$

was nicht der Fall sein kann, weil bekanntlich R nicht verschwindet. Daher muss $a_1^2 + b_1^2 = 0$, also abgesondert $a_1 = 0$, $b_1 = 0$; folglich nach dem Obigen

$$R_1 = a_1 + b_1i = 0$$

sein, woraus nach 5) folgt, dass Q durch $1 + i^2$ ohne Rest theilbar ist, w. z. b. w.

§. 20.

Zusätze. 1. Wenn das Product PQ durch $1 + i^2$ ohne Rest theilbar und der Factor P eine nicht verschwindende ganze rationale algebraische Function des ersten Grades von i oder eine nicht verschwindende Constante ist; so ist jederzeit Q durch $1 + i^2$ ohne Rest theilbar.

Weil unter den gemachten Voraussetzungen der Factor P

offenbar durch $1+i^2$ nicht ohne Rest theilbar ist; so folgt die Richtigkeit des Satzes unmittelbar aus §. 19.

2. **Wenn P^2 durch $1+i^2$ ohne Rest theilbar ist, so ist P durch $1+i^2$ ohne Rest theilbar, oder, mit anderen Worten, wenn $P^2 \succeq 0$ ist, so ist auch $P \succeq 0$.**

Wenn P, als der eine Factor des durch $1+i^2$ ohne Rest theilbaren Products

$$P^2 = PP,$$

durch $1+i^2$ nicht ohne Rest theilbar wäre; so müsste nach dem Lehrsatze P, als der andere Factor dieses durch $1+i^2$ ohne Rest theilbaren Products, durch $1+i^2$ ohne Rest theilbar sein. Beides widerspricht sich einander, und es muss also P durch $1+i^2$ ohne Rest theilbar sein, w. z. b. w.

Wenn auch das Vorstehende zum Beweise des obigen Satzes genügen dürfte, so wollen wir doch, um keinen Zweifel zu lassen, seinen Beweis im Folgenden noch besonders durchführen, weil dieser Satz von besonderer Wichtigkeit ist.

Weil nach der Voraussetzung P^2 durch $1+i^2$ ohne Rest theilbar ist, so kann man

$$1) \;\ldots\ldots\ldots\; P^2 = \varpi(1+i^2)$$

setzen. Nun setze man ferner

$$2) \;\ldots\ldots\ldots\; P = R + p(1+i^2),$$

und nehme an, dass die ganze rationale algebraische Function R **höchstens** vom 1sten Grade sei, wozu man bekanntlich jederzeit berechtigt ist. Wäre nun P durch $1+i^2$ nicht ohne Rest theilbar, wie wir einmal annehmen wollen, so könnte R niemals verschwinden, weil, wenn dies der Fall wäre, P nach 2) durch $1+i^2$ ohne Rest theilbar sein würde, was gegen die Annahme streitet. Aus 2) folgt:

$$3) \;\ldots\ldots\ldots\; P^2 = RP + pP(1+i^2),$$

also nach 1):

$$\varpi(1+i^2) = RP + pP(1+i^2),$$

und daher

$$4) \;\ldots\ldots\ldots\; RP = (\varpi - pP)(1+i^2),$$

also, weil nach 2)

$$RP = R^2 + pR(1+i^2)$$

ist:

$$R^2 + pR(1+i^2) = (\overline{\omega} - pP)(1+i^2),$$

folglich:

$$5) \ldots\ldots\ldots R^2 = (\overline{\omega} - pP - pR)(1+i^2),$$

also R^2 durch $1+i^2$ ohne Rest theilbar. Nach dem Obigen ist nun im Allgemeinen

$$R = a + bi,$$

folglich

$$R^2 = a^2 + 2abi + b^2 i^2$$
$$= a^2 - b^2 + 2abi + b^2(1+i^2),$$

und daher

$$\frac{R^2}{1+i^2} = b^2 + \frac{a^2 - b^2 + 2abi}{1+i^2},$$

also, weil nach dem Vorhergehenden

$$\frac{R^2}{1+i^2}$$

eine ganze rationale algebraische Function ist, auch

$$\frac{a^2 - b^2 + 2abi}{1+i^2}$$

eine solche Function, oder

$$a^2 - b^2 + 2abi$$

durch $1+i^2$ ohne Rest theilbar, was offenbar nur dann der Fall sein kann, wenn gleichzeitig

$$a^2 - b^2 = 0, \quad 2ab = 0$$

ist. Durch Erhebung dieser Gleichungen auf's Quadrat erhält man:

$$a^4 - 2a^2b^2 + b^4 = 0,$$
$$4a^2b^2 \quad = 0;$$

also durch Addition:

$$a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 = 0,$$

daher $a^2 + b^2 = 0$, folglich abgesondert $a = 0$, $b = 0$, also nach dem Vorhergehenden $R = 0$, was nach dem Obigen nicht der Fall sein kann. Daher ist die Annahme, dass P durch $1+i^2$ nicht ohne Rest theilbar sei, falsch, und P ist also durch $1+i^2$ ohne Rest theilbar, w. z. b. w.

§. 21.

Lehrsatz. Wenn $P \frown Q$ und Π durch $1+i^2$ nicht
hne Rest theilbar ist, so ist

$$\Pi P \frown \Pi Q.$$

Beweis. Wäre

$$\Pi P \simeq \Pi Q,$$

wäre die Differenz

$$\Pi P - \Pi Q = \Pi(P-Q)$$

urch $1+i^2$ theilbar, und es müsste also, da nach der Voraus-
etzung Π durch $1+i^2$ nicht theilbar ist, nach §. 19. die Diffe-
enz $P-Q$ durch $1+i^2$ theilbar, also nach §. 2.

$$P \simeq Q$$

ein, was gegen die Voraussetzung

$$P \frown Q$$

treitet. Also kann nicht

$$\Pi P \simeq \Pi Q$$

ein, und es muss folglich

$$\Pi P \frown \Pi Q$$

ein, w. z. b. w.

§. 22.

Lehrsatz. Wenn $\Pi P \simeq \Pi Q$ und Π durch $1+i^2$ nicht
heilbar ist, so ist

$$P \simeq Q.$$

Beweis. Wäre

$$P \frown Q,$$

wäre, da nach der Voraussetzung Π durch $1+i^2$ nicht theil-
ar ist, nach §. 21.

$$\Pi P \frown \Pi Q,$$

as gegen die Voraussetzung

$$\Pi P \simeq \Pi Q$$

reitet. Daher kann nicht

$$P \frown Q$$

sein, und es muss also

$$P \succeq Q$$

sein, w. z. b. w.

§. 23.

Zusatz. Die beiden vorhergehenden Sätze gelten offenbar immer, wenn Π eine nicht verschwindende ganze rationale algebraische Function des ersten Grades von i oder eine nicht verschwindende Constante ist.

Für $\Pi = -1$ folgt also aus §. 21., dass, wenn

$$P \frown Q$$

ist, immer auch

$$-P \frown -Q$$

ist.

§. 24.

Lehrsatz. Wenn

$$P+Q+R+S+\ldots \succeq U+V+W+X+\ldots$$

und

$$P \succeq P', \quad Q \succeq Q', \quad R \succeq R', \quad S \succeq S', \ldots;$$

$$U \succeq U', \quad V \succeq V', \quad W \succeq W', \quad X \succeq X', \ldots$$

ist; so ist auch:

$$P'+Q'+R'+S'+\ldots \succeq U'+V'+W'+X'+\ldots$$

Beweis. Weil nach der Voraussetzung

$$P \succeq P', \quad Q \succeq Q', \quad R \succeq R', \quad S \succeq S', \ldots$$

ist, so ist nach §. 10.

1) . . . $P+Q+R+S+\ldots \succeq P'+Q'+R'+S'+\ldots$

Weil nach der Voraussetzung

$$U \succeq U', \quad V \succeq V', \quad W \succeq W', \quad X \succeq X', \ldots$$

ist, so ist nach §. 10.

2) . . . $U+V+W+X+\ldots \succeq U'+V'+W'+X'+\ldots$

Nun ist aber nach der Voraussetzung

$$P+Q+R+S+\ldots\ \underline{\smile}\ U+V+W+X+\ldots,$$

also wegen der Gleichungen 1) und 2) nach §. 9.

$$P'+Q'+R'+S'+\ldots\ \underline{\smile}\ U'+V'+W'+X'+\ldots,$$

u. s. w.

§. 25.

Zusätze. 1. Wenn

$$P+Q+R+S+\ldots = U+V+W+X+\ldots$$

ist, so ist natürlich (§. 3. 1.) auch

$$P+Q+R+S+\ldots\ \underline{\smile}\ U+V+W+X+\ldots,$$

folglich unter denselben Voraussetzungen wie im vorigen Lehrsatze:

$$P'+Q'+R'+S'+\ldots\ \underline{\smile}\ U'+V'+W'+X'+\ldots$$

2. Wenn

$$P\ \underline{\smile}\ U+V+W+X+\ldots,$$

oder auch wenn

$$P=U+V+W+X+\ldots,$$

und wenn ausserdem

$$U\ \underline{\smile}\ U',\quad V\ \underline{\smile}\ V',\quad W\ \underline{\smile}\ W',\quad X\ \underline{\smile}\ X',\ldots$$

ist; so ist:

$$P\ \underline{\smile}\ U'+V'+W'+X'+\ldots$$

Dies folgt unmittelbar aus dem Lehrsatze und dem vorhergehenden Zusatze, wenn man die Grössen Q, R, S,.... verschwinden lässt, und bedenkt, dass nach §. 3. 2.

$$P\ \underline{\smile}\ P$$

ist.

3. Wenn

$$PP_1+QQ_1+RR_1+SS_1+\ldots\ \underline{\smile}\ UU_1+VV_1+WW_1+XX_1+\ldots$$

und

$$P\ \underline{\smile}\ P',\quad Q\ \underline{\smile}\ Q',\quad R\ \underline{\smile}\ R',\quad S\ \underline{\smile}\ S',\ldots;$$

$$P_1\ \underline{\smile}\ P_1',\quad Q_1\ \underline{\smile}\ Q_1',\quad R_1\ \underline{\smile}\ R_1',\quad S_1\ \underline{\smile}\ S_1',\ldots;$$

so wie auch

$$U \succeq U', \quad V \succeq V', \quad W \succeq W', \quad X \succeq X', \ldots;$$

$$U_1 \succeq U_1', \quad V_1 \succeq V_1', \quad W_1 \succeq W_1', \quad X_1 \succeq X_1', \ldots$$

ist; so ist:

$$P'P_1' + Q'Q_1' + R'R_1' + S'S_1' + \ldots \succeq U'U_1' + V'V_1' + W'W_1' + X'X_1', \ldots$$

Denn weil unter den Voraussetzungen des Satzes nach §. 1!

$$PP_1 \succeq P'P_1', \quad QQ_1 \succeq Q'Q_1', \quad RR_1 \succeq R'R_1', \quad SS_1 \succeq S'S_1', \ldots$$

$$UU_1 \succeq U'U_1', \quad VV_1 \succeq V'V_1', \quad WW_1 \succeq W'W_1', \quad XX_1 \succeq X'X_1', \ldots$$

ist; so folgt der Satz unmittelbar aus §. 24.

Bemerkung. Dass man hier und in §. 24. an die Stelle der Zeichen + auch die Zeichen — setzen kann, versteht sich schon nach §. 3. 3. von selbst.

§. 26.

Lehrsatz. Wenn

$$U + U_1 P + U_2 P^2 + U_3 P^3 + \ldots + U_n P^n$$

$$\succeq V + V_1 Q + V_2 Q^2 + V_3 Q^3 + \ldots + V_m Q^m$$

und

$$P \succeq P_1, \quad Q \succeq Q_1$$

ist; so ist auch:

$$U + U_1 P_1 + U_2 P_1^2 + U_3 P_1^3 + \ldots + U_n P_1^n$$

$$\succeq V + V_1 Q_1 + V_2 Q_1^2 + V_3 Q_1^3 + \ldots + V_m Q_1^m.$$

Beweis. Weil nach der Voraussetzung

$$P \succeq P_1$$

ist, so ist nach §. 16.:

$$P \succeq P_1,$$
$$P^2 \succeq P_1^2,$$
$$P^3 \succeq P_1^3,$$
u. s. w.
$$P^n \succeq P_1^n$$

also nach §. 14.:

$$U \asymp U,$$
$$U_1 P \asymp U_1 P_1,$$
$$U_2 P^2 \asymp U_2 P_1^2,$$
$$U_3 P^3 \asymp U_3 P_1^3,$$
u. s. w.
$$U_n P^n \asymp U_n P_1^n;$$

folglich nach §. 10.:

$$1) \ldots . \quad U + U_1 P + U_2 P^2 + U_3 P^3 + \ldots . + U_n P^n$$
$$\asymp U + U_1 P_1 + U_2 P_1^2 + U_3 P_1^3 + \ldots . + U_n P_1^n.$$

Weil ferner nach der Voraussetzung

$$Q \asymp Q_1$$

ist, so ist nach §. 16.:

$$Q \asymp Q_1,$$
$$Q^2 \asymp Q_1^2,$$
$$Q^3 \asymp Q_1^3,$$
u. s. w.
$$Q^m \asymp Q_1^m;$$

also nach §. 14.:

$$V \asymp V,$$
$$V_1 Q \asymp V_1 Q_1,$$
$$V_2 Q^2 \asymp V_2 Q_1^2,$$
$$V_3 Q^3 \asymp V_3 Q_1^3,$$
u. s. w.
$$V_m Q^m \asymp V_m Q_1^m;$$

folglich nach §. 10.:

$$2) \ldots . \quad V + V_1 Q + V_2 Q^2 + V_3 Q^3 + \ldots . + V_m Q^m$$
$$\asymp V + V_1 Q_1 + V_2 Q_1^2 + V_3 Q_1^3 + \ldots . + V_m Q_1^m.$$

Weil nun nach der Voraussetzung

$$U + U_1 P + U_2 P^2 + U_3 P^3 + \ldots . + U_n P^n$$
$$\asymp V + V_1 Q + V_2 Q^2 + V_3 Q^3 + \ldots . + V_m Q^m$$

ist, so ist wegen der Gleichungen 1) und 2) nach §. 9.

$$U + U_1 P_1 + U_2 P_1^2 + U_3 P_1^3 + \ldots . + U_n P_1^n$$
$$\asymp V + V_1 Q_1 + V_2 Q_1^2 + V_3 Q_1^3 + \ldots . + V_m Q_1^m,$$

w. z. b. w.

§. 27.

Zusätze. 1. Wenn

$$U + U_1 P + U_2 P^2 + U_3 P^3 + \ldots + U_n P^n$$
$$= V + V_1 Q + V_2 Q^2 + V_3 Q^3 + \ldots + V_m Q^m$$

ist, so ist natürlich (§. 3. 1.) auch

$$U + U_1 P + U_2 P^2 + U_3 P^3 + \ldots + U_n P^n$$
$$\simeq V + V_1 Q + V_2 Q^2 + V_3 Q^3 + \ldots + V_m Q^m,$$

folglich unter denselben Voraussetzungen wie im vorigen Lehrsatze:

$$U + U_1 P_1 + U_2 P_1{}^2 + U_3 P_1{}^3 + \ldots + U_n P_1{}^n$$
$$\simeq V + V_1 Q_1 + V_2 Q_1{}^2 + V_3 Q_1{}^3 + \ldots + V_m Q_1{}^m.$$

2. Wenn

$$U \simeq V + V_1 Q + V_2 Q^2 + V_3 Q^3 + \ldots + V_m Q^m,$$

oder auch wenn

$$U = V + V_1 Q + V_2 Q^2 + V_3 Q^3 + \ldots + V_m Q^m,$$

und wenn ausserdem

$$Q \simeq Q_1$$

ist; so ist:

$$U \simeq V + V_1 Q_1 + V_2 Q_1{}^2 + V_3 Q_1{}^3 + \ldots + V_m Q_1{}^m.$$

Dies folgt unmittelbar aus dem Lehrsatze und dem vorhergehenden Zusatze, wenn man die Grösse P verschwinden lässt.

3. Wenn überhaupt $F(P)$ eine ganze rationale algebraische Function von P, so wie auch $\Phi(Q)$ eine ganze rationale algebraische Function von Q, und

$$F(P) \simeq \Phi(Q),$$

oder auch wenn

$$F(P) = \Phi(Q),$$

und wenn dann ausserdem

$$P \simeq P_1, \quad Q \simeq Q_1$$

ist; so ist jederzeit:

$$F(P_1) \asymp \Phi(Q_1).$$

Dies folgt unmittelbar aus dem Lehrsatze und dem ersten Zusatze, wenn man sich die ganzen rationalen algebraischen Functionen

$$F(P) \text{ und } \Phi(Q)$$

respective nach den positiven ganzen Potenzen von P und Q entwickelt denkt.

§. 28.

Lehrsatz. Wenn für jedes i, also unabhängig von besonderen Werthen von i,

$$A+Bi \asymp A'+B'i$$

ist, und A, B; A', B' constante Grössen sind; so ist

$$A=A', \quad B=B'$$

oder für jedes i, also unabhängig von besonderen Werthen von i:

$$A+Bi=A'+B'i.$$

Beweis. Weil wegen der Voraussetzung nach §. 2. die Differenz

$$(A+Bi)-(A'+B'i)$$

oder

$$A-A'+(B-B')i$$

durch $1+i^2$ ohne Rest theilbar ist, die Grössen A, B und A', B', also auch $A-A'$ und $B-B'$, aber Constanten sind, folglich

$$A-A'+(B-B')i$$

eine ganze rationale algebraische Function des ersten Grades von i ist; so muss für jedes i, oder unabhängig von besonderen Werthen von i,

$$A-A'+(B-B')i=0$$

sein. Wäre nun nicht

$$B-B'=0,$$

so würde aus der vorstehenden Gleichung

$$i=\frac{A-A'}{B-B'}$$

folgen, wo der Bruch

$$\frac{A-A'}{B-B'}$$

eine endliche völlig bestimmte Grösse ist, und es würde daher nur für diesen einen völlig bestimmten Werth der Grösse i die Gleichung

$$A-A'+(B-B')i=0$$

erfüllt sein, da wir doch aus dem Obigen wissen, dass diese Gleichung für jedes i oder unabhängig von bestimmten Werthen von i erfüllt sein muss. Daher ist es falsch, dass nicht

$$B-B'=0$$

sei, und es muss also

$$B-B'=0$$

sein, was dann ferner wegen der Gleichung

$$A-A'+(B-B')i=0$$

unmittelbar zu

$$A-A'=0$$

führt. Es ist also gleichzeitig

$$A-A'=0,\quad B-B'=0$$

oder gleichzeitig

$$A=A',\quad B=B';$$

also für jedes i oder unabhängig von besonderen Werthen von i:

$$A+Bi=A'+B'i,$$

w. z. b. w.

§. 29.

Lehrsatz. Für jede positive ganze Zahl n ist:

$$i^{4n} \underline{\smile} +1,\quad i^{4n+1} \underline{\smile} +i,\quad i^{4n+2} \underline{\smile} -1,\quad i^{4n+3} \underline{\smile} -i.$$

Beweis. Wenn n eine positive ganze Zahl ist, so ist die Grösse

$$(-1)^n - i^{2n}$$

stets durch $1+i^2$ ohne Rest theilbar, was auf folgende Art leicht bewiesen werden kann.

Wenn n eine gerade Zahl ist, so ist:

$$(-1)^n - i^{2n} = 1 - i^{2n},$$

und wenn man nun die Grösse

$$1 - i^2 + i^4 - i^6 + \ldots + i^{2(n-2)} - i^{2(n-1)},$$

wobei man zu beachten hat, dass $n-1$ eine ungerade Zahl ist, mit $1+i^2$ multiplicirt; so erhält man als Product die Grösse:

$$\left.\begin{array}{l} 1 - i^2 + i^4 - i^6 + \ldots + i^{2(n-2)} - i^{2(n-1)} \\ + i^2 - i^4 + i^6 - \ldots - i^{2(n-2)} + i^{2(n-1)} - i^{2n} \end{array}\right\} = 1 - i^{2n},$$

woraus sich also ergiebt, dass

$$\frac{1-i^{2n}}{1+i^2} = 1 - i^2 + i^4 - i^6 + \ldots + i^{2(n-2)} - i^{2(n-1)}$$

oder nach dem Obigen

$$\frac{(-1)^n - i^{2n}}{1+i^2} = 1 - i^2 + i^4 - i^6 + \ldots + i^{2(n-2)} - i^{2(n-1)},$$

also die Grösse

$$(-1)^n - i^{2n}$$

durch $1+i^2$ ohne Rest theilbar ist.

Wenn n eine ungerade Zahl ist, so ist

$$(-1)^n - i^{2n} = -1 - i^{2n},$$

und wenn man nun die Grösse

$$1 - i^2 + i^4 - i^6 + \ldots - i^{2(n-2)} + i^{2(n-1)},$$

wobei man zu beachten hat, dass $n-1$ eine gerade Zahl ist, mit $1+i^2$ multiplicirt; so erhält man als Product die Grösse:

$$\left.\begin{array}{l} 1 - i^2 + i^4 - i^6 + \ldots - i^{2(n-2)} + i^{2(n-1)} \\ + i^2 - i^4 + i^6 - \ldots + i^{2(n-2)} - i^{2(n-1)} + i^{2n} \end{array}\right\} = 1 + i^{2n},$$

woraus sich also ergiebt, dass

$$\frac{1+i^{2n}}{1+i^2} = 1 - i^2 + i^4 - i^6 + \ldots - i^{2(n-2)} + i^{2(n-1)}$$

oder

$$\frac{-1-i^{2n}}{1+i^2} = -1 + i^2 - i^4 + i^6 - \ldots + i^{2(n-2)} - i^{2(n-1)},$$

folglich nach dem Obigen:

$$\frac{(-1)^n - i^{2n}}{1+i^2} = -1 + i^2 - i^4 + i^6 - \ldots + i^{2(n-2)} - i^{2(n-1)},$$

daher die Grösse

$$(-1)^n - i^{2n}$$

durch $1+i^2$ ohne Rest theilbar ist.

Hiernach ist also

$$(-1)^n - i^{2n} \text{ und natürlich auch } i^{2n} - (-1)^n$$

immer durch $1+i^2$ ohne Rest theilbar, wie behauptet wurde.

Also ist nach §. 2.:

1) . . . . $i^{2n} \veebar (-1)^n$.

Nach §. 3. 2. ist:

2) . . . . $i \veebar i$,

folglich nach §. 15. aus 1) und 2) durch Multiplication:

3) . . . . $i^{2n+1} \veebar (-1)^n i$.

Setzt man in der Aequivalenz 1) die gerade Zahl $2n$ für n, so erhält man:

$$i^{4n} \veebar (-1)^{2n},$$

also:

4) . . . . $i^{4n} \veebar +1$;

und setzt man eben so in der Aequivalenz 3) die gerade Zahl $2n$ für n, so erhält man:

$$i^{4n+1} \veebar (-1)^{2n} i,$$

also:

5) . . . . $i^{4n+1} \veebar +i$.

Setzt man in der Aequivalenz 1) die ungerade Zahl $2n+1$ für n, so erhält man:

$$i^{4n+2} \veebar (-1)^{2n+1},$$

also:

6) . . . . $i^{4n+2} \veebar -1$,

und setzt man eben so in der Aequivalenz 3) die ungerade Zahl $2n+1$ für n, so ergiebt sich:

$$i^{4n+3} \veebar (-1)^{2n+1} i,$$

also:

7) . . . . $i^{4n+3} \succeq - i.$

Nach 4)—7) ist also:

$$i^{4n} \succeq + 1, \quad i^{4n+1} \succeq + i, \quad i^{4n+2} \succeq - 1, \quad i^{4n+3} \succeq - i,$$

w. z. b. w.

§. 30.

Zusatz. Setzt man in den Formeln des vorhergehenden Lehrsatzes für n nach und nach die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...; so erhält man die folgenden Aequivalenzen:

$$\begin{aligned}
i^0 &\succeq + 1, \\
i^1 &\succeq + i, \\
i^2 &\succeq - 1, \\
i^3 &\succeq - i, \\
i^4 &\succeq + 1, \\
i^5 &\succeq + i, \\
i^6 &\succeq - 1, \\
i^7 &\succeq - i, \\
i^8 &\succeq + 1, \\
i^9 &\succeq + i, \\
i^{10} &\succeq - 1, \\
i^{11} &\succeq - i,
\end{aligned}$$

u. s. w.

§. 31.

Einige Anwendungen der allgemeinen Theorie der Aequivalenzen.

Wenn auch die nächst folgende, an die vorliegende sich unmittelbar anschliessende Abhandlung eine nach meiner Meinung besonders wichtige und merkwürdige Anwendung der allgemeinen Theorie der Aequivalenzen, so wie dieselbe im Vorhergehenden entwickelt worden ist, enthalten wird: so will ich doch schon hier auf einige einfache Anwendungen derselben aufmerksam machen.

1. Es sei:

$$f(i) = u_0 + u_1 i + u_2 i^2 + u_3 i^3 + u_4 i^4 + \dots.$$

Weil nun nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$i^0 \simeq +1,\quad i^1 \simeq +i,\quad i^2 \simeq -1,\quad i^3 \simeq -i,\quad i^4 \simeq +1,\quad i^5 \simeq +i, \ldots;$$

ist, so folgt nach §. 25. 3. aus der vorstehenden Gleichung jederzeit leicht die Aequivalenz:

$$f(i) \simeq u_0 + u_1 i - u_2 - u_3 i + u_4 + u_5 i - u_6 - u_7 i + \ldots,$$

also die Aequivalenz:

$$f(i) \simeq u_0 - u_2 + u_4 - u_6 + \ldots + (u_1 - u_3 + u_5 - u_7 + \ldots) i.$$

Man braucht nämlich, um §. 25. 3. anzuwenden, nur

$$u_0 + u_1 i + u_2 i^2 + \ldots \simeq u_0 + u_1 i + u_2 i^2 + \ldots$$

und, indem man für u_0, u_1, u_2, ... diese sich selbst äquivalenten Grössen setzt, für i^0, i^1, i^2, i^3, i^4, i^5, ... links diese sich selbst äquivalenten Grössen, rechts die diesen Potenzen äquivalenten Grössen $+1$, $+i$, -1, $-i$, $+1$, $+i$, -1, $-i$, ... zu setzen.

2. Durch Multiplication ergiebt sich sogleich:

$$(\alpha + \beta i)(\gamma + \delta i) = \alpha\gamma + (\alpha\delta + \beta\gamma) i + \beta\delta i^2,$$

folglich nach 1.:

$$(\alpha + \beta i)(\gamma + \delta i) \simeq \alpha\gamma - \beta\delta + (\alpha\delta + \beta\gamma) i.$$

3. Setzt man hierin $\gamma = \alpha$, $\delta = -\beta$; so ist:

$$\alpha\gamma - \beta\delta = \alpha^2 + \beta^2,\quad \alpha\delta + \beta\gamma = 0;$$

folglich:

$$(\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i) \simeq \alpha^2 + \beta^2.$$

4. Setzt man in 2. für β, δ respective $-\beta$, $-\delta$; so erhält man:

$$(\alpha - \beta i)(\gamma - \delta i) \simeq \alpha\gamma - \beta\delta - (\alpha\delta + \beta\gamma) i.$$

5. Aus den beiden in 2. und 4. erhaltenen Aequivalenzen:

$$(\alpha + \beta i)(\gamma + \delta i) \simeq \alpha\gamma - \beta\delta + (\alpha\delta + \beta\gamma) i,$$
$$(\alpha - \beta i)(\gamma - \delta i) \simeq \alpha\gamma - \beta\delta - (\alpha\delta + \beta\gamma) i$$

folgt nach §. 15. durch Multiplication:

$$(\alpha^2 - \beta^2 i^2)(\gamma^2 - \delta^2 i^2) \simeq (\alpha\gamma - \beta\delta)^2 - (\alpha\delta + \beta\gamma)^2 i^2.$$

Nun ist aber nach §. 30.

$$i^2 \succeq -1,$$

lso nach §. 27. 3.:

$$(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2) \succeq (\alpha\gamma-\beta\delta)^2+(\alpha\delta+\beta\gamma)^2.$$

Weil nun aber die Grössen auf beiden Seiten des Zeichens der Aequivalenz von i unabhängig, insofern also constant sind; so ist nach §. 3. 5.:

$$(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2) = (\alpha\gamma-\beta\delta)^2+(\alpha\delta+\beta\gamma)^2.$$

6. Setzt man in 2.

$$\alpha = \cos x,\quad \beta = \sin x;\quad \gamma = \cos y,\quad \delta = \sin y;$$

o erhält man:

$$(\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y)$$
$$\succeq \cos x\cos y - \sin x\sin y + i(\cos x\sin y + \sin x\cos y),$$

so nach der Theorie der Kreisfunctionen:

$$(\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y) \succeq \cos(x+y) + i\sin(x+y).$$

Weil nun nach §. 3. 2.

$$\cos z + i\sin z \succeq \cos z + i\sin z$$

t, so ist nach §. 15.:

$$(\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y)(\cos z + i\sin z)$$
$$\succeq \{\cos(x+y) + i\sin(x+y)\}(\cos z + i\sin z):$$

ach dem vorher Bewiesenen ist aber:

$$\{\cos(x+y) + i\sin(x+y)\}(\cos z + i\sin z)$$
$$= \cos(x+y+z) + i\sin(x+y+z),$$

lso nach §. 8.

$$(\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y)(\cos z + i\sin z)$$
$$\succeq \cos(x+y+z) + i\sin(x+y+z).$$

Ferner ist nach §. 3. 2.

$$\cos u + i\sin u \succeq \cos u + i\sin u,$$

lso nach §. 15.:

$$(\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y)(\cos z + i\sin z)(\cos u + i\sin u)$$
$$\succeq \{\cos(x+y+z) + i\sin(x+y+z)\}(\cos u + i\sin u);$$

ach dem oben Bewiesenen ist aber:

$$\{\cos(x+y+z)+i\sin(x+y+z)\}(\cos u+i\sin u)$$
$$\succeq \cos(x+y+z+u)+i\sin(x+y+z+u),$$

also nach §. 8.:

$$(\cos x+i\sin x)(\cos y+i\sin y)(\cos z+i\sin z)(\cos u+i\sin u)$$
$$\succeq \cos(x+y+z+u)+i\sin(x+y+z+u).$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar, und es ist also überhaupt:

$$(\cos x+i\sin x)(\cos y+i\sin y)(\cos z+i\sin z)\ldots.(\cos w+i\sin w)$$
$$\succeq \cos(x+y+z+\ldots.+w)+i\sin(x+y+z+\ldots.+w).$$

7. Setzt man in dieser letzteren Gleichung

$$x=y=z=\ldots.=w$$

und bezeichnet die Anzahl dieser Grössen durch n, wo also n eine positive ganze Zahl bezeichnet, so erhält man aus 6. die folgende merkwürdige Aequivalenz:

$$(\cos x+i\sin x)^n \succeq \cos nx+i\sin nx.$$

8. Wir wollen, indem λ eine positive ganze Zahl bezeichnet:

$$E\lambda=1+\frac{x}{1}i+\frac{x^2}{1.2}i^2+\frac{x^3}{1.2.3}i^3+\ldots.+\frac{x^{2\lambda+1}}{1\ldots.(2\lambda+1)}i^{2\lambda+1}$$

und

$$C\lambda=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1\ldots.4}-\frac{x^6}{1\ldots.6}+\ldots.+(-1)^\lambda.\frac{x^{2\lambda}}{1\ldots.2\lambda},$$

$$S\lambda=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1\ldots.5}-\frac{x^7}{1\ldots.7}+\ldots.+(-1)^\lambda.\frac{x^{2\lambda+1}}{1\ldots.(2\lambda+1)}$$

setzen; so ist nach 1.:

$$E\lambda \succeq 1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1\ldots.4}-\frac{x^6}{1\ldots.6}+\ldots.+(-1)^\lambda.\frac{x^{2\lambda}}{1\ldots.2\lambda}$$
$$+\left\{\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1\ldots.5}-\frac{x^7}{1\ldots.7}+\ldots.+(-1)^\lambda.\frac{x^{2\lambda+1}}{1\ldots.(2\lambda+1)}\right\}i,$$

also in der eingeführten Bezeichnung:

$$E\lambda \succeq C\lambda+S\lambda.i.$$

Lässt man nun λ in's Unendliche wachsen, so ist nach den Lehren der reinen Analysis in völliger Allgemeinheit:

$$\text{Lim}\,E\lambda=e^{ix},\quad \text{Lim}\,C\lambda=\cos x,\quad \text{Lim}\,S\lambda=\sin x;$$

folglich ist für ein in's Unendliche wachsendes λ von der Aequivalenz

$$E\lambda \succeq C\lambda + S\lambda.i$$

die Gränzäquivalenz:

$$e^{ix} \succeq \cos x + i\sin x.$$

Setzt man hierin $-x$ für x, so erhält man die Gränzäquivalenz:

$$e^{-ix} \succeq \cos x - i\sin x.$$

Aus den beiden vorstehenden Gränzäquivalenzen erhält man nach §. 10. und §. 11. die beiden Gränzäquivalenzen:

$$e^{ix} + e^{-ix} \succeq 2\cos x, \quad e^{ix} - e^{-ix} \succeq 2i\sin x.$$

9. Nach dem Binomischen Lehrsatze für positive ganze Exponenten ist für ein positives ganzes n mit Anwendung der gewöhnlichen Bezeichnung der Binomial-Coefficienten:

$$(a+bi)^n = a^n + n_1 a^{n-1} bi + n_2 a^{n-2} b^2 i^2 + n_3 a^{n-3} b^3 i^3 + \ldots,$$

also nach 1.:

$$(a+bi)^n \succeq \quad a^n - n_2 a^{n-2} b^2 + n_4 a^{n-4} b^4 - n_6 a^{n-6} b^6 + \ldots$$
$$+ (n_1 a^{n-1} b - n_3 a^{n-3} b^3 + n_5 a^{n-5} b^5 - \ldots) i.$$

10. Setzt man in dieser Aequivalenz

$$a = \cos x, \quad b = \sin x;$$

so wird dieselbe:

$$(\cos x + i\sin x)^n \succeq \cos x^n - n_2 \cos x^{n-2} \sin x^2 + n_4 \cos x^{n-4} \sin x^4 - \ldots$$
$$+ (n_1 \cos x^{n-1} \sin x - n_3 \cos x^{n-3} \sin x^3 + n_5 \cos x^{n-5} \sin x^5 \ldots).$$

Nach 7. ist aber:

$$(\cos x + i\sin x)^n \succeq \cos nx + i\sin nx,$$

und daher, wenn man diese Aequivalenz mit der vorhergehenden vergleicht, nach §. 8.:

$$\cos nx + i\sin nx \succeq \cos x^n - n_2 \cos x^{n-2} \sin x^2 + n^4 \cos x^{n-4} \sin x^4 - \ldots$$
$$+ (n_1 \cos x^{n-1} \sin x - n_3 \cos x^{n-3} \sin x^3 + n_5 \cos x^{n-5} \sin x^5 \ldots) i,$$

woraus sich nach §. 28. die beiden anderweitig bekannten Gleichungen

$$\cos nx = \cos x^n - n_2 \cos x^{n-2} \sin x^2 + n_4 \cos x^{n-4} \sin x^4 - \ldots,$$
$$\sin nx = n_1 \cos x^{n-1} \sin x - n_3 \cos x^{n-3} \sin x^3 + n_5 \cos x^{n-5} \sin x^5 - \ldots$$

ergeben.

XXVII.

Neuer Beweis eines wichtigen und merkwürdigen arithmetischen Satzes.

Von

dem Herausgeber.

I.

In der Mécanique analytique. Tome II. Nouve édition. Paris 1815. p. 216. kommt der folgende Satz v ohne dass Lagrange einen eigentlichen analytischen Beweis f denselben giebt:

Wenn

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$
$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1,$$
$$a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1;$$

und

$$aa_1 + bb_1 + cc_1 = 0,$$
$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0,$$
$$a_2a + b_2b + c_2c = 0$$

ist; so ist immer:

$$a^2 + a_1^2 + a_2^2 = 1,$$
$$b^2 + b_1^2 + b_2^2 = 1,$$
$$c^2 + c_1^2 + c_2^2 = 1;$$

und:

$$ab + a_1b_1 + a_2b_2 = 0,$$
$$bc + b_1c_1 + b_2c_2 = 0,$$
$$ca + c_1a_1 + c_2a_2 = 0.$$

Auch in der Abhandlung: Nouvelle solution du pro-
ème du mouvement de rotation d'un corps de figure
ıelconque qui n'est animé par aucune force accélé-
trice, die man in den Nouveaux Mémoires de l'Acadé-
e Royale des sciences et belles-lettres. Année
DCCLXXIII. Berlin MDCCLXXV. p. 85. findet, macht La-
ange vielfach von diesem wichtigen und merkwürdigen Satze
ebrauch. Einen rein analytischen Beweis desselben hat zuerst
oisson gegeben in der Correspondance sur l'école im-
ériale polytechnique. Tome premier. Paris 1813. p. 237.,
chdem kurz zuvor in demselben Journal p. 211. Monge einen
eweis gegeben hatte, der an geometrische Betrachtungen sich
schliesst, an die man bei diesem Gegenstande natürlich sehr
ld durch die Theorie der Verwandlung der Coordinaten erin-
rt wird. Endlich hat auch Gergonne einen an diese Theorie
ch anschliessenden Beweis in den Annales de Mathéma-
ques pures et appliquées. Tome XIX. Nismes 1828
1829. p. 326.—p. 327. gegeben.

Ohne auf weitere Erörterungen hier mich einlassen zu kön-
n, will ich doch nicht unterlassen zu bemerken, dass die
mmtlichen vorher erwähnten Entwickelungen, selbst der rein
alytische Beweis von Poisson, wenn derselbe auch von Ger-
nne „une démonstration fort élégante" genannt wird, nicht
sgeschlossen, mir Manches zu wünschen übrig zu lassen schei-
n. Besonders aber scheint mir die Nothwendigkeit einer an-
ren und neuen Darstellung dieses ganzen Gegenstandes in
ezug auf gewisse aus dem obigen Satze zu ziehende Conse-
ienzen, von denen späterhin weiter die Rede sein wird, hervor-
treten und sich geltend zu machen. Eine solche neue Darstel-
ıg im Folgenden zu geben, ist der Zweck der vorliegenden
handlung, wobei ich gleich hier im Allgemeinen bemerken will,
ss alle im Folgenden angeführten Paragraphen sich ohne Aus-
hme auf die unmittelbar vorhergehende Abhandlung beziehen,
s daher späterhin nicht weiter bemerkt werden wird.

II.

Unter allen im Folgenden vorkommenden Grössen hat man
ch im Allgemeinen ganze rationale algebraische Functionen der
liebigen Grösse i zu denken, wobei übrigens natürlich con-
ınte. Grössen nicht ausgeschlossen werden, und kann unter
eser Voraussetzung dann aufstellen folgenden

Lehrsatz.

Wenn

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$
$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1,$$
$$a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1$$

und

$$aa_1 + bb_1 + cc_1 = 0,$$
$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0,$$
$$a_2a + b_2b + c_2c = 0$$

ist: so ist immer auch:

$$a^2 + a_1^2 + a_2^2 = 1,$$
$$b^2 + b_1^2 + b_2^2 = 1,$$
$$c^2 + c_1^2 + c_2^2 = 1$$

und

$$ab + a_1b_1 + a_2b_2 = 0,$$
$$bc + b_1c_1 + b_2c_2 = 0,$$
$$ca + c_1a_1 + c_2a_2 = 0.$$

Beweis. Mittelst gewöhnlicher elementarer Rechnungen überzeugt man sich sehr leicht von der ganz allgemeinen Gültigkeit der folgenden Gleichungen:

𝔄.

$$\begin{aligned}(\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1)^2 = {} & (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2) \\ & -(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\gamma_1^2 - (\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)\gamma^2 \\ & -(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1)(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1-\gamma\gamma_1).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\beta\gamma_1 - \gamma\beta_1)^2 = {} & (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2) \\ & -(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\alpha_1^2 - (\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)\alpha^2 \\ & -(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1)(-\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\gamma\alpha_1 - \alpha\gamma_1)^2 = {} & (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2) \\ & -(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\beta_1^2 - (\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)\beta^2 \\ & -(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1)(\alpha\alpha_1-\beta\beta_1+\gamma\gamma_1).\end{aligned}$$

Addirt man diese Gleichungen zu einander, so erhält man die Gleichung:

𝔅.

$$\begin{aligned}&(\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1)^2 + (\beta\gamma_1 - \gamma\beta_1)^2 + (\gamma\alpha_1 - \alpha\gamma_1)^2 \\ &= (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2) - (\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1)^2.\end{aligned}$$

Ferner überzeugt man sich mittelst gewöhnlicher elementarer Rechnungen auch sogleich von der ganz allgemeinen Gültigkeit der folgenden Gleichungen:

$\mathfrak{C}$.

$$\begin{aligned}&(\alpha\beta_1-\beta\alpha_1)(\beta\gamma_1-\gamma\beta_1)\\=&(\alpha\gamma_1+\gamma\alpha_1)(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1)-\gamma\alpha(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)-\gamma_1\alpha_1(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2),\\&(\beta\gamma_1-\gamma\beta_1)(\gamma\alpha_1-\alpha\gamma_1)\\=&(\beta\alpha_1+\alpha\beta_1)(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1)-\alpha\beta(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)-\alpha_1\beta_1(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2),\\&(\gamma\alpha_1-\alpha\gamma_1)(\alpha\beta_1-\beta\alpha_1)\\=&(\gamma\beta_1+\beta\gamma_1)(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1)-\beta\gamma(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)-\beta_1\gamma_1(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2).\end{aligned}$$

Wegen dieser Gleichungen haben wir nach §. 3. I. die folgenden Aequivalenzen:

A.

$$\begin{aligned}(\alpha\beta_1-\beta\alpha_1)^2\asymp\;&(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)\\&-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\gamma_1^2-(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)\gamma^2\\&-(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1)(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1-\gamma\gamma_1),\\(\beta\gamma_1-\gamma\beta_1)^2\asymp\;&(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)\\&-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\alpha_1^2-(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)\alpha^2\\&-(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1)(-\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1),\\(\gamma\alpha_1-\alpha\gamma_1)^2\asymp\;&(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)\\&-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\beta_1^2-(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)\beta^2\\&-(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1)(\alpha\alpha_1-\beta\beta_1+\gamma\gamma_1).\end{aligned}$$

B.

$$\begin{aligned}&(\alpha\beta_1-\beta\alpha_1)^2+(\beta\gamma_1-\gamma\beta_1)^2+(\gamma\alpha_1-\alpha\gamma_1)^2\\\asymp\;&(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)-(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1)^2.\end{aligned}$$

C.

$$\begin{aligned}&(\alpha\beta_1-\beta\alpha_1)(\beta\gamma_1-\gamma\beta_1)\\\asymp\;&(\alpha\gamma_1+\gamma\alpha_1)(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1)-\gamma\alpha(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)-\gamma_1\alpha_1(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2),\\&(\beta\gamma_1-\gamma\beta_1)(\gamma\alpha_1-\alpha\gamma_1)\\\asymp\;&(\beta\alpha_1+\alpha\beta_1)(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1)-\alpha\beta(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)-\alpha_1\beta_1(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2),\\&(\gamma\alpha_1-\alpha\gamma_1)(\alpha\beta_1-\beta\alpha_1)\\\asymp\;&(\gamma\beta_1+\beta\gamma_1)(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1)-\beta\gamma(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)-\beta_1\gamma_1(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2).\end{aligned}$$

Nach A. ist:

$$\begin{aligned}(ab_1-ba_1)^2 \overset{\smile}{=} & \;(a^2+b^2+c^2)(a_1^2+b_1^2+c_1^2)\\ & -(a^2+b^2+c^2)c_1^2-(a_1^2+b_1^2+c_1^2)c^2\\ & -(aa_1+bb_1+cc_1)(aa_1+bb_1-cc_1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(bc_1-cb_1)^2 \overset{\smile}{=} & \;(a^2+b^2+c^2)(a_1^2+b_1^2+c_1^2)\\ & -(a^2+b^2+c^2)a_1^2-(a_1^2+b_1^2+c_1^2)a^2\\ & -(aa_1+bb_1+cc_1)(-aa_1+bb_1+cc_1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(ca_1-ac_1)^2 \overset{\smile}{=} & \;(a^2+b^2+c^2)(a_1^2+b_1^2+c_1^2)\\ & -(a^2+b^2+c^2)b_1^2-(a_1^2+b_1^2+c_1^2)b^2\\ & -(aa_1+bb_1+cc_1)(aa_1-bb_1+cc_1);\end{aligned}$$

und weil nun nach den Voraussetzungen des Satzes:

$$a^2+b^2+c^2 \overset{\smile}{=} 1,\quad a_1^2+b_1^2+c_1^2 \overset{\smile}{=} 1,\quad aa_1+bb_1+cc_1 \overset{\smile}{=} \dot{0}$$

ist, so hat man nach §. 25. 3. die folgenden Aequivalenzen:

$$1)\ldots\ldots \begin{cases}(ab_1-ba_1)^2 \overset{\smile}{=} 1-c^2-c_1^2,\\ (bc_1-cb_1)^2 \overset{\smile}{=} 1-a^2-a_1^2,\\ (ca_1-ac_1)^2 \overset{\smile}{=} 1-b^2-b_1^2;\end{cases}$$

und natürlich unter den gemachten Voraussetzungen ganz eben so:

$$2)\ldots\ldots \begin{cases}(a_1b_2-b_1a_2)^2 \overset{\smile}{=} 1-c_1^2-c_2^2,\\ (b_1c_2-c_1b_2)^2 \overset{\smile}{=} 1-a_1^2-a_2^2,\\ (c_1a_2-a_1c_2)^2 \overset{\smile}{=} 1-b_1^2-b_2^2;\end{cases}$$

und:

$$3)\ldots\ldots \begin{cases}(a_2b-b_2a)^2 \overset{\smile}{=} 1-c_2^2-c^2,\\ (b_2c-c_2b)^2 \overset{\smile}{=} 1-a_2^2-a^2,\\ (c_2a-a_2c)^2 \overset{\smile}{=} 1-b_2^2-b^2.\end{cases}$$

also ist nach §. 10.:

4)

$$\begin{aligned}(ab_1-ba_1)^2+(a_1b_2-b_1a_2)^2+(a_2b-b_2a)^2 &\overset{\smile}{=} 3-2(c^2+c_1^2+c_2^2)\\ (bc_1-cb_1)^2+(b_1c_2-c_1b_2)^2+(b_2c-c_2b)^2 &\overset{\smile}{=} 3-2(a^2+a_1^2+a_2^2)\\ (ca_1-ac_1)^2+(c_1a_2-a_1c_2)^2+(c_2a-a_2c)^2 &\overset{\smile}{=} 3-2(b^2+b_1^2+b_2^2)\end{aligned}$$

und folglich nach der allgemeinen Relation B., wenn man in derselben für

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma$$
$$\alpha_1,\quad \beta_1,\quad \gamma_1$$

nach und nach respective

$$\begin{array}{lll} a,\ a_1,\ a_2 & b,\ b_1,\ b_2 & c,\ c_1,\ c_2 \\ b,\ b_1,\ b_2 & c,\ c_1,\ c_2 & a,\ a_1,\ a_2 \end{array}$$

setzt:

5)

$$(a^2+a_1^2+a_2^2)(b^2+b_1^2+b_2^2)-(ab+a_1b_1+a_2b_2)^2 \succeq 3-2(c^2+c_1^2+c_2^2),$$
$$(b^2+b_1^2+b_2^2)(c^2+c_1^2+c_2^2)-(bc+b_1c_1+b_2c_2)^2 \succeq 3-2(a^2+a_1^2+a_2^2),$$
$$(c^2+c_1^2+c_2^2)(a^2+a_1^2+a_2^2)-(ca+c_1a_1+c_2a_2)^2 \succeq 3-2(b^2+b_1^2+b_2^2).$$

Setzt man der Kürze wegen:

6)

$$\begin{array}{ll} x = a^2+a_1^2+a_2^2, & u = ab+a_1b_1+a_2b_2, \\ y = b^2+b_1^2+b_2^2, & v = bc+b_1c_1+b_2c_2, \\ z = c^2+c_1^2+c_2^2; & w = ca+c_1a_1+c_2a_2; \end{array}$$

so werden die vorstehenden Aequivalenzen:

$$7) \ldots\ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} xy-u^2 \succeq 3-2z, \\ yz-v^2 \succeq 3-2x, \\ zx-w^2 \succeq 3-2y. \end{array}\right.$$

Nach C. ist, wenn man für

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma;$$
$$\alpha_1,\quad \beta_1,\quad \gamma_1$$

nach und nach respective

$$\begin{array}{lll} a,\ b,\ c & a_1,\ b_1,\ c_1 & a_2,\ b_2,\ c_2 \\ a_1,\ b_1,\ c_1 & a_2,\ b_2,\ c_2 & a,\ b,\ c \end{array}$$

setzt:

$$(ab_1-ba_1)(bc_1-cb_1)$$
$$\succeq (ac_1+ca_1)(aa_1+bb_1+cc_1)-ca(a_1^2+b_1^2+c_1^2)-c_1a_1(a^2+b^2+c^2),$$
$$(bc_1-cb_1)(ca_1-ac_1)$$
$$\succeq (ba_1+ab_1)(aa_1+bb_1+cc_1)-ab(a_1^2+b_1^2+c_1^2)-a_1b_1(a^2+b^2+c^2),$$
$$(ca_1-ac_1)(ab_1-ba_1)$$
$$\succeq (cb_1+bc_1)(aa_1+bb_1+cc_1)-bc(a_1^2+b_1^2+c_1^2)-b_1c_1(a^2+b^2+c^2);$$

ferner:

$$(a_1b_2 - b_1a_2)(b_1c_2 - c_1b_2)$$
$$\overset{\smile}{=} (a_1c_2 + c_1a_2)(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2) - c_1a_1(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)$$
$$- c_2a_2(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2),$$

$$(b_1c_2 - c_1b_2)(c_1a_2 - a_1c_2)$$
$$\overset{\smile}{=} (b_1a_2 + a_1b_2)(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2) - a_1b_1(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)$$
$$- a_2b_2(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2),$$

$$(c_1a_2 - a_1c_2)(a_1b_2 - b_1a_2)$$
$$\overset{\smile}{=} (c_1b_2 + b_1c_2)(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2) - b_1c_1(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)$$
$$- b_2c_2(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2);$$

und:

$$(a_2b - b_2a)(b_2c - c_2b)$$
$$\overset{\smile}{=} (a_2c + c_2a)(a_2a + b_2b + c_2c) - c_2a_2(a^2 + b^2 + c^2) - ca(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2),$$

$$(b_2c - c_2b)(c_2a - a_2c)$$
$$\overset{\smile}{=} (b_2a + a_2b)(a_2a + b_2b + c_2c) - a_2b_2(a^2 + b^2 + c^2) - ab(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2),$$

$$(c_2a - a_2c)(a_2b - b_2a)$$
$$\overset{\smile}{=} (c_2b + b_2c)(a_2a + b_2b + c_2c) - b_2c_2(a^2 + b^2 + c^2) - bc(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2);$$

also, wegen der Voraussetzungen des Satzes nach §. 25. 3.:

$$(ab_1 - ba_1)(bc_1 - cb_1) \overset{\smile}{=} -ca - c_1a_1,$$
$$(bc_1 - cb_1)(ca_1 - ac_1) \overset{\smile}{=} -ab - a_1b_1,$$
$$(ca_1 - ac_1)(ab_1 - ba_1) \overset{\smile}{=} -bc - b_1c_1;$$

$$(a_1b_2 - b_1a_2)(b_1c_2 - c_1b_2) \overset{\smile}{=} -c_1a_1 - c_2a_2,$$
$$(b_1c_2 - c_1b_2)(c_1a_2 - a_1c_2) \overset{\smile}{=} -a_1b_1 - a_2b_2,$$
$$(c_1a_2 - a_1c_2)(a_1b_2 - b_1a_2) \overset{\smile}{=} -b_1c_1 - b_2c_2;$$

$$(a_2b - b_2a)(b_2c - c_2b) \overset{\smile}{=} -c_2a_2 - ca,$$
$$(b_2c - c_2b)(c_2a - a_2c) \overset{\smile}{=} -a_2b_2 - ab,$$
$$(c_2a - a_2c)(a_2b - b_2a) \overset{\smile}{=} -b_2c_2 - bc;$$

folglich durch Addition nach §. 10.

$$\left.\begin{aligned} &(ab_1 - ba_1)(bc_1 - cb_1) \\ &+ (a_1b_2 - b_1a_2)(b_1c_2 - c_1b_2) \\ &+ (a_2b - b_2a)(b_2c - c_2b) \end{aligned}\right\} \overset{\smile}{=} -2(ca + c_1a_1 + c_2a_2).$$

$$\left.\begin{array}{l}(bc_1-cb_1)(ca_1-ac_1)\\+(b_1c_2-c_1b_2)(c_1a_2-a_1c_2)\\+(b_2c-c_2b)(c_2a-a_2c)\end{array}\right\}\equiv-2(ab+a_1b_1+a_2b_2),$$

$$\left.\begin{array}{l}(ca_1-ac_1)(ab_1-ba_1)\\+(c_1a_2-a_1c_2)(a_1b_2-b_1a_2)\\+(c_2a-a_2c)(a_2b-b_2a)\end{array}\right\}\equiv-2(bc+b_1c_1+b_2c_2).$$

Mittelst leichter Rechnung überzeugt man sich aber von der Richtigkeit der folgenden Relationen:

$$\begin{array}{l}(ab_1-ba_1)(bc_1-cb_1)\\+(a_1b_2-b_1a_2)(b_1c_2-c_1b_2)\\+(a_2b-b_2a)(b_2c-c_2b)\end{array}$$
$$=(ab+a_1b_1+a_2b_2)(bc+b_1c_1+b_2c_2)-(b^2+b_1{}^2+b_2{}^2)(ca+c_1a_1+c_2a_2),$$

$$\begin{array}{l}(bc_1-cb_1)(ca_1-ac_1)\\+(b_1c_2-c_1b_2)(c_1a_2-a_1c_2)\\+(b_2c-c_2b)(c_2a-a_2c)\end{array}$$
$$=(bc+b_1c_1+b_2c_2)(ca+c_1a_1+c_2a_2)-(c^2+c_1{}^2+c_2{}^2)(ab+a_1b_1+a_2b_2),$$

$$\begin{array}{l}(ca_1-ac_1)(ab_1-ba_1)\\+(c_1a_2-a_1c_2)(a_1b_2-b_1a_2)\\+(c_2a-a_2c)(a_2b-b_2a)\end{array}$$
$$=(ca+c_1a_1+c_2a_2)(ab+a_1b_1+a_2b_2)-(a^2+a_1{}^2+a_2{}^2)(bc+b_1c_1+b_2c_2);$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$(ab+a_1b_1+a_2b_2)(bc+b_1c_1+b_2c_2)-(b^2+b_1{}^2+b_2{}^2)(ca+c_1a_1+c_2a_2)$$
$$\equiv-2(ca+c_1a_1+c_2a_2),$$

$$(bc+b_1c_1+b_2c_2)(ca+c_1a_1+c_2a_2)-(c^2+c_1{}^2+c_2{}^2)(ab+a_1b_1+a_2b_2)$$
$$\equiv-2(ab+a_1b_1+a_2b_2),$$

$$(ca+c_1a_1+c_2a_2)(ab+a_1b_1+a_2b_2)-(a^2+a_1{}^2+a_2{}^2)(bc+b_1c_1+b_2c_2)$$
$$\equiv-2(bc+b_1c_1+b_2c_2);$$

folglich nach §. 12.:

$$(ab+a_1b_1+a_2b_2)(bc+b_1c_1+b_2c_2)\equiv\{(b^2+b_1{}^2+b_2{}^2)-2\}(ca+c_1a_1+c_2a_2),$$
$$(bc+b_1c_1+b_2c_2)(ca+c_1a_1+c_2a_2)\equiv\{(c^2+c_1{}^2+c_2{}^2)-2\}(ab+a_1b_1+a_2b_2),$$
$$(ca+c_1a_1+c_2a_2)(ab+a_1b_1+a_2b_2)\equiv\{(a^2+a_1{}^2+a_2{}^2)-2\}(bc+b_1c_1+b_2c_2);$$

also nach 6):

$$8) \ldots\ldots \begin{cases} uv \asymp (y-2)w, \\ vw \asymp (z-2)u, \\ wu \asymp (x-2)v. \end{cases}$$

Aus diesen Aequivalenzen 8) folgt nach §. 14.:

$$uvw \asymp (y-2)w^2,$$
$$uvw \asymp (z-2)u^2,$$
$$uvw \asymp (x-2)v^2;$$

also nach §. 8.:

$$9) \ldots\ldots (x-2)v^2 \asymp (y-2)w^2 \asymp (z-2)u^2.$$

Aus den Aequivalenzen 7) folgt nach §. 12.:

$$xy+2z-3 \asymp u^2,$$
$$yz+2x-3 \asymp v^2,$$
$$zx+2y-3 \asymp w^2;$$

also nach §. 14.:

$$(z-2)(xy+2z-3) \asymp (z-2)u^2,$$
$$(x-2)(yz+2x-3) \asymp (x-2)v^2,$$
$$(y-2)(zx+2y-3) \asymp (y-2)w^2;$$

also wegen 9) nach §. 9.:

$$10) \quad (x-2)(yz+2x-3) \asymp (y-2)(zx+2y-3) \asymp (z-2)(xy+2z-3),$$

so dass wir also die drei folgenden Aequivalenzen haben:

$$(x-2)(yz+2x-3) \asymp (y-2)(zx+2y-3),$$
$$(y-2)(zx+2y-3) \asymp (z-2)(xy+2z-3),$$
$$(z-2)(xy+2z-3) \asymp (x-2)(yz+2x-3);$$

oder, wenn man die Producte entwickelt, die folgenden Aequivalenzen:

$$xyz-2yz+2x^2-7x+6 \asymp xyz-2zx+2y^2-7y+6,$$
$$xyz-2zx+2y^2-7y+6 \asymp xyz-2xy+2z^2-7z+6,$$
$$xyz-2xy+2z^2-7z+6 \asymp xyz-2yz+2x^2-7x+6;$$

aus denen sich nach §. 12. ferner nach und nach die folgenden Aequivalenzen ergeben:

$$-2yz+2x^2-7x \simeq -2zx+2y^2-7y,$$
$$-2zx+2y^2-7y \simeq -2xy+2z^2-7z,$$
$$-2xy+2z^2-7z \simeq -2yz+2x^2-7x;$$

$$2(x^2-y^2)+2(x-y)z-7(x-y) \simeq 0,$$
$$2(y^2-z^2)+2(y-z)x-7(y-z) \simeq 0,$$
$$2(z^2-x^2)+2(z-x)y-7(z-x) \simeq 0;$$

also:

$$11) \ldots\ldots \begin{cases} (x-y)\{2(x+y+z)-7\} \simeq 0, \\ (y-z)\{2(x+y+z)-7\} \simeq 0, \\ (z-x)\{2(x+y+z)-7\} \simeq 0. \end{cases}$$

Nach dem aus §. 2. bekannten allgemeinen Begriffe der Aequivalenzen sind also die drei Producte:

$$(x-y)\{2(x+y+z)-7\},$$
$$(y-z)\{2(x+y+z)-7\},$$
$$(z-x)\{2(x+y+z)-7\}$$

durch $1+i^2$ ohne Rest theilbar. Wäre nun

$$2(x+y+z)-7$$

durch $1+i^2$ ohne Rest theilbar, so wäre nach dem allgemeinen Begriffe der Aequivalenzen:

$$2(x+y+z) \simeq 7,$$

also, wenn man auf beiden Seiten mit $\frac{1}{2}$ multiplicirt, nach §. 14.:

$$12) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad x+y+z \simeq \tfrac{7}{2}.$$

Nach den Voraussetzungen des Satzes ist aber:

$$a^2+b^2+c^2 \simeq 1,$$
$$a_1^2+b_1^2+c_1^2 \simeq 1,$$
$$a_2^2+b_2^2+c_2^2 \simeq 1;$$

also, wenn man addirt, nach §. 10.:

$$(a^2+a_1^2+a_2^2)+(b^2+b_1^2+b_2^2)+(c^2+c_1^2+c_2^2) \simeq 3,$$

folglich nach 6):

$$13) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad x+y+z \simeq 3.$$

Vergleicht man die Aequivalenzen 12) und 13) mit einander, so erhält man nach §. 8. die Aequivalenz:

$$\tfrac{7}{3} \simeq 3,$$

was ferner zu der offenbar ungereimten Aequivalenz

$$\tfrac{7}{3} - 3 \simeq 0 \quad \text{oder} \quad \tfrac{1}{3} \simeq 0$$

führt. Daher ist es falsch, dass

$$2(x+y+z)-7$$

durch $1+i^2$ ohne Rest theilbar sein könne, und diese Grösse ist daher durch $1+i^2$ nicht ohne Rest theilbar. Da nun aber nach dem Obigen die Producte:

$$(x-y)\{2(x+y+z)-7\},$$
$$(y-z)\{2(x+y+z)-7\},$$
$$(z-x)\{2(x+y+z)-7\}$$

sämmtlich durch $1+i^2$ ohne Rest theilbar sind; so sind nach §. 19. die Differenzen

$$x-y, \quad y-z, \quad z-x$$

sämmtlich durch $1+i^2$ ohne Rest theilbar, und nach dem allgemeinen Begriffe der Aequivalenzen ist also:

$$x \simeq y, \quad y \simeq z, \quad z \simeq x$$

oder kürzer:

14) . . . . $x \simeq y \simeq z.$

Hiernach ist also:

$$x \simeq x,$$
$$y \simeq x,$$
$$z \simeq x;$$

folglich, wenn man addirt, nach §. 10.:

$$x+y+z \simeq 3x,$$

also, weil wegen der Voraussetzungen des Satzes nach 13):

$$x+y+z \simeq 3$$

ist, nach §. 8.:

$$3x \simeq 3,$$

folglich, wenn man mit $\tfrac{1}{3}$ auf beiden Seiten multiplicirt, nach §. 14.:

$$x \simeq 1,$$

folglich wegen 14) nach §. 8.:

15) . . . . . . $x \succeq 1, \quad y \succeq 1, \quad z \succeq 1.$

Nach §. 14. und §. 15. ist also auch:

$$16) \ldots \left\{ \begin{array}{lll} 2x \succeq 2, & 2y \succeq 2, & 2z \succeq 2; \\ xy \succeq 1, & yz \succeq 1, & zx \succeq 1; \end{array} \right.$$

und da nun aus den Aequivalenzen 7) nach §. 12. leicht die Aequivalenzen:

$$u^2 \succeq xy + 2z - 3,$$
$$v^2 \succeq yz + 2x - 3,$$
$$w^2 \succeq zx + 2y - 3$$

folgen; so ist wegen 16) nach §. 25. 2.:

$$u^2 \succeq 1 + 2 - 3,$$
$$v^2 \succeq 1 + 2 - 3,$$
$$w^2 \succeq 1 + 2 - 3;$$

also:

$$u^2 \succeq 0, \quad v^2 \succeq 0, \quad w^2 \succeq 0;$$

folglich nach §. 20. 2.:

17) . . . . . . $u \succeq 0, \quad v \succeq 0, \quad w \succeq 0.$

Nach 15), 17), 6) ist also:

$$a^2 + a_1^2 + a_2^2 \succeq 1,$$
$$b^2 + b_1^2 + b_2^2 \succeq 1,$$
$$c^2 + c_1^2 + c_2^2 \succeq 1$$

und

$$ab + a_1b_1 + a_2b_2 \succeq 0,$$
$$bc + b_1c_1 + b_2c_2 \succeq 0,$$
$$ca + c_1a_1 + c_2a_2 \succeq 0;$$

w. z. b. w.

III.

Zusatz. Wenn sämmtliche Grössen Constanten sind, d. h. als von i unabhängig betrachtet werden, und

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$
$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1,$$
$$a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1$$

und

$$aa_1 + bb_1 + cc_1 = 0,$$
$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0,$$
$$a_2 a + b_2 b + c_2 c = 0$$

ist, so ist:

$$a^2 + a_1^2 + a_2^2 = 1,$$
$$b^2 + b_1^2 + b_2^2 = 1,$$
$$c^2 + c_1^2 + c_2^2 = 1$$

und

$$ab + a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0,$$
$$bc + b_1 c_1 + b_2 c_2 = 0,$$
$$ca + c_1 a_1 + c_2 a_2 = 0.$$

Wegen der Voraussetzung ist nämlich nach §. 3. 1.:

$$a^2 + b^2 + c^2 \asymp 1,$$
$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 \asymp 1,$$
$$a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 \asymp 1$$

und

$$aa_1 + bb_1 + cc_1 \asymp 0,$$
$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 \asymp 0,$$
$$a_2 a + b_2 b + c_2 c \asymp 0;$$

folglich nach dem Lehrsatze in II.:

$$a^2 + a_1^2 + a_2^2 \asymp 1,$$
$$b^2 + b_1^2 + b_2^2 \asymp 1,$$
$$c^2 + c_1^2 + c_2^2 \asymp 1$$

und

$$ab + a_1 b_1 + a_2 b_2 \asymp 0,$$
$$bc + b_1 c_1 + b_2 c_2 \asymp 0,$$
$$ca + c_1 a_1 + c_2 a_2 \asymp 0;$$

also, weil nach der Voraussetzung alle Grössen Constanten sind, nach §. 3. 5.:

$$a^2 + a_1^2 + a_2^2 = 1,$$
$$b^2 + b_1^2 + b_2^2 = 1,$$
$$c^2 + c_1^2 + c_2^2 = 1$$

und

$$ab + a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0,$$
$$bc + b_1 c_1 + b_2 c_2 = 0,$$
$$ca + c_1 a_1 + c_2 a_2 = 0;$$

w. z. b. w.

IV.

Lehrsatz.

Wenn

$$a^2 + b^2 - c^2 \asymp 1,$$
$$a_1^2 + b_1^2 - c_1^2 \asymp 1,$$
$$-a_2^2 - b_2^2 + c_2^2 \asymp 1$$

ıd

$$aa_1 + bb_1 - cc_1 \asymp 0,$$
$$a_1a_2 + b_1b_2 - c_1c_2 \asymp 0,$$
$$a_2a + b_2b - c_2c \asymp 0$$

t; so ist immer auch:

$$a^2 + a_1^2 - a_2^2 \asymp 1,$$
$$b^2 + b_1^2 - b_2^2 \asymp 1,$$
$$-c^2 - c_1^2 + c_2^2 \asymp 1$$

nd

$$ab + a_1b_1 - a_2b_2 \asymp 0,$$
$$bc + b_1c_1 - b_2c_2 \asymp 0,$$
$$ca + c_1a_1 - c_2a_2 \asymp 0.$$

Beweis. Weil nach §. 30.

$$-1 \asymp i^2$$

ıt, so ist nach §. 14.:

$$-c^2 \asymp c^2i^2$$
$$\asymp (ci)^2,$$
$$-c_1^2 \asymp c_1^2i^2$$
$$\asymp (c_1i)^2,$$
$$-a_2^2 \asymp a_2^2i^2$$
$$\asymp (a_2i)^2,$$
$$-b_2^2 \asymp b_2^2i^2$$
$$\asymp (b_2i)^2;$$

ırner:

$$-cc_1 \asymp cc_1i^2$$
$$\asymp (ci)(c_1i).$$

Veil man nun die durch die Voraussetzung des Satzes gegebe-
en Aequivalenzen offenbar auf folgende Art schreiben kann:

$$(-a)^2+(-b)^2+(-c^2)\simeq 1,$$
$$(-a_1)^2+(-b_1)^2+(-c_1^2)\simeq 1,$$
$$(-a_2^2)+(-b_2^2)+c_2^2\simeq 1$$

und

$$(-a)(-a_1)+(-b)(-b_1)+(-cc_1)\simeq 0,$$
$$(-a_1)(a_2i)+(-b_1)(b_2i)+(c_1i)c_2\simeq 0,$$
$$(a_2i)(-a)+(b_2i)(-b)+c_2(ci)\simeq 0;$$

so ergeben sich wegen des vorher Bewiesenen nach §. 25. 2. d folgenden Aequivalenzen:

$$(-a)^2+(-b)^2+(ci)^2\simeq 1,$$
$$(-a_1)^2+(-b_1)^2+(c_1i)^2\simeq 1,$$
$$(a_2i)^2+(b_2i)^2+c_2^2\simeq 1$$

und

$$(-a)(-a_1)+(-b)(-b_1)+(ci)(c_1i)\simeq 0,$$
$$(-a_1)(a_2i)+(-b_1)(b_2i)+(c_1i)c_2\simeq 0.$$
$$(a_2i)(-a)+(b_2i)(-b)+c_2(ci)\simeq 0.$$

Aus diesen Aequivalenzen folgen aber nach dem in II. bewiesenen Lehrsatze unmittelbar die folgenden Aequivalenzen:

$$(-a)^2+(-a_1)^2+(a_2i)^2\simeq 1,$$
$$(-b)^2+(-b_1)^2+(b_2i)^2\simeq 1,$$
$$(ci)^2+(c_1i)^2+c_2^2\simeq 1$$

und

$$(-a)(-b)+(-a_1)(-b_1)+(a_2i)(b_2i)\simeq 0,$$
$$(-b)(ci)+(-b_1)(c_1i)+(b_2i)c_2\simeq 0,$$
$$(ci)(-a)+(c_1i)(-a_1)+c_2(a_2i)\simeq 0$$

oder

$$a^2+a_1^2+a_2^2i^2\simeq 1,$$
$$b^2+b_1^2+b_2^2i^2\simeq 1,$$
$$c^2i^2+c_1^2i^2+c_2^2\simeq 1$$

und

$$ab+a_1b_1+a_2b_2i^2\simeq 0,$$
$$-bci-b_1c_1i+b_2c_2i\simeq 0,$$
$$-cai-c_1a_1i+c_2a_2i\simeq 0.$$

Weil nun aber

$$i^2\simeq -1$$

und folglich:

$$a_2{}^2 i^2 \succeq -a_2{}^2,$$
$$b_2{}^2 i^2 \succeq -b_2{}^2,$$
$$c^2 i^2 \succeq -c^2,$$
$$c_1{}^2 i^2 \succeq -c_1{}^2,$$
$$a_2 b_2 i^2 \succeq -a_2 b_2$$

so ist, indem man zugleich in der fünfsten und sechsten sechs obigen Aequivalenzen den allen Gliedern gemeinschaftn Factor $-i$ weglässt, was nach §. 20. 1. offenbar zulässig ist:

$$a^2 + a_1{}^2 - a_2{}^2 \succeq 1,$$
$$b^2 + b_1{}^2 - b_2{}^2 \succeq 1,$$
$$-c^2 - c_1{}^2 + c_2{}^2 \succeq 1$$

$$ab + a_1 b_1 - a_2 b_2 \succeq 0,$$
$$bc + b_1 c_1 - b_2 c_2 \succeq 0,$$
$$ca + c_1 a_1 - c_2 a_2 \succeq 0;$$

. b. w.

V.

Zusatz. Wenn sämmtliche Grössen Constanten l und

$$a^2 + b^2 - c^2 = 1,$$
$$a_1{}^2 + b_1{}^2 - c_1{}^2 = 1,$$
$$-a_2{}^2 - b_2{}^2 + c_2{}^2 = 1$$

$$aa_1 + bb_1 - cc_1 = 0,$$
$$a_1 a_2 + b_1 b_2 - c_1 c_2 = 0,$$
$$a_2 a + b_2 b - c_2 c = 0$$

so ist:

$$a^2 + a_1{}^2 - a_2{}^2 = 1,$$
$$b^2 + b_1{}^2 - b_2{}^2 = 1,$$
$$-c^2 - c_1{}^2 + c_2{}^2 = 1$$

$$ab + a_1 b_1 - a_2 b_2 = 0,$$
$$bc + b_1 c_1 - b_2 c_2 = 0,$$
$$ca + c_1 a_1 - c_2 a_2 = 0.$$

Dieser Zusatz wird durch ganz ähnliche Schlüsse aus (Lehrsatze in IV. abgeleitet, wie der Zusatz in III. aus dem L(satze in II. abgeleitet wurde.

VI.

Lehrsatz.

Wenn

$$a^2 - b^2 - c^2 \cong 1,$$
$$-a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 \cong 1,$$
$$-a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 \cong 1$$

und

$$aa_1 - bb_1 - cc_1 \cong 0,$$
$$a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 \cong 0,$$
$$a_2a - b_2b - c_2c \cong 0$$

ist; so ist immer auch:

$$a^2 - a_1^2 - a_2^2 \cong 1,$$
$$-b^2 + b_1^2 + b_2^2 \cong 1,$$
$$-c^2 + c_1^2 + c_2^2 \cong 1\cdot$$

und

$$ab - a_1b_1 - a_2b_2 \cong 0,$$
$$bc - b_1c_1 - b_2c_2 \cong 0,$$
$$ca - c_1a_1 - c_2a_2 \cong 0.$$

Beweis. Weil nach §. 30.

$$-1 \cong i^2$$

ist, so ist nach §. 14.:

$$-b^2 \cong b^2i^2$$
$$\cong (bi)^2,$$
$$-c^2 \cong c^2i^2$$
$$\cong (ci)^2,$$
$$-a_1^2 \cong a_1^2i^2$$
$$\cong (a_1i)^2,$$
$$-a_2^2 \cong a_2^2i^2$$
$$\cong (a_2i)^2$$

und

$$-a_1a_2 \cong a_1a_2i^2$$
$$\cong (a_1i)(a_2i).$$

l man nun die durch die Voraussetzung des Satzes gegebenen uivalenzen offenbar auf folgende Art schreiben kann:

$$(-a)^2 + (-b^2) + (-c^2) \succeq 1,$$
$$(-a_1^2) + b_1^2 + c_1^2 \succeq 1,$$
$$(-a_2^2) + b_2^2 + c_2^2 \succeq 1$$

$$(-a)(a_1 i) + (bi)b_1 + (ci)c_1 \succeq 0,$$
$$(-a_1 a_2) + b_1 b_2 + c_1 c_2 \succeq 0,$$
$$(a_2 i)(-a) + b_2(bi) + c_2(ci) \succeq 0;$$

rgeben sich mittelst des vorher Bewiesenen nach §. 25. 2. folgenden Aequivalenzen:

$$(-a)^2 + (bi)^2 + (ci)^2 \succeq 1,$$
$$(a_1 i)^2 + b_1^2 + c_1^2 \succeq 1,$$
$$(a_2 i)^2 + b_2^2 + c_2^2 \succeq 1$$

$$(-a)(a_1 i) + (bi)b_1 + (ci)c_1 \succeq 0,$$
$$(a_1 i)(a_2 i) + b_1 b_2 + c_1 c_2 \succeq 0,$$
$$(a_2 i)(-a) + b_2(bi) + c_2(ci) \succeq 0.$$

diesen Aequivalenzen folgen aber nach dem in II. bewiese· Lehrsatze unmittelbar die folgenden Aequivalenzen:

$$(-a)^2 + (a_1 i)^2 + (a_2 i)^2 \succeq 1,$$
$$(bi)^2 + b_1^2 + b_2^2 \succeq 1,$$
$$(ci)^2 + c_1^2 + c_2^2 \succeq 1$$

$$(-a)(bi) + (a_1 i)b_1 + (a_2 i)b_2 \succeq 0,$$
$$(bi)(ci) + b_1 c_1 + b_2 c_2 \succeq 0,$$
$$(ci)(-a) + c_1(a_1 i) + c_2(a_2 i) \succeq 0,$$

$$a^2 + a_1^2 i^2 + a_2^2 i^2 \succeq 1,$$
$$b^2 i^2 + b_1^2 + b_2^2 \succeq 1,$$
$$c^2 i^2 + c_1^2 + c_2^2 \succeq 1$$

$$-abi + a_1 b_1 i + a_2 b_2 i \succeq 0,$$
$$bci^2 + b_1 c_1 + b_2 c_2 \succeq 0,$$
$$-cai + c_1 a_1 i + c_2 a_2 i \succeq 0.$$

nun aber

$$i^2 \succeq -1$$

ist, so ist:

$$a_1^2 i^2 \succeq -a_1^2,$$
$$a_2^2 i^2 \succeq -a_2^2,$$
$$b^2 i^2 \succeq -b^2,$$
$$c^2 i^2 \succeq -c^2,$$
$$bci^2 \succeq -bc;$$

folglich, wenn man zugleich in der vierten und sechsten der sechs obigen Aequivalenzen den allen Gliedern gemeinschaftlichen Factor $-i$ weglässt, was nach §. 20. 1. offenbar verstattet ist:

$$a^2 - a_1^2 - a_2^2 \succeq 1,$$
$$-b^2 + b_1^2 + b_2^2 \succeq 1,$$
$$-c^2 + c_1^2 + c_2^2 \succeq 1$$

und

$$ab - a_1 b_1 - a_2 b_2 \succeq 0,$$
$$bc - b_1 c_1 - b_2 c_2 \succeq 0,$$
$$ca - c_1 a_1 - c_2 a_2 \succeq 0;$$

w. z. b. w.

VII.

Zusatz. Wenn sämmtliche Grössen Constante sind und

$$a^2 - b^2 - c^2 = 1,$$
$$-a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1,$$
$$-a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1$$

und

$$aa_1 - bb_1 - cc_1 = 0,$$
$$a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 = 0,$$
$$a_2 a - b_2 b - c_2 c = 0$$

ist; so ist:

$$a^2 - a_1^2 - a_2^2 = 1,$$
$$-b^2 + b_1^2 + b_2^2 = 1,$$
$$-c^2 + c_1^2 + c_2^2 = 1$$

und

$$ab - a_1 b_1 - a_2 b_2 = 0,$$
$$bc - b_1 c_1 - b_2 c_2 = 0,$$
$$ca - c_1 a_1 - c_2 a_2 = 0.$$

Dieser Zusatz wird durch ganz ähnliche Schlüsse aus dem ,ehrsatze in VI. abgeleitet, wie der Zusatz in III. aus dem Lehr-atze in II. abgeleitet wurde.

VIII.

Bemerkung. Ich will das Vorhergehende jetzt nicht wei-:r ausführen, indem ich mich begnüge, nur noch das Folgende a bemerken.

Den in III. aus dem allgemeineren Satze in II. abgeleiteten atz, dass nämlich aus den Gleichungen:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$
$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1,$$
$$a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1$$

ıd

$$aa_1 + bb_1 + cc_1 = 0,$$
$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0,$$
$$a_2a + b_2b + c_2c = 0$$

ımer die Gleichungen

$$a^2 + a_1^2 + a_2^2 = 1,$$
$$b^2 + b_1^2 + b_2^2 = 1,$$
$$c^2 + c_1^2 + c_2^2 = 1$$

ıd

$$ab + a_1b_1 + a_2b_2 = 0,$$
$$bc + b_1c_1 + b_2c_2 = 0,$$
$$ca + c_1a_1 + c_2a_2 = 0$$

lgen, kann man für sich mit den gewöhnlichen Hülfsmitteln :r allgemeinen Arithmetik, also ganz unabhängig von der in der ırhergehenden Abhandlung entwickelten Theorie der Aequiva-nzen, ganz eben so beweisen wie den allgemeineren Satz in II., ozu es eigentlich völlig hinreicht, in II. das Zeichen $\asymp$ durch ıs Zeichen $=$ zu ersetzen, was daher hier nicht weiter aus-ıführt zu werden braucht. Setzen wir nun aber voraus, dass es geschehen sei, und nehmen an, dass diese Entwickelungen, so auch der obige Satz, in völliger Allgemeinheit für reelle und aginäre Grössen — Alles hier in dem gewöhnlichen von ters her gebräuchlichen Sinne genommen — gültig seien; so würde ın mittelst der gewöhnlichen Lehre von den imaginären Grös-

sen die Sätze V. und VII. aus dem obigen Satze, nämlich aus dem Satze III., auf folgende Art ableiten; und dass solche Ableitungen auch in anderen Fällen schon oft gemacht worden sind, weiss man, wenn man sich nur etwa an die Ableitung der Lehre von der Hyperbel aus der Lehre von der Ellipse erinnert.

Setzen wir erstens voraus, dass

$$a^2+b^2-c^2=1,$$
$$a_1{}^2+b_1{}^2-c_1{}^2=1,$$
$$-a_2{}^2-b_2{}^2+c_2{}^2=1$$

und

$$aa_1+bb_1-cc_1=0,$$
$$a_1a_2+b_1b_2-c_1c_2=0,$$
$$a_2a+b_2b-c_2c=0$$

sei; so können wir diese als richtig vorausgesetzten Gleichungen mittelst der gewöhnlichen Bezeichnung der imaginären Grössen, deren ich mich hier absichtlich bediene und bedienen muss, offenbar auf folgende Art schreiben *):

$$(-a)^2+(-b)^2+(\sqrt{-c^2})^2=1,$$
$$(-a_1)^2+(-b_1)^2+(\sqrt{-c_1{}^2})^2=1,$$
$$(\sqrt{-a_2{}^2})^2+(\sqrt{-b_2{}^2})^2+c_2{}^2=1$$

und

$$(-a)(-a_1)+(-b)(-b_1)+\sqrt{-c^2}.\sqrt{-c_1{}^2}=0,$$
$$(-a_1)\sqrt{-a_2{}^2}+(-b_1)\sqrt{-b_2{}^2}+\sqrt{-c_1{}^2}.c_2=0,$$
$$\sqrt{-a_2{}^2}.(-a)+\sqrt{-b_2{}^2}.(-b)+c_2\sqrt{-c^2}=0;$$

und schliessen nun unter den gemachten Voraussetzungen, namentlich also mit Bezug auf den als bewiesen vorausgesetzten Satz III., hieraus, dass nun auch die folgenden Gleichungen erfüllt seien:

$$(-a)^2+(-a_1)^2+(\sqrt{-a_2{}^2})^2=1,$$
$$(-b)^2+(-b_1)^2+(\sqrt{-b_2{}^2})^2=1,$$
$$(\sqrt{-c^2})^2+(\sqrt{-c_1{}^2})^2+c_2{}^2=1$$

---

*) Wobei man sich aus den Elementen an die bekannten Gleichungen:

$$\sqrt{-a^2}=a\sqrt{-1},\quad (\sqrt{-a^2})^2=-a^2,\quad \sqrt{-a^2}.\sqrt{-b^2}=-ab$$

zu erinnern hat.

und

$$(-a)(-b)+(-a_1)(-b_1)+\sqrt{-a_2^2}.\sqrt{-b_2^2}=0,$$
$$(-b)\sqrt{-c^2}+(-b_1)\sqrt{-c_1^2}+\sqrt{-b_2^2}.c_2=0,$$
$$\sqrt{-c^2}.(-a)+\sqrt{-c_1^2}.(-a_1)+c_2\sqrt{-a_2^2}=0;$$

also die Gleichungen:

$$a^2+a_1^2-a_2^2=1,$$
$$b^2+b_1^2-b_2^2=1,$$
$$-c^2-c_1^2+c_2^2=1$$

und

$$ab+a_1b_1-a_2b_2=0,$$
$$-bc\sqrt{-1}-b_1c_1\sqrt{-1}+b_2c_2\sqrt{-1}=0,$$
$$-ca\sqrt{-1}-c_1a_1\sqrt{-1}+c_2a_2\sqrt{-1}=0;$$

oder die Gleichungen:

$$a^2+a_1^2-a_2^2=1,$$
$$b^2+b_1^2-b_2^2=1,$$
$$-c^2-c_1^2+c_2^2=1$$

und

$$ab+a_1b_1-a_2b_2=0,$$
$$bc+b_1c_1-b_2c_2=0,$$
$$ca+c_1a_1-c_2a_2=0;$$

welches der Satz V. ist.

Setzen wir zweitens voraus, dass

$$a^2-b^2-c^2=1,$$
$$-a_1^2+b_1^2+c_1^2=1,$$
$$-a_2^2+b_2^2+c_2^2=1$$

und

$$aa_1-bb_1-cc_1=0,$$
$$a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2=0,$$
$$a_2a-b_2b-c_2c=0$$

sei; so können diese Gleichungen mittelst der gewöhnlichen Bezeichnung der imaginären Grössen offenbar auf folgende Art geschrieben werden:

$$(-a)^2+(\sqrt{-b^2})^2+(\sqrt{-c^2})^2=1,$$
$$(\sqrt{-a_1^2})^2+b_1^2+c_1^2=1,$$
$$(\sqrt{-a_2^2})^2+b_2^2+c_2^2=1$$

und

$$(-a)\sqrt{-a_1^2}+\sqrt{-b^2}.b_1+\sqrt{-c^2}.c_1=0,$$
$$\sqrt{-a_1^2}.\sqrt{-a_2^2}+b_1b_2+c_1c_2=0,$$
$$\sqrt{-a_2^2}.(-a)+b_2\sqrt{-b^2}+c_2\sqrt{-c^2}=0;$$

und aus diesen Gleichungen folgen wegen des als bewiesen voi ausgesetzten Satzes III. unmittelbar die folgenden Gleichungen

$$(-a)^2+(\sqrt{-a_1^2})^2+(\sqrt{-a_2^2})^2=1,$$
$$(\sqrt{-b^2})^2+b_1^2+b_2^2=1,$$
$$(\sqrt{-c^2})^2+c_1^2+c_2^2=1$$

und

$$(-a)\sqrt{-b^2}+\sqrt{-a_1^2}.b_1+\sqrt{-a_2^2}.b_2=0,$$
$$\sqrt{-b^2}.\sqrt{-c^2}+b_1c_1+b_2c_2=0,$$
$$\sqrt{-c^2}.(-a)+c_1\sqrt{-a_1^2}+c_2\sqrt{-a_2^2}=0;$$

also die Gleichungen:

$$a^2-a_1^2-a_2^2=1,$$
$$-b^2+b_1^2+b_2^2=1,$$
$$-c^2+c_1^2+c_2^2=1$$

und

$$-ab.\sqrt{-1}+a_1b_1\sqrt{-1}+a_2b_2\sqrt{-1}=0,$$
$$-bc+b_1c_1+b_2c_2=0,$$
$$-ca\sqrt{-1}+c_1a_1\sqrt{-1}+c_2a_2\sqrt{-1}=0;$$

oder die Gleichungen:

$$a^2-a_1^2-a_2^2=1,$$
$$-b^2+b_1^2+b_2^2=1,$$
$$-c^2+c_1^2+c_2^2=1$$

und

$$ab-a_1b_1-a_2b_2=0,$$
$$bc-b_1c_1-b_2c_2=0,$$
$$ca-c_1a_1-c_2a_2=0;$$

welches der Satz VII. ist.

Ich wiederhole hier ausdrücklich, dass die zunächst vorher gehenden Ableitungen für jetzt ganz im Sinne der gewöhnlichen, von Alters her gebräuchlichen Lehre von den imaginären Grössen gemacht sind und gemacht sein sollen; wie ich aber selbst über solche Ableitungen und diese ganze Lehre denke: darüber weiter mich auszusprechen, ist für jetzt gar nicht mein Zweck und meine Absicht, und begnüge ich mich deshalb vorläufig, auf die Einleitung zu der unmittelbar vorhergehenden Abhandlung und meine in derselben in Aussicht gestellten weiteren, späterhin zu veröffentlichenden Untersuchungen über alle diese Gegenstände zu verweisen. In der vorhergehenden Abhandlung und vorher in II.—VII. habe ich mich aber, wie man natürlich nicht unbemerkt gelassen haben wird, meinem jetzigen Zwecke gemäss, ganz in dem Bereiche der sogenannten reellen Grössen gehalten.

XXVIII.

Miscellen.

Weiteres über den handschriftlichen Fund aus der Thorner Gymnasial-Bibliothek.

(S. in diesem Theile S. 371.)

Thorn den 10. October 1865. Da Sie mir erlaubt haben, meine kurze Notiz über die Handschrift des Bradwardin der hiesigen Königlichen Gymnasialbibliothek durch einige weitere Bemerkungen theils zu berichtigen, theils zu ergänzen, so erlaube ich mir, dies hiermit zu thun. Weitere Untersuchungen der Handschrift, sowie Briefwechsel mit genauen Kennern der mittelalterlichen mathematischen Literatur, haben die Wichtigkeit unserer Handschrift immermehr hervortreten lassen, so dass einer jener Kenner, der

durch seine vielfachen Publicationen und die Unterstützung, die er der Wissenschaft stets von Neuem angedeihen lässt, weit berühmte Don Baldassarre Boncompagni dei Principi di Piombino in Rom, eine genaue Analyse derselben auf seine Kosten im Drucke erscheinen lassen wird. Die werthvollste unter den Abhandlungen scheint darnach zunächst die erste zu sein, die ich trotz grosser Zweifel, die namentlich Prof. Dr. Cantor zu Heidelberg in Betreff der Autorschaft gehegt hat, doch unbedingt dem Bradwardin zuschreibe, nämlich die auf dem Einbande genannte Perspectiva Braswardini. Zu der Bestimmtheit meiner Behauptung bringen mich zwei Handschriften der Vatikanischen Bibliothek, die jedenfalls ebenso Bradwardinisch sein sollen, nämlich: 1. Tractatus de Geometria Perspectiva, auctore Guilielmo Braduardino, 2. Guilielmi Vradwardini Geometria et Perspectiva (m. s. Bibliotheca Bibliothecarum Manuscriptorum Bernhardi de Montfaucon Th. I., Paris 1739 Fol. p. 38 und p. 88 oder Heilbronner, Historia Matheseos universae, Lipsiae 1742. 4° p. 543 und 544.). Beide Handschriften dürften mit der unsern sich wohl als identisch ausweisen. Die zweite Abhandlung über Optik, von geringerer Wichtigkeit, da sie vielfältig gedruckt ist, ist nicht, wie ich anfangs meinte, Bradwardin zugehörig, sondern ist eine vollständige Handschrift des im Mittelalter für classisch geltenden Buches Joannis Archiepiscopi Cantuariensis Perspectivae Communis libri tres. Venetiis 1504, dann zu Cöln, Leipzig, Nürnberg und sonst. Der vollständige Name des Autors ist Johannes Peccham, Erzbischof von Canterbury. Dieser Name sowohl als der des Erzbischofssitzes ist in den Handschriften und Ausgaben so verdreht — statt Pecchamus steht Pechamus, Pechebam, Pethanus, Pisanus, statt Cantuariensis Cameracensis — dass dadurch die grösste Verwirrung entstanden ist, und Heilbronner a. a. O. S. 497 §. 557 z. B. eine Ausgabe dieser Optik, Norimbergae 1542 dem durch D. B. Boncompagni's aufopfernde Bemühungen erst richtig gewürdigten Leonardo Pisano zuschreibt, und ebenso Vossius de scientiis mathematicis, Amstelaedami 1650 p. 110 §. 9 und 11 zwischen Johannes Cantuariensis und Johannes Cameracensis unterscheidet und beide nochmals von Johannes Peccamus trennt, ja sogar S. 111 §. 13 dasselbe Werk nochmals unter dem Namen Johannes Petsan aufführt. Peccham ist nach Cave, Scriptor. Ecclesiast. Historia literaria, Genevae 1705 p. 647 zu Chichester in der Grafschaft Sussex von niedrigen Eltern geboren. Da er, wie Heilbroner a. a. O. p. 465 und Cave a. a. O. nach Leland anführen, einsah, dass er in seinem Vaterlande nicht so leicht sich hervorzuthun im Stande sein würde, ging er nach Paris, beendigte dort seine Studien und kehrte dann nach England zurück, wo er in Oxford mit solchem Beifall Vorlesungen

hielt, dass er von seinen Ordensbrüdern, den Franziskanern, zum Provinzial für England erwählt wurde. Er blieb aber nicht lange in England, sondern kehrte nach Paris zurück, darauf nach Leiden, wo er die Canonikatswürde erhielt. Von hier begab er sich nach Rom, wo er bei dem Papste sehr persona grata war, so dass er Lector Palatinus wurde. Als bald darauf der Erzbischof von Canterbury Robert Kilwarby die Kardinalswürde erhielt, wurde Peccham gegen den Willen des Capitels, wie es scheint durch Simonie, vom Papste zum Erzbischof gemacht; denn gleich nach seiner Inthronisation musste er 4000 Mark nach Rom senden bei Strafe des Bannes, wie Cave a. a. O. mittheilt. Geweiht wurde er in Rom am 6. März 1279 und starb am 8. December 1292. Wichtiger als dieses Werk sind die beiden folgenden, nämlich das Liber Carastonis von Thabit ben Corra, d. h. wie zuerst Steinschneider nachgewiesen (Intorno ad alcuni Matematici del medio evo etc. Roma, 1862—63) „Ueber die Waage", ebenso das schon in meiner ersten Notiz erwähnte liber trium fratrum de Geometria. Nach Boncompagni sind diese beiden Manuscripte vielleicht die wichtigsten des ganzen Codex. Der Analyse der Handschriften lasse ich dieselben vielleicht als Anhang folgen.

Der tractatus oder richtiger Algorismus Proportionum ist nicht, wie ich ursprünglich annahm, von Bradwardin, sondern von Nicolaus d'Orém, Bischof von Lisieux, obwohl es auch eine Theoria Proportionum von Bradwardin giebt (m. s. Heilbronner a. a. O. p. 605, §. 266 ex codice Bodlejano.). d'Orém war nach der Biographie Universelle T. 32 Paris 1822. 8. im Dorfe Allemagne bei Caen in der Normandie geboren. Er machte seine Studien in Paris (in unserer Handschrift heisst er Parisius) und wurde 1356 Rector des Gymnasiums zu Navarre. Als solcher schrieb er die obige Schrift, wie aus dem Datum der Handschrift 1359 wohl zur Genüge hervorgeht. 1361 wurde er Decan zu Rouen, darauf Erzieher Carl's V. le Sage und auf dessen Ansuchen 1377 zum Bischofe von Lisieux gewählt. Er starb am 11. Juli 1382. Auch als theologischer Schriftsteller ist er berühmt, besonders durch eine Predigt über den Text aus Jesaja, Juxta est salus mea, die er in Avignon dem Papste und den Cardinälen hielt und in der er ihre Laster und Schwächen schonungslos geisselte. Ein anderes Werk von ihm: Traité de la sphère, ist auch gedruckt Paris 1546. Der Algorismus Proportionum ist bis jetzt Manuscript geblieben.

Von den übrigen Abhandlungen hebe ich die Geometria Bradwardini nochmals hervor, da dieselbe nicht den Titel Geometria assecutiva et Arismetica führt, sondern die Anfangsworte derselben lauten: Geometria assecutiva est Arismetice, dann aber vorzüglich

den tractatus de Continuo Bratwardini, der völlig unbekannt zu sein scheint, jedoch so interessante Thatsachen und Untersuchungen enthält, dass sehr zu wünschen wäre, es würde ein vollständiger Abdruck davon veranstaltet. Vielleicht benutze ich einmal den Raum eines Schulprogrammes zur Herausgabe desselben. Auch zur Deutschen Sprichwörter-Literatur liefert die Handschrift noch ein Paar Beispiele; auf dem Umschlage nämlich und dem Titelblatte stehen mit gothischen Lettern folgende beide Sprichworte:

Eyn man zyn ghewant kerit
als en das weter lerit

und das andere;

Wo dy wese ist ghemeyen
do is das gras gheren cleyen.

Ob dieselben anderweitig bekannt sind, wage ich nicht zu entscheiden.

M. Curtze.

Zwei Briefe von Schumacher und Gauss über eine Aufgabe der unbestimmten Analysis.

(Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und H. C. Schumacher. Herausgegeben von C. A. F. Peters. Fünfter Band. Altona. 1863. S. 375.)

Schumacher an Gauss.

Altona, 1847. October 17.

Ich las zufällig gestern Abend in Kästner's Nachrichten von mathematischen Büchern, die er „Geschichte der Mathematik" nennt, und fand Th. 3. p. 294 ein Problem von 3 Schützen angeführt, die respective 50, 66 und 104 Fuss von einander, und alle gleichweit von der Vogelstange, nemlich 65 Fuss abstehen. Aus Neugierde rechnete ich nach und der Halbmesser des einem gradlinichten Dreiecke, dessen Seiten 50, 66 und 104 Fuss sind, umschriebenen Kreises ist wirklich 65 Fuss. Kästner meint, es sei eine nicht ganz leichte Aufgabe, die Seiten eines gradlinichten Dreiecks in ganzen Zahlen so zu bestimmen, dass der Halbmesser des umschriebenen Dreiecks auch in ganzen Zahlen ausgedrückt werde. Mir kommt sie so schwierig vor, dass ich mir die Vorfrage erlaube: war zwischen 1600 und 1650 die unbestimmte Analysis schon so weit ausgebildet, dass man annehmen darf, er, der Verfasser Curtius, sei von dem Dreiecke ausgegangen, und habe

den Halbmesser gesucht? oder ist er nicht vielleicht von dem Halbmesser ausgegangen, und hat für verschiedene Werthe des Halbmessers Dreiecke durch Probiren (etwa durch Zeichnungen concentrischer Kreise) gesucht, und zufälligerweise eine genaue Auflösung getroffen? Wenn ich recht sehe, so kommt die directe Auflösung darauf zurück, in der Gleichung

$$RR = \frac{aabbcc}{4aacc - (aa + cc - bb)^2}$$

für a, b, c solche ganze positive Zahlen zu finden, dass

1) $aabbcc$ sich ohne Rest durch $4aacc - (aa + cc - bb)^2$ dividiren lasse, und dass
2) der Quotient ein Quadrat sei,

wo dann noch alle Auflösungen, bei denen 2 von den 3 Grössen a, b, c kleiner als die dritte sind, verworfen werden müssen.

Vielleicht hat Herr Curtius auch nur die Bedingung 1) erfüllt, und sich unter den Quotienten einen, der ein Quadrat war, ausgesucht.

Gauss an Schumacher.

Die arithmetische Aufgabe würde gewiss Diophant recht gut haben auflösen können, da dazu gar keine tiefere Einsichten, sondern nur eine gewisse Dexterität gehört. Mein Urtheil über Diophant's Verdienste können Sie in der Vorrede der Disquisitiones Arithmeticae (etwas zwischen den Zeilen) lesen. Ich würde mich nicht wundern, wenn die Aufgabe in Diophant's Werke schon vorkäme, habe aber weder Zeit — noch Lust — es deshalb durchzugehen. Lieber schicke ich Ihnen eine allgemeine Auflösung. Diese lässt sich in verschiedenen Formen geben, auch in solchen, die, genauer besehen, der nachfolgenden an Eleganz noch vorzuziehen sind, ich setze aber doch lieber diese her, theils weil der Unterschied überhaupt ganz unerheblich ist, theils weil der Vorzug einer etwas andern Form nur durch einige erläuternde Entwickelungen in's Licht gesetzt werden könnte.

Es seien a, b, f, g vier beliebige ganze positive Zahlen; macht man dann ein Dreieck, dessen Seiten

1) $4abfg(aa + bb)$
2) $4ab(f + g)(aaf - bbg)$ oder $4ab(f + g)(bbg - aaf)$, je nachdem $aaf \gtrless bbg$

3) $4ab(aaff + bbgg)$

sind, so ist der Halbmesser des um das Dreieck beschriebenen Kreises

4) $(aa+bb)(aaff+bbgg)$.

Die Zahlen 1, 2, 3, 4 sind offenbar Ganze; haben sie einen gemeinschaftlichen Divisor, so ist erlaubt, damit alle vier zu dividiren.

Es giebt keine Auflösung, die nicht in dieser Vorschrift enthalten wäre. Curtius' Zahlen erhalten Sie, wenn Sie $a=1$, $b=2$, $f=10$, $g=1$ setzen, und mit dem gemeinschaftlichen Divisor 8 dividiren. Eine andere Auflösung für denselben Halbmesser 65 geht hervor, indem Sie $a=2$, $b=1$, $f=1$, $g=3$ setzen, woraus die Dreiecksseiten 120, 112, 104. Es ist wohl überflüssig zu bemerken, dass man immer a, b, f, g so wählt, dass a keinen Divisor mit b gemein hat, und f keinen mit g, weil sonst das Quadrat eines solchen gemeinschaftlichen Divisors schon von selbst als gemeinschaftlicher Divisor aller 4 Zahlen auftreten würde. Uebrigens ist die Aufgabe etwas ganz elementarisches.

Auch kann man noch hinzusetzen, dass a, b, f, g nicht so gewählt werden dürfen, dass $aaf=bbg$ wird. Die Formeln geben dann zwei einander gleiche Seiten und die dritte $=0$. Mit andern Worten ein Dreieck, von dessen drei Ecken zwei zusammenfallen. Um ein solches lassen sich unendlich viele Kreise beschreiben, oder mit andern Worten, der Halbmesser ist unbestimmt. Aus allen diesen unendlich vielen giebt die Formel einen bestimmten. Es ist derjenige, zu welchem eine unendliche Annährung Statt findet, wenn man eine der vier Grössen a, b, f, g als veränderlich und (wenn z. B. g als solche gewählt ist) dem Werthe $\frac{aaf}{bb}$ sich unendlich nähernd annimmt.

Stets der Ihrige

C. F. Gauss.

Göttingen, den 21. October 1847.

Ich bitte zu entschuldigen, dass durch ein Versehen die Seiten des Briefbogens nicht gehörig auf einander folgen.

Eine ausführliche Entwickelung der vorhergehenden Auflösung von Gauss würde ich gern in's Archiv aufnehmen, und bitte mir eine solche zu senden. G.

Literarischer Bericht
CLXXIII.

Am 4ten Juni 1865 starb in St. Petersburg der wirkliche Staatsrath und Akademiker

Adolf Theodor von Kupffer,

Director des physikalischen Central-Observatoriums.

Lebensskizze von **Max Weisse** *).

(Von ihm selbst verfasst.)

Mein Geburtsort ist Ladendorf in Oesterreich, wo mein Vater Oberamtmann war; der Tag meiner Geburt der 16. October 1798. Den ersten Unterricht erhielt ich im elterlichen Hause; der Prüfung aus den drei Normalclassen unterzog ich mich an der Hauptschule zu Korneuburg im Jahre 1808. In demselben Jahre wurde ich nach glücklich abgelegter Concursprüfung als Hofcapellensänger in das k. k. Stadt-Convict aufgenommen. In diesem Institute verblieb ich bis nach Vollendung der Gymnasial-, philosophischen und juridischen Studien im Jahre 1822. Schon während der Gymnasialstudien war die Mathematik mein Lieblingsfach, dem ich mich mit vieler Lust hingab. Um mich in derselben mehr auszubilden, besuchte ich im zweiten Jahrgange des philosophischen Curses die Vorlesungen der Mathesis forensis bei Professor Bauer, dann den Curs der höheren Mathematik bei den Professoren Hantschel und Appeltauer und den zweijährigen Curs über Astronomie bei Director J. J. Littrow. Im Convicte selbst wurden

*) Abgedruckt aus dem Almanach der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. 14. Jahrg. 1864.

mir die Correpetitionen über Mathematik und Physik mit den Hörern der Philosophie anvertraut. Schon zeitig erwachte in mir der Wunsch, mich dem Lehrfache zu widmen; ich unterzog mich desshalb im Jahre 1821 der strengen Prüfung aus der Mathematik und Physik zur Erlangung der philosophischen Doctorswürde, und machte einige Concursprüfungen mit. Nach Vollendung meiner Studien wurde ich im Jahre 1823 an der k. k. Sternwarte in Wien als Eleve angestellt. Im Jahre 1825 wurde mir von der Universität in Krakau das Diplom als Doctor der Philosophie verliehen. Eben war auch in öffentlichen Blättern der Concurs für die an derselben Universität erledigte Stelle eines Professors der Astronomie und Directors der Sternwarte ausgeschrieben; ich unterwarf mich dieser Concursprüfung und wurde für diese Stelle ernannt, an der ich bis jetzt wirke. Bei meiner Ankunft an diesem neuen Bestimmungsorte fand ich den Vorrath von astronomischen Instrumenten ganz gering; jedoch war ein nicht unbedeutender jährlicher Fond zu neuen Anschaffungen ausgesetzt. Ich trachtete also, nach und nach das Wichtigste anzuschaffen, und in diesem Augenblicke besitzt die Sternwarte eine nicht unbedeutende Sammlung von Instrumenten, worunter die vorzüglichsten sind: ein zweischuhiger Meridiankreis, ein kleines Passagen-Instrument, ein Aequatorial, ein parallaktisch aufgestellter Refractor von 52 Linien Oeffnung, ein Kometensucher, ein Sextant, ein Theodolith, eine Pendeluhr von Kessels, 2 Chronometer, verschiedene meteorologische Instrumente u. dgl. m. Leider ist das Locale den jetzigen Erfordernissen einer zweckmässigen Sternwarte nicht entsprechend, und es ist ein förmlicher Umbau des Gebäudes unumgänglich nöthig. — Im Jahre 1833 verlieh mir die Universität nach einer vorgelegten Abhandlung über den Pflichttheil die juridische Doctorswürde. In den Jahren 1833 und 1834 bekleidete ich das Amt eines Decans der philosophischen Facultät. Im selben Jahre 1833 wurde ich zum Stellvertreter des königlich preussischen Conservators der Krakauer Universität ernannt, als welcher ich Mitglied des hohen Rathes der Universität durch dreizehn Jahre, bis zur Einverleihung des Freistaates in die kaiserlich österreichische Monarchie war. Von der Zeit meiner Anstellung bis 1833 habe ich meiner Bestimmung gemäss blos wissenschaftliche Astronomie gelehrt. Im Jahre 1833 wurde aber von der zur Reorganisirung des Freistaates hieher gesandten Commission der drei Schutzhöfe aus Ersparungsgründen die bisher hier bestandene eigene Lehrkanzel der höheren Mathematik aufgehoben und mir aufgetragen, den zweiten Jahrgang dieses Studiums, und meinem Adjuncten, den ersten zu übernehmen. Durch diese Zuweisung eines so wichtigen Gegenstandes wurde sowohl

meine, als des Adjuncten Zeit sehr in Anspruch genommen, so dass bei so getheilter Zeit weder das eine noch das andere Fach, wie es nöthig wäre, betrieben werden konnte. Mehrmals habe ich desshalb dringende Vorstellungen um Abänderung dieses Uebelstandes gemacht, bis jetzt aber vergebens.

Auf meine Veranlassung wurde im Jahre 1839 neben der Sternwarte ein eigenes Häuschen für Beobachtungen mit dem Gauss'schen Unifilar-Magnetometer erbaut. Ausser den täglichen zweimaligen Beobachtungen zur Ermittlung der Variationen der magnetischen Declination, die ich durch mehrere Jahre stets selbst anstellte, wurden auch die jährlichen vier Gauss'schen Termine eingehalten. Mehr als 65.000 solche Declinationsbeobachtungen liegen vor; leider haben diese Beobachtungen meine sonst so scharfen Augen sehr angegriffen. Diese Beobachtungen wurden regelmässig fortgesetzt, bis sie nach zweimaliger Beraubung des Häuschens zu Ende 1846 und 1847 eingestellt werden mussten. Erst zu Ende dieses Jahres habe ich, um den Gauss'schen Apparat nicht ganz ungenützt zu lassen, statt des geraubten Theodolithen ein Stativ-Fernrohr aufgestellt *).

Die Resultate der an der Sternwarte, so wie in dem erwähnten Häuschen gemachten Beobachtungen wurden von Zeit zu Zeit in verschiedenen Zeitschriften, so wie in dem Jahrbuche der hiesigen Akademie der Wissenschaften bekannt gemacht.

Die von mir herausgegebenen kleineren Druckwerke sind folgende:

Tafeln zur Reduction der bei verschiedenen Wärmegraden beobachteten Barometerstände.

---

*) Glücklicher Weise sind die Resultate dieser werthvollen Beobachtungen, die unter günstigeren Umständen bei der Andauer, mit der Weisse trotz der vielfachen Unterbrechungen sie immer wieder aufnahm, eine weit grössere Ausdehnung erlangt hätten, nicht verloren gegangen. Der XVIII. Band unserer Denkschriften enthält nämlich eine in der Sitzung am 13. Juli 1858 vorgelegte Abhandlung Weisse's, betitelt: „Variationen der Declination der Magnetnadel, beobachtet in Krakau“, in welcher diese bis zum Februar 1856 fortgeführt sind. In der Einleitung sagt Weisse: „Durch mehrere Jahre konnte ich mich nach den gemachten traurigen Erfahrungen nicht entschliessen, neue Apparate aufzustellen; endlich habe ich im Jahre 1855 doch wieder einen Variations-Apparat aufgestellt, aber auch der wurde im Jahre 1856 den 22. October durch Einbruch zerstört, wodurch die Beobachtungen geschlossen waren.“

Tafeln zur Berechnung der Höhenunterschiede aus beobachteten Barometer- und Thermometerständen.

Coordinatae Mercurii, Veneris, Martis, Jovis, Saturni et Urani.

Correctiones temporis ex altitudinibus correspondentibus.

Latitudo geographica Krakoviae.

Resultate der an der Krakauer Sternwarte gemachten meteorologischen u. astronomischen Beobachtungen.

Durch viele Jahre beschäftigte mich die Bearbeitung der Bessel'schen Zonenbeobachtungen zu einem Kataloge. Die kaiserliche Akädemie der Wissenschaften in St. Petersburg übernahm die Herausgabe dieses Werkes, welches im Jahre 1846 unter dem Titel erschien:

Catalogus stellarum ex Zonis Regiomontanis. Auctore M. Weisse.

Dieser Katalog enthält 31.895 verschiedene Sterne. Zur Ermittlung des wahrscheinlichen Fehlers der Positionen dieses Kataloges habe ich für Rectascension fast 10.000, und fast eben so viele Beobachtungen für Declination der Wahrscheinlichkeitsrechnung unterworfen. Die fleissige Benützung dieses Werkes von den Astronomen, so wie die Aufforderung von verschiedenen Seiten veranlassten mich, auch noch die weiteren Bessel'schen Zonen von $+15^0$ bis $+45^0$ der Declination zu bearbeiten. Der erste Theil dieser Bearbeitung, nämlich die 0. bis 5. Stunde in Rectascension ist im Manuscripte bereits vollendet, und, wenn meine Kräfte nachhalten, so hoffe ich, auch diesen zweiten Theil des Kataloges zu Ende zu führen. Nach Erscheinen des erwähnten Sternkataloges erhielt ich von Sr. Majestät dem Kaiser von Oesterreich, so wie von Sr. Majestät dem Kaiser von Russland, die grosse goldene Medaille für Kunst und Wissenschaft. Die königliche astronomische Gesellschaft in London ernannte mich zu ihrem Mitgliede und beschloss, mir eine astronomische Verdienst-Urkunde (Award of Testimonial) zu ertheilen. Mitglied der schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur bin ich schon seit mehreren Jahren, und im Laufe dieses Jahres wurde mir die Ehre zu Theil, zum correspondirenden Mitgliede der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien gewählt zu werden.

Zum Schlusse muss ich noch bemerken, dass das Jahr 1846 auch für mich ein verhängnissvolles war. Schwere Schläge des Schicksals haben meine Familie betroffen; Kummer und Sorgen, Folgen der aufgeregten Zeit dieses Jahres, haben mich, meine Frau, alle meine vier Kinder und meine bei mir weilende Nichte

fast zu gleicher Zeit auf das Krankenlager geworfen: ein heftiger Typhus hatte uns alle ergriffen, und gerade, als ich und meine Frau anfingen, uns etwas zu erholen, verloren wir in fünf Tagen unsere beiden hoffnungsvollen Söhne, wovon der ältere im 17., der jüngere im 12. Jahre war. Der ältere zeigte bereits die schönsten Anlagen für Mathematik und Astronomie; mit mehreren astronomischen, so wie mit den meteorologischen Instrumenten und dem Gauss'schen Apparate konnte er bereits fertig umgehen; er nahm auch schon stets an den Beobachtungen Theil. Tief niedergebeugt über diese schweren Prüfungen, die mir mein höchstes Glück, den Trost im Alter raubten, entfernte ich mich von dem Trauerorte mit meiner Familie, um im geliebten Vaterlande, im Kreise der dort weilenden lieben Angehörigen, den so nöthigen Trost und die Ruhe des Gemüthes wieder zu finden. Aber die geschlagene Wunde war zu tief; mit noch blutendem Herzen kam ich zurück, und ein einziger Besuch der Gräber meiner Lieben warf mich noch heftiger wie früher auf das Krankenbett; eine schwere Kopfkrankheit brachte mich dem Tode nahe, und nur der rastlosen Pflege meiner Frau und den zweckmässigen Anordnungen geschickter Aerzte verdanke ich die Rückkehr zum Leben, das schon durch längere Zeit geschwunden schien. Schwer und langsam erholte ich mich; jedoch ich fühle es, seit der Zeit ist die beste Kraft dahin, und die höchste Schonung mir Pflicht, um mich meiner Familie zu erhalten und meinen Berufspflichten nachkommen zu können!

Krakau, den 22. December 1849.

Wir sehen aus dieser kurzen Lebensskizze, mit welchen äusseren Schwierigkeiten Weisse sein ganzes Leben hindurch zu kämpfen hatte, wie aber auch alle diese und selbst häusliches Unglück seine Kraft und Ausdauer nicht zu brechen vermochten. Selbst in den letzten Jahren seines Lebens hatte er noch mit Anstrengung zu arbeiten. Er versah bis zu seiner Pensionirung die beiden Lehrkanzeln der Astronomie und höheren Mathematik, übernahm von 1859—1860 das Decanat des philosophischen Professoren-Collegiums, versah bis zum Jahre 1855 die Stelle eines Vorsitzenden im Kirchenrathe der akademischen Pfarrei St. Nicolai und leitete den Umbau der Sternwarte, zu dem er auch die Pläne entwarf.

Ein grosses und bleibendes Verdienst erwarb sich Weisse durch die so mühevolle Reduction aller von Bessel bestimmten Orte von kleineren Fixsternen (bis zur neunten Grösse) auf den

Anfang des Jahres 1825 und durch die Katalogisirung aller Sternpositionen nach der geraden Aufsteigung derselben.

Der erste Band, herausgegeben auf Kosten der k. Akademie zu Petersburg im Jahre 1846, enthält die in den Bessel'schen Zonenbeobachtungen niedergelegten Bestimmungen von 31.895 Sternenorten in dem Gürtel des Sternenhimmels zwischen — 15° und + 15° Declination.

Der zweite Band, ebenfalls herausgegeben von der k. Petersburger Akademie im Jahre 1863, umfasst 37.862 Sternenorte in dem Gürtel des Himmels von + 15° bis + 45° Declination.

Der zweibändige Sternkatalog enthält, wenn man die mehrfachen Beobachtungen eines und desselben Sternes abrechnet: im ersten Bande 27.119, im zweiten Bande 31.445, also im Ganzen 58.564 Sterne.

Die Reductionen der Sternenorte des zweiten Bandes beschäftigten Weisse in den letzten Jahren seiner Anstellung und auch noch, als er sich zurückgezogen hatte; er erlebte eben noch kurz vor seinem Tode die Freude, den Druck des zweiten Bandes vollendet zu sehen.

Der Katalog bietet dem praktischen Astronomen den grossen Vortheil des leichten Aufsuchens der Sterne und der bequemen Reduction der Positionen derselben auf jede andere Zeit, während das Aufsuchen in den Bessel'schen Zonen viel mehr Zeit und Mühe in Anspruch nimmt.

Am 25. Mai 1861 verliess Weisse Krakau, da er in Folge zu anstrengenden Arbeitens von einer schweren Krankheit befallen wurde und nicht mehr fähig war sein Amt weiter zu führen. Er lebte seitdem in Wels und wurde auf seine Bitte am 28. März 1862 pensionirt. Es war ihm nicht vergönnt, längere Zeit der Ruhe zu geniessen, denn er starb schon am 10. October 1863 an einer langwierigen Entartung der Unterleibsorgane.

Schriften von **Maximilian** Ritter **von Weisse,**

Dr. der Rechte und Philosophie, Ritter des kais. österr. Franz Joseph-Ordens, des Ordens der eisernen Krone und des kais. russischen St. Annen-Ordens II. Classe, Inhaber der kais. österreichischen und der kais. russischen grossen goldenen Medaille für Wissenschaft und eines Testimonials der kön. astronomischen Gesellschaft in London; quiesc. Professor der Astronomie, Director der Sternwarte und Decan der philosophischen Facultät an der Jagellonischen Universität zu Krakau; Mitglied der Gelehrten-Gesellschaft zu Krakau, der schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur zu Breslau, der kön.

astronomischen Gesellschaft zu London und des Copernicus-Vereines für Wissenschaft und Kunst zu Thorn:

1. Tafeln zur Reduction der bei verschiedenen Wärmegraden beobachteten Barometerstände auf jede beliebige Normaltemperatur. Wien 1827, J. G. Heubner.

2. *Coordinatae Mercurii, Veneris, Martis, Jovis, Saturni et Urani. Cracoviae 1829, typis fratrum* Gieszkowski.

3. *Correctiones temporis ex altitudinibus correspondentibus. Cracoviae 1829, typis fratrum* Gieszkowski.

4. Tables for computing the differences of heights drawn according to the heights barometers and thermometers. Vienna 1831, by J. B. Wallishausser.

5. *Latitudo geographica Cracoviae ex observationibus annorum 1829—1831 deducta. Dissertatio. Cracoviae 1832.*

6. Resultate der an der Krakauer Sternwarte gemachten meteorologischen und astronomischen Beobachtungen. Krakau 1838, in Gieszkowski's Druckerei.

7. Obraz obserwacyi meteorologicznych w r. 1842. Kraków 1845.

8. *Observationes magni cometae anni 1843 et istius anni 1840. Cracoviae 1845.*

9. *Relatio de ecclipsi solis 7. Julii 1842. Cracoviae 1845.*

10. *Positiones mediae stellarum fixarum in zonis regiomontanis a* Besselio *inter —15° et +15° declinationis observatarum ad annum 1825 reductae et in catalogum ordinatae. Petropoli 1846, jussu Academiae imperialis.*

11. 1850. Spostrzeżenia w Obserwatoryjum astronomiczném Krakowskiém w r. 1849. (Meteorologische Beobachtungen.)

12. 1850. Spostrzeżenia Komety przez Petersena d. 1. Maje 1850 w Altonie odkrytego. (Beobachtungen des Petersen'schen Kometen.)

13. 1851. Spostrzeżenia w Obserwatoryjum Astronomiczném Krakowskiém r. 1850. (Meteorologische Beobachtungen für das Jahr 1850.)

14. 1852. Desgleichen für das Jahr 1851.

Diese vier Schriften sind in den Jahrbüchern der Krakauer Gelehrten-Gesellschaft gedruckt.

15. 1851. Uebersicht der im Jahre 1850 an der k. k. Sternwarte in Krakau angestellten meteorologischen Beobachtungen. (In den Sitzungsberichten der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. VI. Bd. Jahrg. 1851. Tabelle.)

16. 1853. Allgemeine Uebersicht der an der k. k. Krakauer Sternwarte vom Jahre 1826—1852 gemachten meteorologischen Beobachtungen. Krakau in der Universitäts-Buchdruckerei 1852. Gross 4°.

17. 1855. Sternbedeckungen und Mondsterne, beobachtet auf der k. k. Sternwarte in Krakau. Universit.-Buchdruckerei in Krakau 1855. Gross-8°.

18. 1858. Stündliche Barometer-Beobachtungen zu Krakau in den Jahren 1848—1856. Wien, k. k. Staatsdruckerei. Gross-4°.

19. 1858. Vergleichungen des *Catalogus generalis pro 1830* in Struve's *Stellarum fixarum imprimis duplicium et multiplicium positiones mediae (Petropoli 1852)* mit den beiden Katalogen aus Bessel's Zonen-Beobachtungen. 8°. (In den Sitzungsberichten der kaiserl. Akademie. Bd. XXXII, Jahrg. 1858, S 270.)

20. 1859. Variationen der Declination der Magnetnadel, beobachtet in Krakau. 4°. (In den Denkschriften der kaiserl. Akademie. Bd. XVIII, S. 63.)

21. 1861. Neu gerechnete Reductionstafeln des 17. Bandes der Königsberger Beobachtungen (in Nr. 1304 der astronomischen Nachrichten).

22. 1863. *Positiones mediae stellarum fixarum in zonis regiomontanis a Bessclio inter + 15° et + 45° declinationis observatarum ad annum 1825 reductae et in catalogum ordinatae, auctore Maxim. Weisse. Jussu Academiae imperialis Petropolitanae edi curavit et praefatus est O. Struve. Petropoli.* Gross-4°.

Ausser diesen Schriften sind noch einige Beobachtungen von Planeten, Kometen, Sternbedeckungen u. s. w. vom Hingeschiedenen in den „Astronomischen Nachrichten" veröffentlicht.

Zur Charakterisirung Simon von Stampfer's.

In der interessanten „Biographischen Skizze" des als Bergmann, Mineralog und Reisender berühmten J. Russegger, die, von ihm selbst verfasst, in dem Almanach der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Jahrgang 1864. S. 108. (angezeigt im Literar. Ber. Nr. CLXXI. S. 1.) abgedruckt ist, findet sich folgende Charakterisirung des trefflichen Simon von Stampfer, dessen Tod wir im Literar. Bericht Nr. CLXIX. S. 2. vorläufig gemeldet haben, ohne dass uns bis jetzt ein von uns recht sehr erbetener Necrolog dieses ausgezeichneten und trefflichen Mannes mitgetheilt worden wäre *):

Russegger, geb. zu Salzburg am 18. November 1802, und auf dortigen Studien-Anstalten gebildet, sagt von sich selbst:

„So rückte ich als Bergmann und grosser Reisender in spe, in Wirklichkeit aber als ein wahrer Taugenichts, dessen Schulzeugnisse gräulich anzusehen waren, in die sogenannten Humaniora vor.

Neue Verhältnisse, neue Lehrer; der freisinnige Filz, als Professor der Geschichte, der tief und schnell denkende Stampfer, als Professor der Mathematik, weckten mit ihrem klaren, bündigen Vortrage, gestützt auf die vollendete Sicherheit des eigenen Wissens und abhold jedem gedankenlosen Gedächtnissgeplapper, auch in mir das ernstere Streben nach Wissenschaft. Beide Professoren rückten später mit in die Lycealcurse vor, denen der gelehrte Thaner als Director vorstand. Schnell hatte ich unter Stampfer's geistvoller Leitung, die meinem raschen

*) Wir wiederholen hier unsere Bitte. G.

Temperamente so trefflich zusagte, das Versäumte eingeholt und die Mathematik, die Wissenschaft, an die ich noch das Jahr zuvor nicht ohne Schauder denken konnte, wurde nun mein Lieblingsstudium und blieb es nebst der Physik während meiner ganzen Bildungszeit. Stampfer wusste die, welche im Stande waren, seinem etwas schnellen Vortrage zu folgen, auf eine begeisternde Weise an sich zu ketten. So erinnere ich mich, dass einstens, ich war damals im ersten philosophischen Curse, Se. Majestät unser verewigter Kaiser Franz auf seiner Reise durch Salzburg auch die dortigen Studienanstalten besuchte. Director Thaner kam in den Hörsaal, wo gerade Stampfer lehrte, und erkundigte sich bei ihm, ob er hier oder in einem andern Curse ein paar Schüler habe, die allenfalls vor dem Kaiser geprüft werden könnten. Da rief Stampfer mich und einen gewissen Zeillinger, und stellte uns dem Director mit den Worten vor: Diese sind in der Mathematik meine besten Schüler, die kann Se. Majestät zu jeder Zeit prüfen lassen. So fühlte ich mich noch nie gehoben — ich weiss nicht, was ich in diesem Augenblicke alles für Stampfer gethan hätte. Liebe und Vertrauen fesselten mich an den Lehrer, der erste, welcher in mir nicht nur den wilden Buben sah, der auch meine bessere Seite erkannte und sie so glänzend hervorhob. Mit noch mehr Lust, mit noch mehr Eifer verlegte ich mich jetzt auf Mathematik; die Bahn war gebrochen, das Studium der übrigen Wissenschaften wurde mir zur Erholung, und so garstig früher meine Studienzeugnisse anzusehen waren, um so ehrenvoller gestalteten sie sich von nun an und blieben es."

Einen sehr erfreulichen Eindruck macht es auch, mit welcher warmen Dankbarkeit Russegger S. 112. des „genialen" Schitko, Professors der reinen und angewandten Mathematik auf der Berg-Akademie in Schemnitz, und S. 115—116. des trefflichen Baumgartner gedenkt.

Mathematischer und physikalischer Unterricht.

The Educational Times and Journal of the College of Preceptors. 4°.

Diese dem englischen Unterrichtswesen im Allgemeinen gewidmete Zeitschrift ist uns leider erst jetzt bekannt geworden, sonst würden wir schon längst Alle, die sich für dieses wichtige und, mit Rücksicht auf unsere deutschen Verhältnisse, vielfach eigenthümlich gestaltete Unterrichtswesen interessiren, auf dieselbe

aufmerksam gemacht und sie zu sorgfältigster Beachtung empfohlen haben. An diesem Orte können wir natürlich nur auf die in den Kreis des Archivs fallenden Partieen etwas näher eingehen.

An der Spitze des ganzen Unternehmens steht als „President of the council" der Rev. B. H. Kennedy, D. D., Head Master of the Grammar School, Shrewsbury. Unter den „Examiners" finden wir in der Rubrik: „Mathematics and Natural Philosophy" die Herren Rev. C. Pritchard (Cambridge), Rev. R. H. Wright (Camb.), Rev. T. J. Potter (Camb.), Rev. M. Gibbs (Camb.), W. J. Reynolds (Camb.), Rev. G. Frost (Camb.), Rev. S. Newth (London), Rev. G. H. Stevens (Camb.), J. McDowell (Camb.) — Uns ist die neueste Nummer:

Vol. XVIII. New Series, No. 51. June, 1865

mit der Bezeichnung: „From the Mathematical Editor: W. J. Miller, Huddersfield College" zugesandt worden, und wir können nicht unterlassen, für diese uns sehr interessirende Mittheilung **hier** unseren verbindlichsten und grössten Dank auszusprechen.

In der obigen Nummer finden wir u. A. unter der Rubrik: „Great Schools of England" eine Relation über die „Harrow School", als eine Grammar School im Jahre *1571* von John Lyon gegründet, und in dieser Relation eine ziemlich ausführliche Mittheilung über den mathematischen Unterricht auf dieser Schule, über die Gehalte (wie wir in Deutschland sagen) der Lehrer der Mathematik u. s. w. In letzterer Beziehung werden selbst ziemlich specielle Mittheilungen gemacht, im Allgemeinen aber wird gesagt: „The position and powers of the Mathematical Masters, in and out of School, are the same as *those of* the Classical Masters", also auch in äusserer Beziehung völlige Gleichstellung der Mathematik mit den classischen Studien, wie in England überhaupt. Interessant ist uns auch die folgende Notiz über die Ertheilung mathematischer Preise auf der genannten Schule gewesen: „There is a special voluntary examination once a year for four mathematical prizes-a gold medal of the value of ten guineas *), founded by the late Mr. Neeld; books worth five guineas, and two other prizes of two guineas and a half each, likewise in books. The first and second prizes are given to those who stand first and second in the examination, the second and

*) Eine Guinee hat den Werth von 6,373 Thlrn. in preuss. Friedrichsd'or zu 5 Thlr.

third to those who do best in Euclid and arithmetic respectively. The number of competitors ranged from 12 to 40 or 50. The medal is a high distinction, and is said to be as much prized as any other in the School."

Der Grund aber, welcher uns die Verpflichtung auflegt, unsere Leser auf diese Zeitschrift recht sehr aufmerksam zu machen, liegt vorzugsweise darin, dass namentlich und zunächst in der obigen Nummer sich ein grosser Schatz mathematischer Aufgaben findet, die alle Beachtung verdienen, namentlich auch von Verfassern von Aufgabensammlungen sorgfältig berücksichtigt werden müssen. Seite 55. ff. werden unter der Ueberschrift: „**Mathematical Periodicals.** The Lady's Diary. Questions continued" aus diesem älteren Journal (1752) viele Aufgaben mitgetheilt; und ferner findet sich S. 66.—S. 69. ein grosser Reichthum von Aufgaben (theilweise mit Auflösungen) und Sätzen, mitgetheilt von den Herren W. Crofton, E. Fitzgerald, Cayley, T. Cotteril, T. A. Hirst, F. D. Thomson, J. Dale, W. A. Whitworth, W. S. Burnside, Sylvester, R. Townsend, R. Tucker, Dr. Booth, H. McColl, H. R. Greer, J. Griffiths, M. Collins, N'Importe, O'Callaghan, J. Blissard, P. W. Flood, W. K. Clifford, Strebor; auch ein längerer Aufsatz: „On the Envelope in Question 1679. (Abridged from a paper by Steiner in the 53rd volume of Crelle's Journal) mit Noten."

Wir empfehlen nochmals diese Zeitschrift aus obigen Gründen um so mehr zur Beachtung, weil man auf den ersten Anblick einen solchen Reichthum lehrreicher Mittheilungen in derselben nicht suchen sollte, und hoffen später auf dieselbe zurückzukommen.

Arithmetik.

Praktische Anwendungen für die Integration der totalen und partialen Differentialgleichungen. Von Dr. G. W. Strauch, Rector der höheren Unterrichts-Anstalt zu Muri im Kanton Aargau. Erster Band. Braunschweig. F. Vieweg und Sohn. 1865. 8⁰.

Ohne uns hier bei der Kürze dieser literarischen Berichte auf ausführliche Beurtheilungen und Darlegung etwaniger abweichender Ansichten einlassen zu können, glauben wir diesem Buche doch das Zeugniss nicht vorenthalten zu dürfen, dass dasselbe im Ganzen wohl geeignet ist, einem längstgefühlten Bedürfnisse abzu-

helfen, da Niemand mehr als wir überzeugt sein kann, dass die Integration der Differentialgleichungen hauptsächlich und ganz vorzugsweise durch die vielseitigsten und vielfachsten Anwendungen geübt, ja erlernt sein will. Wir heissen daher ein Buch wie das vorliegende mit lebhaftester Anerkennung des auf die Ausarbeitung desselben hier offenbar verwandten ungemein grossen Fleisses, unter Umständen willkommen, und empfehlen es, zugleich mit der Bemerkung, dass den singulären Integralen besondere Aufmerksamkeit gewidmet worden ist, zu sorgfältiger Beachtung, müssen uns aber — wenigstens für jetzt — mit der folgenden Angabe der Hauptrubriken des sehr reichen Inhalts begnügen, behalten uns indess vor, auf einzelne Partieen und mit Rücksicht auf einzelne Aufgaben später, vielleicht im Archive selbst, in einer mehr eingehenden Weise zurückzukommen:

Erklärung einiger Bezeichnungen. — Erste Abtheilung, wo solche Totaldifferentialgleichungen integrirt werden, die nur mit zwei Veränderlichen versehen sind. Erster Abschnitt, welcher eine Einleitung theoretischen Inhalts enthält. A. Theorie der Integralgleichungen, die den mit nur zwei Veränderlichen versehenen Totaldifferentialgleichungen entsprechen. *α. Die vorgelegte* Differentialgleichung ist eine der ersten Ordnung. *β.* Die vorgelegte Differentialgleichung ist eine der zweiten *Ordnung.* *γ.* Schluss. B. Theorie für die Anwendung der Integralgleichungen auf die ebene Geometrie. Allgemeine Betrachtung. *α.* Die vorgelegte Differentialgleichung, deren Integralgleichung auf die ebene Geometrie angewendet werden soll, ist eine der ersten Ordnung. *β.* Die vorgelegte Differentialgleichung, deren Integralgleichung auf die ebene Geometrie angewendet werden soll, ist eine der zweiten Ordnung. *γ.* Schluss. — Zweiter Abschnitt, welcher lauter praktische Aufgaben enthält. A. Aufgaben aus der ebenen Geometrie, wo Totaldifferentialgleichungen der ersten Ordnung integrirt werden. 1. Bestimmung von ebenen Curven, bei welchen die Länge der Tangenten und Normalen gewissen vorgeschriebenen Bedingungen genügt. 2. Bestimmung von ebenen Curven, bei welchen die Lage der Tangenten und Normalen gewissen vorgeschriebenen Bedingungen genügt. 3. Bestimmung von ebenen Curven, denen gewisse Eigenschaften des Flächeninhalts oder des Bogens zukommen. 4. Bestimmung von Trajectorien ebener Curven. 5. Bestimmung der Tractorien ebener Curven *). 6. Bestimmung von Trochoiden ebener Curven

*) Bei den Trajectorien, den reciproken Trajectorien, den Tracto-

nebst einigen umgekehrten Aufgaben. 7. Bestimmung von Evolventen ebener Curven. 8. Bestimmung von ebenen Curven, denen eine vorgeschriebene Fusspunktencurve angehört. B. Aufgaben aus der ebenen Geometrie, wo Totaldifferentialgleichungen der zweiten und dritten Ordnung integrirt werden. 9. Bestimmung von ebenen Curven, bei welchen die Länge des Krümmungshalbmessers gewissen Bedingungen genügt. 10. Bestimmung von ebenen Curven, bei welchen die Lage des Krümmungskreises oder des Krümmungsmittelpunktes gewissen Bedingungen genügt. 11. Bestimmung von ebenen Curven, denen gewisse Eigenschaften des Flächeninhalts und des Bogens zukommen. 12. Bestimmung von Evolventen ebener Curven. 13. Bestimmung von ebenen Curven, deren Krümmungshalbmesser mit dem Krümmungshalbmesser der Evolute in einer vorgeschriebenen Relation steht. 14. Bestimmung von ebenen Curven, denen eine vorgeschriebene Brennlinie zugehört.

Die äussere Ausstattung ist so elegant wie sie nur sein kann; der Fortsetzung sehen wir mit Verlangen entgegen.

**

Geometrie.

Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane. Nota II^a. del Prof. Luigi Cremona. (Estratta dal tomo V (serie 2^a) delle Memorie dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna). Bologna, Tipi Gamberini e Parmeggiani. 1865. 4°.

Diese Schrift des der Bearbeitung und weiteren Ausbildung der neueren Geometrie, namentlich der allgemeinen geometrischen Curvenlehre, sich so eifrig und mit so grossem und ausgezeichnetem Erfolge widmenden Herrn Professor L. Cremona in Bologna ist als eine Fortsetzung seiner in unserem Literar. Ber. Nr. CLXIII. S. 6. angezeigten „Nota I^a sulle trasformazioni geometriche delle figure piane“ zu betrachten, und wir müssen alle unsere Leser, welche sich mit der früheren Schrift bekannt gemacht haben, dringend auffordern, auch sowohl den in dieser zweiten Schrift

---

rien und in manchen anderen Partieen hätten wohl die vieles hierher Gehörende enthaltenden ausführlichen Artikel des Klügel'schen mathematischen Wörterbuchs und seiner Supplemente etwas mehr Berücksichtigung verdient.

niedergelegten neueren schönen allgemeinen Untersuchungen über Curven und Curvensysteme, als auch der specielleren ausführlichen Betrachtung der Jacobi'schen Curve ihre besondere Aufmerksamkeit zu widmen. Denn, ohne uns wegen der Beschränktheit des Raumes auf weitere Ausführungen einlassen zu können, wollen wir nur bemerken, dass eben das sorgfältigste Studium dieser Jacobi'schen Curve der Hauptzweck der vorliegenden Abhandlung war, indem der Herr Verfasser selbst darüber sich folgendermaassen ausspricht: „Però lo scopo principale di questa seconda memoria è uno studio intorno alla curva Jacobiana, cioè intorno al luogo dei punti doppi delle curve di una figura che corrispondono alle rette dell' altra. Tale studio chiarirà che la Jacobiana si decompone in più linee di vari ordini, e che i numeri delle linee di questi vari ordini constituiscono una soluzione delle due equazioni di condizione sopra citate *). Le soluzioni di queste due equazioni si presentano cosi coniugate a due a due. Ho auche potuto determinare alcune coppie di soluzioni coniugate corrispondenti ad n qualunque: ma la ricerca del completo sistema delle soluzioni supera di troppo le mie forze perchè io non l'abbia a lasciare a chi può rivolvere i difficili problemi del-l'analisi indeterminata.“ Ueber die Jacobi'sche Curve s. m. das Nähere *in:*

Einleitung in eine geometrische Theorie der *ebenen* Curven von Dr. **L. Cremona.** Nach einer für die deutsche Ausgabe vom Verfasser zum Teil umgearbeiteten Redaction in's Deutsche übertragen von **Maximilian Curtze.** Greifswald. Koch'sche Verlagsbuchhandlung. 1865. 8°. S. 132. ff.

Wir empfehlen die vorliegende ausgezeichnete Schrift den Liebhabern der neueren Geometrie wie schon früher, hier von Neuem recht sehr.

Geodäsie und praktische Geometrie überhaupt.

Lehrbuch der axonometrischen Projectionslehre von Dr. M. H. Meyer und Dr. C. Th. Meyer. Mit 51 Tafeln Abbildungen. Leipzig. Hassel. 1855—1863. 8°.

Die Anzeige dieses 410 und im Anhange 71 Seiten umfassenden, von einem aus 51 sorgfältig entworfenen und gezeichne-

---

*) Ueber welche zwei Gleichungen die Nota I a das Weitere enthält, auf welche überhaupt hiebei immer zurückzugehen ist.

ten Tafeln bestehenden Atlas begleiteten Buchs, welches jedenfalls das vollständigste und ausführlichste Werk ist, das wir über axonometrische Projection besitzen, ist durch zufällige Umstände, hauptsächlich aber dadurch verzögert worden, dass die erste Herausgabe nur nach und nach in einzelnen Heften — und in grösseren Zwischenzeiten — erfolgte. Wenn wir nun auch freilich voraussetzen dürfen, dass das Werk bereits hinreichend bekannt ist, so wollen wir doch noch eine kurze Anzeige, insbesondere eine übersichtliche Anzeige seines Inhalts nachholen, weil wir allerdings glauben, dass es seiner Ausführlichkeit und Deutlichkeit und der vielen in ihm enthaltenen, durch sorgfältige Zeichnungen erläuterten Beispiele, endlich auch der vielen in dem *Anhange* mitgetheilten constructiven Aufgaben über die Kegelschnitte wegen, ein gutes Hülfsmittel für Lehrer bei'm Unterrichte darbietet, und in dieser Beziehung denselben zur Beachtung empfohlen zu werden verdient; wobei wir noch bemerken wollen, dass bei der mathematischen Darstellung die Herren Verfasser sich nur elementarer, über die sphärische Trigonometrie nicht hinausgehender, die analytische Geometrie also ausschliessender Hülfsmittel bedient haben. Der Hauptinhalt ist folgender: *Einleitung* (auch, so wie die Vorrede, Historisches und Literarisches enthaltend). — Mathematische Begründung (durch sphärische, selbst bloss durch ebene Trigonometrie). — Anwendbarkeit. — Zeichnung des Axensystems. — Allgemeine Sätze und Annahmen. Angabe und Entnehmen der den Axen parallelen Linien (Verjüngung). Hypothetische Vergrösserung. — I. Abschnitt. Anfertigung axonometrischer Zeichnungen nach geometrischen Rissen. — II. Abschnitt. Anfertigung axonometrischer Zeichnungen nach gegebenen Maassen. 1. Auftragen und Abnehmen von Winkeln und Längen in axonometrischen und ausseraxonometrischen Ebenen. 2. Wichtigste Sätze der descriptiven Geometrie über gerade Linien und Ebenen in ihrer axonometrischen Darstellung. 3. Auftragen und Abnehmen von Längen und Winkeln in beliebigen Ebenen und das Zeichnen von Ebenen und Linien nach gewissen gegebenen Bedingungen. 4. Axonometrische Darstellung ebener geradliniger Figuren und ebenflächiger Körper. 5. Durchdringungen. 6. Axonometrische Darstellung krummer Linien und krummer Flächen. — Der Anhang enthält, wie schon erinnert, eine grosse Anzahl constructiver Aufgaben über alle drei Kegelschnitte, die des Interessanten Manches darbieten und auch zur Benutzung bei'm Unterrichte in der Lehre von den Kegelschnitten an sich beachtet zu werden verdienen.

Astronomie.

Refractors-Beobachtungen der Kön. Universitäts-Sternwarte in Upsala. Vom Februar 1862 bis Januar 1864. Zur Distribution an die Astronomischen Institutionen und Fachmänner. Upsala. Edquist & Berglund. 1864. 8°.

Diese in deutscher Sprache herausgegebenen Beobachtungen der Sternwarte in Upsala geben ein höchst erfreuliches Bild von der fruchtreichen Thätigkeit dieser berühmten, unter der Direction des Herrn Professor Dr. Gustav Svanberg stehenden Anstalt. Dieselben sind früher in der „Upsala Universitets Årsskrift", deren Jahrgang für 1861 wir im Literar. Berichte Nr. CLV. S. 14. ausführlich angezeigt haben, erschienen und nun in höchst dankenswerther Weise in dem vorliegenden schönen Werke zur Vertheilung an Institute und Fachmänner gesammelt worden. Die sämmtlichen Beobachtungen sind von dem zweiten Astronomen und Observator, Herrn Dr. Herman Schultz, angestellt und augenscheinlich mit der grössten Sorgfalt und Genauigkeit, unter Anwendung aller neueren Hülfsmittel und Methoden, berechnet und reducirt worden, so dass den Astronomen mit diesem Werke unbedingt ein sehr wichtiges Geschenk gemacht worden ist. Der Inhalt ist folgender:

Mars-Beobachtungen 1862,
Asteroiden-Beobachtungen 1862,
Beobachtungen des Cometen II 1862,
Beobachtungen von Nebelflecken im Jahre 1863,
Beobachtungen einiger Asteroiden und der Cometen des Jahres 1863.

Jeder dieser Abtheilungen ist eine überall sehr lehrreiche Einleitung vorangeschickt, welche über die angewandten Instrumente und deren einzelne Theile, ihre Leistungsfähigkeit, Berichtigung u. s. w.; über die angewandten Berechnungs- und Reductionsmethoden u. s. w. alle erforderliche und irgendwie wünschenswerthe Auskunft ertheilt, so dass diese Einleitungen auch im Allgemeinen für jeden Astronomen von grossem Interesse und sehr instructiv sind.

Wir wünschen den Herren Herausgebern Glück zu der Vollendung dieses Werks, und hoffen die Wissenschaft recht bald mit seinen Fortsetzungen weiter bereichert zu sehen.

Nautik.

Handbuch der Nautik und ihrer Hülfswissenschaften von W. v. Freeden, Rector der Grossherzoglich Oldenburgischen Navigationsschule. Oldenburg. Schulze. 1864. 8⁰.

Wir glauben, dass dieses neue Handbuch der Nautik wegen seiner augenscheinlich vorherrschend praktischen Tendenz und wegen der sehr grossen Anzahl vollständig ausgerechneter, lehrreicher numerischer Beispiele, auch wegen seiner Vollständigkeit und Deutlichkeit, sich unter dem nautischen Publikum Freunde erwerben wird, wobei wir nur, um nicht missverstanden zu werden, bemerken wollen, dass, wenn wir auch vorher die Tendenz des Buchs eine vorherrschend praktische nannten, daneben doch auch die theoretische Begründung nirgends fehlt. Manche Gegenstände sind in demselben ausführlicher dargestellt und besprochen, wie in manchen anderen nautischen Lehrbüchern, wie z. B. das so wichtige Segeln im grössten Kreise, dem der ganze fünfte Abschnitt der gewöhnlichen Schiffsrechnung gewidmet ist. Da sich voraussetzen lässt, dass auf der Oldenburgischen Navigationsschule (in Elsfleth?) der Unterricht nach diesem reichhaltigen Lehrbuche überall mit theoretischer Begründung ertheilt wird, so verdient derselbe gewiss die rühmlichste Anerkennung. Der eigentliche Mathematiker möchte freilich in der mathematischen Darstellung, namentlich in Betreff der Hülfswissenschaften, etwas grössere Eleganz, Kürze und Strenge, so wie eine grössere Berücksichtigung mancher neueren Darstellungs- und Entwickelungsweisen wünschen; aber freilich tritt bei dem hier eigentlich betheiligten und interessirten Publikum das rein theoretische Interesse sehr in den Hintergrund, dasselbe eilt so schnell als möglich zur wirklichen praktischen Anwendung, legt mehr Werth auf die Resultate als auf die dazu führenden Wege, und wünscht, bei grösster Anschaulichkeit, letztere so schnell als möglich zu durchlaufen; daher wollen wir auch rücksichtlich der theoretischen Partieen seines Buchs mit dem Herrn Verfasser nicht rechten, empfehlen dasselbe im Gegentheil nochmals dem nautischen Publikum zur Beachtung, das auch rücksichtlich der Behandlung der nautischen Instrumente alles ihm Wünschenswerthe und Nöthige hier finden wird.

Physik.

Abhandlungen über die mechanische Wärmetheorie von R. Clausius. Erste Abtheilung. Abhandlungen, welche die Begründung der mechanischen Wärmetheorie nebst ihrer Anwendung auf die in die Wärmelehre gehörigen Eigenschaften der Körper und auf die Dampfmaschinen-Theorie enthalten; vervollständigt durch eine mathematische Einleitung und durch erläuternde Anmerkungen und Zusätze. Mit in den Text eingedruckten Holzstichen. Braunschweig. F. Vieweg und Sohn. 1864.

Der Herr Verfasser und der Herr Verleger verdienen jedenfalls sehr grossen Dank, dass sie die an verschiedenen Orten publicirten Abhandlungen des Herrn Professor **Clausius** über die mechanische Wärmetheorie dem mathematischen und physikalischen Publikum in diesem Werke gesammelt vorlegen, versehen mit einer grösseren Anzahl von Anmerkungen und Zusätzen und mit einer mathematischen Einleitung, welche in ähnlicher Weise, wie es in Dingler's Journal geschehen ist, die Behandlung der hier zur Sprache kommenden Differentialgleichungen in lehrreicher Weise bespricht. Der Inhalt dieser ersten Abtheilung ist folgender: *Mathematische Einleitung.* Ueber die Behandlung von Differentialgleichungen, welche nicht im gewöhnlichen Sinne integrabel sind. — I. Ueber die bewegende Kraft der Wärme und die Gesetze, welche sich daraus für die Wärmelehre selbst ableiten lassen (mit vielen Zusätzen). — II. Ueber das Verhalten des Dampfes bei der Ausdehnung unter verschiedenen Umständen (mit Zusätzen). — III. Ueber den theoretischen Zusammenhang zweier empirisch aufgestellter Gesetze über die Spannung und die latente Wärme verschiedener Dämpfe. — IV. Ueber eine veränderte Form des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmelehre. — V. Ueber die Anwendung der mechanischen Wärmetheorie auf die Dampfmaschine (mit Zusätzen). — VI. Ueber die Anwendung des Satzes von der Aequivalenz der Verwandlungen auf die innere Arbeit (mit Zusätzen). — VII. Ueber einen Grundsatz der mechanischen Wärmetheorie. — VIII. Ueber die Concentration von Wärme- und Lichtstrahlen und die Gränzen ihrer Wirkung.

Wir sehen der zweiten Abtheilung dieser sehr verdienstlichen Sammlung mit Verlangen entgegen.

Catalogue des appareils d'Acoustique construits par Rudolph Koenig. Paris. Rue Hautefeuille 30. 1865. 8⁰.

Die berühmte Werkstätte des Herrn Rud. König in Paris für akustische Instrumente ist gewiss den meisten Lesern des Archivs (m. s. z. B. Literar. Ber. Nr. CLXVI. S. 2.) bekannt. Wir freuen uns aber sehr, den Lesern den Inhalt des uns gütigst mitgetheilten neuesten Catalogs des Herrn R. König mittheilen zu können, indem wir bemerken, dass dieser Catalog systematisch geordnet und mit sehr schönen, einen grösseren Theil der Instrumente darstellenden Holzschnitten ausgestattet ist, so dass derselbe, auch abgesehen von seinem nächsten Zwecke, für jeden Physiker sehr lehrreich ist und namentlich auch allen Lehrern der Physik dringend zur sorgfältigsten Beachtung empfohlen werden muss, die zugleich in demselben die Preise, im Verhältniss zu der Schönheit der Instrumente, nur sehr mässig gestellt finden werden. Die Anzahl der in diesem Catalog angezeigten Instrumente beträgt im Ganzen 251; sein Inhalt ist nach den Hauptrubriken folgender: I. Appareils pour la production du son dans les principaux cas. p. 3. — II. Origine et nature du son. p. 5. — III. Les trois qualités fondamentales du son, la hauteur, l'intensité et le timbre. p. 8. — IV. Les autres propriétés du son. Propagation, réflexion, diffraction, réfraction, influence du mouvement de translation du corps vibrant. p. 13. — V. Vibrations simples des différents corps simples. Colonnes et masses d'air, membranes, cordes, verges, plaques. p. 17. — VI. Communication des vibrations. Vibrations des corps composés et vibrations composés dans des corps simples. p. 26. — VII. Phénomènes résultant de la coexistence de plusieurs sons dans l'air. Interférence. Battements. Sons résultants. p. 33. — VIII. Méthodes d'observation des vibrations sonores sans le secours de l'oreille. Méthode graphique. Méthode optique. Méthode des flammes manométriques. Méthode fondée sur l'observation des vibrations trop lentes pour être entendues, mais rendues visibles par la grandeur de l'amplitude. p. 38. — IX. Appareils pour la représentation mécanique des mouvements vibratoires et ondulatoires. p. 49. — X. Quelques appareils d'acoustique d'un usage pratique. p. 51. — XI. Modèles d'anatomie élastique. p. 52.

Möge das so höchst verdienstliche, zur Förderung einer in-

teressanten, lehrreichen und anschaulichen Einführung in das Reich des Schalls so sehr geeignete Unternehmen des Herrn R. König die allgemeinste und ausgebreitetste Beachtung finden!

Vermischte Schriften.

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle università italiane, pubblicato per cura dei Professori G. Battaglini, V. Janni e N. Trudi. Napoli. (S. Literar. Ber. Nr. CLXXI. S. 15.).

Volume III. Gennaio 1865. Sopra alcune formole relative ai coefficienti binomiali; per P. Tardy. p. 1. — Sulle traversali nel triangola; per A. Dorna. p. 4. — Soluzione della quistione 32; per E. d'Ovidio. p. 5. — Sol. d. quist. 32; per G. Torelli. p. 7. — Teorema sopra i determinanti; per A. Mogni. p. 10. — Ricerche di analisi applicata alla Geometria; per E. Beltrami. p. 15. (Cont. Vedi Vol. II. p. 375.) — Sulle forme binarie di 2° grado per G. Battaglini. p. 22. — Sulle forme binarie dei primi quattro gradi; per G. Battaglini. p. 24. — Sol. d. quist. 43; per F. Armenante. p. 31.

Volume III. Febbraio 1865. Ricerche di analisi applicata alla geometria; per E. Beltrami. (Cont. Vedi pag. 22.) p. 33. — Formole pel calcolo delle orbite di pianeti e comete per A. de Gasparis. p. 42. — Soluzione della Quistione 35; per A. Armenante. p. 47. — Sulle forme binarie dei primi quattro gradi; per G. Battaglini. (Contin. vedi p. 31.) p. 51. — Rivista Bibliografica; sulla teoria delle coniche; per L. Cremona. p. 60. (Ueber die bekannten, vorzugsweise die Kegelschnitte betreffenden Abhandlungen von Chasles in den Comptes rendus. 1864. 1 février. — 15 février. — 7 mars. — 27 juin, 4 et 18 juillet. — 1er août. — 22 août). — Quistione. p. 64.

Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei, compilati dal Segretario. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CLXXI. p. 18.)

Anno XVIII. Sessione III^a del 5 Febbraio 1865. Riduzioni delle osservazioni magnetiche, fatte all' osservatorio del Collegio Romano, dal 1859 al 1864. Del P. A. Secchi. p. 167. — Formule per determinare la temperatura di un ambiente, senza osservarla. Nota del prof. P. Volpicelli. p. 233.

Literarischer Bericht
CLXXIV.

Arithmetik.

Sulle Quadrature, Nota del Commendatore P. Tardy, Professore di Calcolo Differentiale e Integrale nella Regia Università di Genova, Direttore degli Studi nella R. Scuola di Marina etc. etc. Inserita nel Tomo secondo della Serie seconda delle Memorie della Società Italiana delle Scienze residente in Modena. Tipografia dell' Erede Soliani. 1865. 4°.

Wir glauben unsere Leser auf dieses interessante und für die Theorie der mechanischen Quadratur sehr wichtige Memoire recht sehr aufmerksam machen zu müssen. Der unterzeichnete Herausgeber des Archivs hat dieser wichtigen Theorie selbst zwei ausführliche Abhandlungen gewidmet:

Ueber die näherungsweise Ermittelung der Werthe bestimmter Integrale. Archiv. Thl. XIV. Nr. XX. S. 225.—S. 317.

Ueber Interpolation und mechanische Quadratur. Thl. XX. Nr. XXXIII. S. 361.—S. 418.

in denen er vorzüglich die Entwickelung und die genaue und scharfe Begründung der Formeln von Cotes und Gauss, einer Formel von Laplace, und ganz hauptsächlich der nach seiner Meinung sehr wichtigen, aber, wie es scheint, weniger bekannten Correctionsformeln von Stirling zum Zweck hatte. Herr Commendatore Professor Tardy in Genua hat in der vorliegenden schönen Abhandlung die ganze Theorie der mechanischen Quadratur aus ihren ersten Gründen rein analytisch entwickelt, und dabei sein Augenmerk hauptsächlich und ganz vorzüglich auf die Angabe von Restgliedern in sehr bemerkenswerthen allgemeinen analytischen

Ausdrücken gerichtet, wodurch sich seine vorliegende Arbeit vor anderen Arbeiten über diese wichtigen Gegenstände nach unserer Meinung besonders auszeichnet und zu sorgfältigster Beachtung sich vorzugsweise empfiehlt. Dabei sind die Arbeiten seiner Vorgänger, namentlich die von Cotes, Simpson, Euler, Gauss, Poisson, Legendre, Poncelet, Parmentier, Weddle, Turazza, Christoffel u. s. w. keineswegs unberücksichtigt geblieben, und sind von ihm theilweise vervollständigt, die betreffenden Formeln aus neuen Gesichtspunkten bewiesen, zuweilen auch berichtigt worden. Ganz besonders hat der Herr Verfasser aber auch sein Augenmerk auf eine neue Entwickelung der sehr bemerkenswerthen Correctionsformeln gerichtet, welche der berühmte italienische General Herr Menabrea, ausgehend von einer Formel von Fourier, in den Memoiren der Königlichen Akademie der Wissenschaften in Turin, Serie 2ª. Tom. VIII. gegeben hatte. Diese kurzen Mittheilungen, welche weiter auszudehnen die Beschränktheit des Raums uns verbietet, werden schon hinreichend sein, die Wichtigkeit des vorliegenden Memoires des Herrn Tardy für die Theorie der mechanischen Quadratur, welches Niemand bei der Beschäftigung mit dieser Theorie unberücksichtigt lassen darf, zu zeigen und auf dasselbe dringend aufmerksam zu machen, wie wir hiemit zu thun für unsere Pflicht halten. **G.**

Physik.

Die neueren Apparate der Akustik. Für Freunde der Naturwissenschaft und der Tonkunst von Dr. Fr. Jos. Pisko, Professor der Physik an der Communal-Oberrealschule auf der Wieden und an der damit in Verbindung stehenden Gewerbeschule in Wien, u. s. w. Mit 96 i den Text aufgenommenen Holzschnitten. Wien. Carl Gerold's Sohn. 1865. 8°.

Wir glauben, dass durch dieses fleissig und mit grosser Sachkenntniss ausgearbeitete, 268 Seiten umfassende, also ziemlich ausgedehnte Werk vielen Physikern, namentlich Lehrern der Physik, ein wesentlicher Dienst geleistet werden wird, und dass sich dieselben dem Herrn Verfasser mit uns für dasselbe zu besonderem Danke verpflichtet fühlen werden, weshalb wir uns auch beeilen, auf dasselbe aufmerksam zu machen. Alle wichtigeren neueren akustischen Instrumente, mit besonderer Berücksichtigung der schönen Arbeiten von König in Paris, sind in demselben sehr deutlich beschrieben, ihre Anwendung und ihr Gebrauch ist gelehrt, und die beigegebenen sehr guten, in ziemlich

grossem Maassstabe ausgeführten Holzschnitte dienen sehr zu besserer Veranschaulichung. Um die grosse Vollständigkeit des Werkes zu zeigen, theilen wir im Folgenden die Ueberschriften der Hauptabschnitte mit: Einleitung. I. Resonatoren und Vocal-Apparate nach Helmhöltz. II. Vielstimmige Sirenen. III. Die Tonschreibekunst, Phono- oder Vibrographie. IV. Anwendung der Optik in der Akustik. V. Apparate für schwingende Saiten. VI. Tönende Stäbe. VII. Tönende Platten. VIII. Die Luft als tönender Körper (Pfeifen). IX. Apparate bezüglich der Fortpflanzung des Schalls. A. Ermittelung der Schallgeschwindigkeit auf kleineren Strecken. B. Die Brechung der Schallstrahlen. C. Die Aenderung der Tonhöhe durch rasche Bewegung der Schallquelle oder des Beobachters. Ein Anhang enthält Anmerkungen, Ergänzungen und sehr reichhaltige und sorgfältige literarische Nachweise. — Möge das verdienstliche Werk bei allen Lehrern der Physik die gewiss recht sehr verdiente Beachtung finden.

Vermischte Schriften.

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle università italiane pubblicato per cura dei Professori G. Battaglini, V. Janni e N. Trudi. Napoli. (S. Literar. Ber. Nr. CLXXIII. S. 20.)

Volume III. Marzo 1865. Sulla teoria delle superficie; per Ulissi Dini. p. 65. — Correzioni. p. 81. — Ricerche di analisi applicata alla geometria; per E. Beltrami. p. 83. — Sull' integrazione per approssimazione; per Eligio Martini. p. 91. — Soluzioni delle questioni 5, 6, 7; per Ciro Sardi. p. 94.

Volume III. Aprile 1865. Sulla sviluppabile di 5° ordine; per N. Salvatore Dino. p. 100. — Dimostrazione di alcuni teoremi sulle superficie sviluppabili di 5° ordine; per E. d'Ovidio. p. 107. — Rivista bibliografica; per L. Cremona. p. 113 — Teorema del movimento di un punto in un piano quando si tien conto della rotazione della terra; per A. Mogni. p. 121.

Volume III. Maggio e Giugno 1865. Sulla sviluppabile di 5°. ordine; per N. Salvatore Dino. p. 133. — Sopra le funzioni algebriche di una variabile complesse; definita da una equazione di 3° grado; per E. Betti. p. 143. — Di un nuovo teorema relativo alla rotazione di un corpo intorno ad un asse; per D. Turazza. p. 146. — Avvertenza. p. 149. — Studio ele-

mentare intorno all'omologia; per P. Cassani. p. 150. — Teorema del movimento di un punto in un piano quando si tien conto della rotazione della terra; per A. Mogni. p. 166. — Dimostrazione di alcuni teoremi sulle superficie sviluppabili di 5^0. ordine; per E. d'Ovidio. p. 184. — Soluzione delle quistioni 5, 6, 7; per G. Mola. p. 190.

Annali di Matematica pura ed applicata pubblicati da Barnaba Tortolini e compilati da E. Betti a Pisa, F. Brioschi a Pavia, A. Genocchi a Torino, B. Tortolini a Roma. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CLXXI. S. 15.)

Anno VI. No. 6. Sull' integrazione dell' equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti fra due variabili. Memoria del Prof. B. Tortolini. p. 249. — Intorno ad alcune proprietà delle superficie di rivoluzione. Nota del Prof. E. Beltrami. p. 271. — Impossibilità in numeri interi dell' equazione $z^n = x^n + y^n$ quando $n > 2$. Nota del Prof. L. Calzolari. p. 280. — Intorno all' equazione $x^7 + y^7 + z^7 = 0$. Nota del Prof. A. Genocchi. p. 287. — **Rivista bibliografica.** Introduction à la théorie des nombres, par V. A. Le Besgue. Paris. 1862. — Tables diverses pour la décomposition des nombres en leurs facteurs prémiers, par V. A. Le Besgue. Paris 1864. Del Professore Angelo Genocchi. p. 289. — Pubblicazioni recenti. p. 291.

Wir bemerken hiebei gelegentlich, dass uns freundlichst ein vollständiges Verzeichniss der sämmtlichen Schriften des berühmten Herausgebers dieser Annalen, des Herrn Prof. Tortolini, unter dem Titel: „Elenco delle Produzioni scientifiche di Barnaba Tortolini" mitgetheilt worden ist, welches wir, als einen nicht unwichtigen Beitrag zur mathematischen Literatur, in diesen Literarischen Berichten abdrucken lassen werden, sobald der uns gerade jetzt fehlende Raum dazu vorhanden ist.

Rendiconto delle sessioni dell' Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna. Anno accademico 1864—1865. (Vergl. über das „Rendiconto" für 1863—1864. Literar. Ber. Nr. CLXVII. S. 8.)

Mit Verweisung auf die vorher genannte Nummer unseres Literarischen Berichts wegen Zweck und Einrichtung dieses „Rendiconto" der berühmten Akademie der Wissenschaften in Bologna, worüber daher hier nichts weiter zu sagen ist, machen wir auf die folgenden, in den Kreis des Archivs gehörenden, in den verschiedenen Sitzungen gelesenen Abhandlungen aufmerksam:

In der 3ten Sitzung, 24sten November 1864, las Prof. Cav.

Lorenzo Respighi: „Sulle cause del periodo diurno barometrico." Die Abhandlung ist in ziemlich ausführlichem Auszuge mitgetheilt und zur Beachtung sehr zu empfehlen. — In der 5ten Sitzung, 15ten December 1864, las Prof. Cav. Luigi Cremona: „Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane. Nota 2ª." Ueber diese bereits vollständig erschienene schöne Abhandlung ist von uns schon im Literar. Ber. Nr. CLXXIII. ausführlicher berichtet worden, worauf wir daher verweisen. — In der 15ten Sitzung, 9ten März 1865, wurde gelesen eine „Nota sulla monografia del Mississipi, e sopra un tentativo per trovare la portata dei fiumi" inviata dal Prof. Commend. Maurizio Brighenti. p. 43. mit Bezug auf das grosse Werk über den Missisippi von Humphreys und Abbot, und eine Formel über die Geschwindigkeit der Flüsse. — In der 19ten Sitzung, 6ten April 1865, las Prof. Cav. Cremona eine Abhandlung des abwesenden pensionirten Akademikers Prof. Cav. Chelini: „Dell' uso delle coordinate obliquangole nella determinazione dei momenti d'inerzia" p. 54., über welche wir später besonders berichten zu können hoffen. — In der 21sten Sitzung, 4. Mai 1865, las Doctor Domenico Piani: „Sopra alcune questioni di Matematica." pag. 61. betreffend die Lösung des irreducibeln Falls ohne Anwendung der Reihen von Valz, die Arbeiten von Ruffini über die Nothwendigkeit des irreducibeln Falls, über stereometrische und andere Gegenstände mit Bezug auf Arbeiten von Torricelli, Brunacci, Rossi, Perelli, Guido Grandi. — In der 24sten Sitzung, 18. Mai 1865, las Prof. Lorenzo Della Casa: Sul potere delle punte, osservazioni ed esperienze. p. 64. betreffend Elasticität, Elektricität u. s. w.

Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei compilati dal Segretario. Vergl. Liter. Ber. Nr. CLXXIII. S. 20.).

Anno XVIII. Sessione IVª. del 5. Marzo e Sessione V.ª del 2. Aprile 1865. Sui progressi più recenti della geografia generale. Memoria di monsig. F. Nardi. p. 249. — Lettere astronomiche del Cav. Giuseppe Bianchi. IV. Considerazioni e Reminiscenze di Meteorologia. (Lettera III s. m. Anno XVIII. Sessione Iª. del 4 Dicembre 1864.). p. 257. — Sulle osservazioni meteorologiche e magnetiche nell' osservatorio dell' Infante D. Luigi a Lisbona. Cenno del prof. P. Volpicelli. p. 272. (Sowohl der vorhergehende Brief des Herrn Bianchi, als auch

die Nachrichten, welche Herr Volpicelli in dem letzteren Aufsatze von der Einrichtung und den Arbeiten des meteorologischen und magnetischen Observatoriums des Infanten D. Luigi in Lissabon, dem als Director der Sig. Silveira vorsteht, gegeben hat, sind sehr interessant und verdienen recht sehr beachtet zu werden). — Ricerche analitiche sul bifilare, tanto magnetometro, quanto elettrometro, sulla curva bifilare, e sulla misura del magnetismo terrestre. Memoria del prof. P. Volpicelli (Continuazione e fine). Quinta Parte. Misura della componente orizzontale del magnetismo terrestre. p. 279. (Die vier früheren Abtheilungen dieser wichtigen analytischen Untersuchungen s. m. in den Atti. Vol. XVII. und Vol. XVIII. p. 1.). — Sur l'origine de nos Chiffres. Lettre de M. L. Am. Sédillot a M. le Prince Balthasar Boncompagni. p. 316. (Herr Sédillot schliesst diesen interessanten Brief mit folgenden Worten: „Quant à l'identification de nos chiffres modernes avec les chiffres arabes, elle est hors de doute, si l'on consulte les manuscrits arabes d'Espagne du XI[e] *siècle*, quoi qu'en dise M. Woepcke, et comme il l'affirme lui-même. Que ce soit Gerbert ou tout autre qui ait introduit chez nous ce nouveau système de numération, le fait ne peut être contesté et le tableau suivant en offre la meilleure preuve: hier folgen *nun* die Ziffern der Arabes orientaux, der Arabes d'Afrique, der Arabes d'Espagne und die Chiffres modernes, die wir wegen der *uns* mangelnden Typen hier leider nicht mittheilen können, deren Aehnlichkeit aber allerdings sehr in die Augen fallend ist). C'est à M. le prince Balthasar Boncompagni, au savant éditeur du liber Algorismi de Jean de Seville, della vita e delle opere di Gherardo Cremonese, du Liber Abbaci de Léonard de Pise, qu'il appartient de fixer l'opinion sur cette délicate et intéressante question.) — A. Secchi: *Analisi spettrale di talune nebulose.* p. 323. — Beigegeben ist diesem Hefte der Atti noch eine Iconografia e Sciografia dell' Osservatorio Astronomico eretto nella propria Casa in **Modena** dal Marchese **Raimondo Montecuccoli Laderchi** und eine besondere Zeichnung des Circolo meridiano di Starke auf demselben, aus der man von Neuem sieht, wie verbreitet der Sinn für Astronomie in Italien ist, und wie sehr dieselbe in der uneigennützigsten Weise, so wie von der italienischen Regierung, auch von den reichen und vornehmen Privaten dieses herrlichen Landes gefördert wird.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CLXXI. S. 17.)

Band L. Heft I. Blažek: Transformation und Berechnung einiger bestimmten Integrale. S. 60. — Stefan: Ueber die Dispersion des Lichtes durch Drehung der Polarisationsebene im Quarz. S. 88.

Band L. Heft II. Stefan: Ueber eine Erscheinung am Newton'schen Farbenglase. S. 135. — Stefan: Ueber Interferenzerscheinungen im prismatischen und im Beugungsspectrum. S. 138. — Oppolzer: Untersuchung über die Bahn des Planeten (73) „Clytia". S. 143. — Unferdinger: Die Wurzelformel der allgemeinen Gleichung des vierten Grades. S. 225. — Fritsch: Bericht über den verheerenden Hagelfall, der am 12. Juli zwischen 8—9 Uhr Abends bei Salzburg stattfand. S. 238.

Band L. Heft III und IV. Haidinger: Ein vorhomerischer Fall von zwei Meteoreisenmassen bei Troja. S. 288. — Ditscheiner: Bestimmung der Wellenlängen der Fraunhofer'schen Linien des Sonnenspectrums (mit 2 Tafeln). S. 296. — Mach: Ueber einige der physiologischen Akustik angehörige Erscheinungen. S. 342. — Stefan: Ein Versuch über die Natur des unpolarisirten Lichtes und die Doppelbrechung des Quarzes in der Richtung seiner optischen Axe. S. 380. — Ueber Nebenringe im Newton'schen Farbenglase. S. 394. — Lippich: Phonautographen von Scott (mit 1 Tafel). S. 397. — Julius Schmidt: Ueber Feuermeteore nach Zahlen, Detonationen, Meteoritenfällen, Schweifen und Farben, verglichen zur Höhe der Atmosphäre. S. 431.

Band L. Heft V. Haidinger: der Meteorsteinfall von Polinos in den Kykladen. S. 458. — Oppolzer: Ueber den dritten Kometen des Jahres 1864. S. 459. — Stefan: Ueber Interferenz des weissen Lichtes bei grossen Gangunterschieden. S. 481. — Stefan: Theorie der doppelten Brechung. S. 505. — Winckler: Einige Eigenschaften der Transcendenten, welche aus der Integration homogener Functionen hervorgehen. S. 531.

Band LI. Heft I und II. Moshammer: Zur Theorie eines Systems von Varianten der conoidischen Propellerschraube (mit 2 Tafeln). p. 49. — Weiss: Bahnbestimmung von (66) „Maja". S. 77. — Unferdinger: Die Auflösung des sphärischen Dreiecks durch seine drei Höhen (mit 1 Holzschnitte). S. 97. — Schrauf: Beitrag zu den Berechnungsmethoden der Zwillingskrystalle (mit 1 Tafel). S. 120. — Mach: Untersuchungen über den Zeitsinn des Ohres (mit 3 Holzschnitten). S. 133.

Preisaufgabe der Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei.

Die berühmte Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei in Rom hat eine Preisaufgabe gestellt und in einem besonderen Programm in italienischer und französischer Sprache veröffentlicht, welche wir unseren Lesern, so schnell als es uns möglich ist, im Folgenden in französischer Fassung mittheilen:

ACADÉMIE PONTIFICALE DES NUOVI LINCEI.
Programme pour le prix Carpi.

L'Académie, dans le but de conférer le prix annuel, fondé par la généreuse disposition testamentaire d'un de ses membres ordinaires, feu le chevalier docteur Pierre Carpi, propose de développer le thème suivant.

Thème.

Exposer une méthode au moyen de laquelle on puisse déterminer *tous* les valeurs rationnels de x capables de rendre un carré ou un cube parfait le polynôme $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4$, par des valeurs entières de A, B, C, D, E, pourvu qu'une ou plusieurs de ces valeurs de x existent réellement, et qui, en cas contraire, en fasse connaître l'impossibilité.

Éclaircissement.

Une méthode due au célèbre Pierre de Fermat pour rendre un carré

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4,$$

ou un cube l'expression

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3,$$

se trouve exposée par le P. Jacques de Billy dans son ouvrage intitulé: *Doctrinae analyticae inventum novum* (p. 30 et 31 de l'édition intitulée: *Diophanti Alexandrini Arithmeticorum libri sex, et de numeris multangulis liber unus*, etc. *Tolosae M.DC.LXX*). Cette méthode se trouve aussi exposée par Léonard Euler, dans les chapitres VIII, IX et X du tome second de son ouvrage intitulé *Anleitung zur Algebra*, traduit en français sous le titre d'*Elémens d'algèbre*.

Le tome XI[e] des Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg (année 1830) contient plusieurs mémoires posthumes d'Euler, relatifs à l'analyse de Diophante, dont l'un est intitulé: *Methodus nova et facilis formulas cubicas*

et biquadraticas ad quadratum reducendi. Cette méthode, en la considérant bien, n'est autre, dit Jacobi, que celle de la *multiplication des intégrales elliptiques*; méthode déjà proposée par Euler même dans ses Institutions de Calcul intégral, et ailleurs, pour résoudre algébriquement l'équation transcendante

$$\Pi(y) = n\,\Pi(x),$$

où

$$\Pi(x) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{f(x)}},$$

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4.$$

Cette importante observation de Jacobi se trouve dans le tome XIII[e] du *Journal de mathématiques* de M. A. L. Crelle (année 1835), à l'article: *De usu theoriae integralium ellipticorum et integralium Abelianorum in analysi Diophantea.*

La méthode donnée par Fermat pour rendre un carré

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4$$

est exposée aussi dans le volume intitulé: *Théorie des nombres. Troisième édition. Par Adrien Marie Legendre. Tome II. Paris* 1830. (p. 123—125.).

Dans un mémoire de Lagrange intitulé: *Sur quelques problèmes de l'Analyse de Diophante*, et inséré dans les *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres. Année MDCCLXXVII. A Berlin MDCCLXXIX*, est donnée aussi une méthode pour résoudre en nombres rationnels les équations générales de 3[me] et 4[me] degré entre deux indéterminées x, y.

Cependant ces méthodes sont imparfaites 1°. parce qu'elles supposent déjà une solution connue; 2°. parce qu'il n'est pas prouvé qu'elles fournissent toutes les solutions possibles. Il serait par conséquent à désirer qu'on en trouvât une autre, qui n'eût besoin de la connaissance d'aucune solution, fît connaître si le problème soit possible ou non, et dans le cas qu'il soit possible, en donnât toutes les solutions; ce qui serait d'un avantage remarquable dans la théorie des nombres, ou analyse indéterminée, et lui frayerait le chemin à d'importants progrès, n'ayant été jusqu'aprésent satisfait, sauf dans des cas assez particuliers traités par des savants géomètres, aux conditions surenoncées. Cela pourrait aussi être utile au progrès d'autres parties des sciences mathématiques, comme on peut facilement le voir par la relation que Jacobi a indiquée dans son écrit cité ci-dessus entre le problème exposé et la doctrine des fonctions elliptiques.

Conditions.

1º. Les mémoires sur le thème proposé devront être rédigés en italien, ou en latin, ou en français: nulle autre langue n'est admise.

2º. Chaque mémoire portera sur son frontispice une épigraphe, qui sera répétée à l'extérieur d'une enveloppe cachetée, dans laquelle se trouveront le nom et l'adresse de l'auteur.

3º. On ouvrira seulement l'enveloppe correspondante au mémoire qui aura obtenu le prix.

4º. Si les auteurs qui auront obtenu une mention honorable désirent que l'Académie publie leurs noms, il faudra qu'ils en fassent la demande dans les quatre mois qui suivront le jour dans lequel le prix aura été décerné; ce terme expiré les enveloppes seront brulées sans être décachetées.

5º. L'Académie a décidé que, à l'exception de ses trente membres ordinaires, chacun, quelle que soit sa nationalité, pourra concourir pour ce prix.

6º. Chaque mémoire avec l'enveloppe cachetée correspondante devra être envoyé *franco* à l'Académie, avant le dernier jour du mois d'octobre 1866, date de la clôture du concours.

7º. Le prix sera décerné par l'Académie dans le mois de janvier 1867 et consistera en une médaille d'or de la valeur de *cent écus romains.*

8º. Le mémoire couronné sera publié, entièrement ou par extrait, dans les Atti de l'Académie, et l'auteur en recevra cinquante exemplaires.

Rome, 11 juin 1865.

Le président
N. Cavalieri San Bertolo.

Le secrétaire
P. Volpicelli.

Literarischer Bericht
CLXXV.

Am 12ten October 1865 starb eines plötzlichen Todes der ordentliche Professor der Physik am polytechnischen Institute in Wien:

Dr. Ferdinand Hessler.

Schon einige Zeit von seiner Familie vermisst, ward er im physikalischen Kabinete des Polytechnikums, seinem Institute, todt gefunden. Wer, wie der Herausgeber des Archivs, den Verblichenen und Glieder seiner trefflichen Familie, namentlich die Tochter und den in würdigster Weise in die Fusstapfen des Vaters getretenen Sohn, persönlich zu kennen, und von seiner grossen Liebenswürdigkeit sich mancher Beweise von Aufmerksamkeit und Freundlichkeit zu erfreuen das Glück hatte: wird ganz die unendlich grosse Trauer, in welche die würdige Familie durch diesen so plötzlichen, unter besonders betrübenden Umständen erfolgten Tod versetzt worden ist, zu würdigen verstehen, und aus innerstem Herzen derselben wünschen, dass — wie es ihr nicht fehlen kann und wird — der Herr über Leben und Tod sie in seinen Schutz nehmen möge. G.

Geboren zu Regensburg am 23. Februar 1803, machte F. Hessler die Gymnasial- und philosophischen Studien in Prag, seine mathematischen, naturwissenschaftlichen und zugleich juridischen Studien in Wien, war vom J. 1826—30 supplirender Professor der Physik an der Universität zu Graz und zugleich 1829 supplirender Professor der Chemie am ständischen Joanneum, 1830—35 wirklicher Professor der Physik an der Grazer Universität, 1836—38 Professor der Physik an der Prager Universität, und seit 1843 Professor der Physik am k. k. polytechnischen Institute in Wien. In Anerkennung seiner Verdienste war er wirkliches oder korrespondirendes Mitglied verschiedener wissenschaftlicher Gesellschaften und Fakultäten. Er ist der Verfasser des von 1839 an vom Vereine zur Ermunterung des Gewerbsgeistes in Böhmen herausgegebenen „Jahrbuches für Technik, Physik und Chemie,“ war von 1841 an bis zu seiner Berufung nach Wien im

Jahre 1843 Redakteur der von demselben Vereine herausgegebenen „Enzyklopädischen Zeitschrift des Gewerbevereins," und verfasste ein Lehrbuch der Physik für höhere Schulen, sowie auch von ihm mehre wissenschaftlich-technische Abhandlungen in verschiedenen Zeitschriften erschienen. Er bereiste im Auftrage des Gewerbevereins zur Ermunterung des Gewerbsgeistes in Böhmen und zu industriellen Zwecken in den Jahren 1838, 1839 und 1840 Böhmen und andere Länder des österreichischen Kaiserstaates, mehre Staaten des deutschen Bundes, die Niederlande, Belgien, Frankreich und Grossbritannien, und wurde 1840 zum Mitglied der Provinzial-Handelskommission in Böhmen ernannt; er war ein thätiges Mitglied des Beurtheilungsausschusses von Gewerbs-Produkten-Ausstellungen in Prag und Wien, und wurde von der Wiener Handelskammer als Jurymitglied zur allgemeinen Pariser Industrieausstellung im Jahre 1855 abgeordnet. Als Fachschriftsteller veröffentlichte er folgende selbstständige Werke: Lehrbuch der Physik nach dem Bedürfnisse der Technik, der Künste und Gewerbe, Wien, 1854*); Jahrbuch für Physiker, Chemiker, Mineralogen, Techniker, Graz, 1835; Jahrbuch für Fabrikanten und Gewerbetreibende, Prag 1838 und 1839. Im Jahre 1861 wurde Hessler bei der Neuwahl für den Wiener Gemeinderath durch das Vertrauen seiner Mitbürger in denselben gewählt.

Die Mittheilung einiger biographischer Notizen über den in diesem Jahre leider verstorbenen Professor Dr. König am Kneiphöfischen Gymnasium in Königsberg i. P., dem das Archiv mehrere werthvolle Aufsätze (s. Inhaltsverzeichniss zu Theil XXVI. bis XL. S. 25.) verdankt, würde dem Herausgeber sehr angenehm sein, und bittet er recht sehr, ihm dieselben baldigst zugehen zu lassen.

Auch über den trefflichen, der Wissenschaft leider entrissenen Encke möchten wir recht sehr um baldige Mittheilung einiger biographischen Notizen bitten.

Geschichte der Mathematik.

Histoire des sciences mathématiques et physiques chez les Belges; par Ad. Quetelet, Directeur de l'Obser-

*) Die dritte Auflage dieses verdienstlichen Werks (Wien 1865. Braumüller) wird von Herrn Prof. Dr. Pisko in Wien fortgesetzt.

vatoire Royal de Bruxelles, etc. etc. Bruxelles. M. Hayez. 1864. 8.

Wie schwierig, aber auch wie verdienstlich, Bearbeitungen der Geschichte der mathematischen und physikalischen Wissenschaften bei einzelnen Völkern sind, haben wir schon bei einer anderen Gelegenheit, indem wir nämlich das durch den hochseeligen König Maximilian von Bayern in hochherzigster Weise in's Leben gerufene Unternehmen einer Geschichte der Wissenschaften, und insbesondere der mathematischen und physikalischen Wissenschaften, in Deutschland*) im Literar. Ber. Nr. CXLII. S. 1. vorläufig anzeigten, hervorgehoben; und welche grossen Verdienste der Fürst B. Boncompagni in Rom sich, so wie um die Geschichte der Mathematik überhaupt, insbesondere auch um die in allen Beziehungen so wichtige Geschichte der Mathematik in Italien erworben hat, und fortwährend in immer erhöhetem Maasse erwirbt, ist unseren Lesern aus früheren Literarischen Berichten hinreichend bekannt. In die Reihe dieser Arbeiten tritt nun in würdigster Weise die vorliegende Geschichte der mathematischen und physikalischen Wissenschaften bei den Belgiern, durch deren Publication Herr Ad. Quetelet *seinen* bekannten grossen Verdiensten auf anderen Gebieten unserer Wissenschaft ein neues nicht minder grosses hinzugefügt hat. Wir halten dieses aus langjährigen Studien hervorgegangene Werk — über welches Herr Quetelet in dem „Appendice" selbst sagt: „L'ouvrage qui précède était composé depuis longtemps. Je m'étais proposé, en l'écrivant, de reconnaître les phases qu'a présentées, dans l'intérieur de la Belgique, le développement des sciences exactes et des connaissances qui en dépendent; je voulais étudier en même temps la marche qu'il convient de suivre dans l'état actuel des choses" — für einen sehr wichtigen Beitrag zur Geschichte der Mathematik und Physik nicht bloss, sondern zur Culturgeschichte überhaupt, weil Herr Quetelet, mit intimster Kenntniss der politischen Geschichte seines vielbewegten Vaterlandes, stets die Geschichte der Wissenschaften, ja auch der Künste, in ihrer Verbindung mit und in ihrer Abhängigkeit von jener betrachtet und in's Auge fasst, wobei zugleich auf allen Seiten in einer für Jeden, dessen Herz selbst von solchen Gefühlen bewegt werden kann, im höchsten Grade wohlthuenden und erfreulichen Weise sein lebhaftes patriotisches Gefühl hervortritt.

---

*) Mögen Herr Gerhardt in Eisleben und Herr Jolly in München nicht zu lange auf die Publication der in ihre Hände gelegten Arbeiten warten lassen!

Nach einer sehr interessanten allgemeinen Einleitung theilt der Herr Vf. sein schönes, auch mit grösster Eleganz ausgestattetes Werk in vier Bücher, nämlich: **Livre I.** Depuis l'origine de la Belgique jusqu'au règne de Charles-Quint. **Livre II.** Depuis Charles-Quint jusqu'à la fin du Gouvernement d'Albert et Isabelle. **Livre III.** Fin du règne d'Albert et Isabelle, jusqu'à l'époque de la création de l'Académie Impériale de Bruxelles. **Livre IV.** Depuis la création de l'Académie Impériale et Royale de Bruxelles jusqu'à 1830., womit zugleich die Gränze bezeichnet ist, bis zu welcher Herr Quetelet sein Werk fortgeführt hat. Auf p. 367. u. s. w. sagt Derselbe: „La révolution de 1830 suivit le cours ordinaire de toutes les révolutions et changea la face d'une infinité de choses. Il fut aussi question de réorganiser l'Académie: mais, malgré les préjugés qui s'étaient élevés contre elle, l'Académie qui, dès lors, avait la conscience de son avenir, sut se tenir debout et résista à l'orage qui la menaçait. Elle était loin de prétendre sans doute que son organisation ne pût être améliorée, et qu'il n'y eût aucune modification à introduire dans son intérieur; mais elle avait à coeur de le faire par ellemême, et de montrer avant tout qu'elle avait compris sa mission et qu'elle saurait la remplir. Loin de lui savôir mauvais gré de sa confiance en elle même, le gouvernement et la nation *ne tardèrent* pas à lui témoigner leur sympathie et à lui donner même les moyens d'étendre ses travaux.“ — „Sans me poser en panégyrist de l'Académie, je dois me borner ici à un simple exposé des faits pour apprécier la persévérance avec laquelle ce corps a constamment marché vers le but qu'il se proposait d'atteindre, animé du noble désir de pouvoir, sous le rapport des sciences et des lettres, représenter dignement la nation et poser *sa pierre* dans le vaste édifice des connaissances humaines, auquel tout peuple civilisé doit son tribut“. — „Le changement politique qui se manifesta dans cette circonstance se lia d'assez près au mouvement intellectuel de la nation, pour qu'il fût permis de croire que la Belgique avait enfin repris le rang qu'elle semblait avoir perdu depuis longtemps. Les Chambres des Représentants et du Sénat reçurent en même temps une forme digne d'elles; et, sous un prince éclairé, type des rois constitutionels, la Belgique marcha vers un avenir glorieux et tranquille, avec la certitude de pouvoir se replacer au rang des nations les plus avancées, d'où elle avait été écartée pendant longtemps par les funestes effets des dominations étrangères.“ — Mögen unsere Leser aus diesen kurzen wörtlichen Mittheilungen, welche die grosse Wichtigkeit der ihre Mission in der würdigsten und richtigsten Weise erkennenden und

auffassenden Académie Royale de Belgique mit Recht in beredter Weise hervorheben, zugleich die übrigens längst bekannte höchst elegante Diction des Herrn Vfs. erkennen!

In den auf jeder Seite sich findenden ausführlichen Noten hat der Herr Vf. mit der grössten Gelehrsamkeit die reichste Literatur niedergelegt, und vielfache Auszüge aus den betreffenden, oft sehr seltenen Werken gegeben, die ein sehr deutliches Bild von deren Inhalt und ihrer wissenschaftlichen Bedeutung liefern, so dass also auch in dieser Beziehung des Werk künftig eine der wichtigsten Quellen sein wird, aus der man eine tiefere Kenntniss der belgischen Literatur auf dem Gebiete der exacten Wissenschaften zu schöpfen hat. Den Schluss der eigentlichen Geschichte bildet ein sehr interessanter „Aperçu général“ und zwei Büchern sind unter den folgenden Titeln werthvolle Tabellen beigefügt: Souverains qui ont régné en Belgique de 862 à 1477. (p. 72.) — Mouvement du génie mathématique en Belgique (p. 374.) — welche, namentlich die letzteren, den berühmten Statistiker bekunden.

Ausser der eigentlichen Geschichte der mathematischen und physikalischen Wissenschaften enthält das Werk nun noch auf p. 375 — p. 455. einen besonderen Anhang. Wie wichtig die Gründung der Königlichen Sternwarte in Brüssel für die Astronomie und die Physik der Erde geworden ist, weiss Jeder; und eben so bekannt ist es, dass dies nur durch die berühmten und ausgedehnten Arbeiten und Veranstaltungen Herrn Quetelet's ermöglicht worden ist. Deshalb kann demselben die Wissenschaft es nur Dank wissen, dass er in diesem Anhange eine ausführliche Darstellung der Entstehung, des Zwecks, der ununterbrochenen Fortführung u. s. w. dieser wichtigen Arbeiten geliefert und dadurch zugleich eine höchst lehrreiche Anleitung zur zweckmässigen und erfolgreichen Ausführung aller solcher Arbeiten gegeben hat. Indem wir einen Jeden, der sich für solche Arbeiten interessirt, dringend auf diesen Anhang aufmerksam machen, müssen wir uns hier im Uebrigen mit der folgenden Mittheilung der Ueberschriften seiner einzelnen Abtheilungen begnügen, woraus zugleich der grosse Umfang dieser Arbeiten erhellen wird: **Sur le but et les travaux de l'Observatoire royal de Bruxelles. — Phénomènes périodiques:** 1. Variations annuelles et diurnes des températures de l'air et du sol. 2. Ondes atmosphériques, leur propagation dans l'atmosphère. 3. Retours périodiques des marées sur les côtes de la Belgique et sur le globe en général. 4. Courants maritimes à la surface du globe. 5. Magnétisme terrestre en Belgique.

6. Électricité statique et électricité dynamique de l'air; orages. 7. Courants électriques pour la détermination de l'heure. 8. Longitude de Bruxelles par rapport à Greenwich et à Berlin. 9. Étoiles filantes sporadiques et périodiques. 10. Phénomènes périodiques des plantes et animaux. 11. Variations périodiques, diurnes et annuelles, que présente la statistique en Belgique et dans les divers États. 12. Unité projetée des poids et mesures dans les différents pays. — **Panthéon Belge:** Embellissements du Parc de Bruxelles (Aufstellung von Statuen berühmter Belgier in dem bekannten prachtvollen Park von Brüssel).

Wir wünschen dem Herrn Vf. von Herzen Glück, dass es ihm am Abend seines unablässig für die Wissenschaft thätigen, mit den schönsten Erfolgen gekrönten Lebens möglich gewesen, ein so wichtiges und schönes Werk wie des vorliegende, von dem wir mit dem grössten Interesse genaue Kenntniss genommen haben und das wir allen Mathematikern und Physikern zu sorgfältigster Beachtung empfehlen, zu vollenden; möge zu ferneren Arbeiten die gütige Vorsehung ihm noch lange Kraft und Muth verleihen!

Intorno ad un passo della Divina Commedia di *Dante* Allighieri. Lettera del Prof. Ottaviano Fabrizio Mossotti a B. Boncompagni. Seguita da una Nota intorno a questa Lettera. Roma. Tipografia delle scienze matematiche e fisiche. Via Lata N°. 211 A. 1865. 4°.

Dieser Brief des berühmten, um Astronomie, Optik und mathematische Physik überhaupt hochverdienten, der Wissenschaft leider bereits entrissenen Ottaviano Fabrizio Mossotti in Pisa betrifft eine der weiteren Aufklärung allerdings bedürfende Stelle der Divina Commedia von Dante Allighieri. Dieselbe findet sich im zweiten Gesange des Paradieses. V. 97—105., und lautet nach der Witte'schen Uebersetzung (Dante Allighieri's Göttliche Komödie. Uebersetzt von Karl Witte. Berlin. 1865. 12°. S. 367.) folgendermassen:

97. Drei Spiegel nimm, entferne deren zweie
    Gleich weit von Dir, und lasse zwischen beiden
    Den dritten ferner ab Dein Auge treffen.

100. Lass hinter Deinem Rücken, bist den Spiegeln
    Du zugewandt, ein Licht aufstell'n, das alle
    Erhell' und rückgestrahlt von allen werde.

103. Erreicht nun auch, des Bildes Grösse nach,
Der fern're Spiegel nicht die beiden nähern,
So siehst Du doch gleichmässig alle glänzen.

Herr Boncompagni hat Mossotti's Brief mit einer überaus gelehrten und interessanten „Nota intorno alla Lettera del Prof. Mossotti" begleitet, auf die wir, wie natürlich die Leser unsers Archivs, auch alle Bearbeiter und Commentatoren des Dante dringend aufmerksam machen möchten. Hier interessirt uns natürlich vorzugsweise der physikalische oder optische Inhalt der obigen Verse, über welchen Herr Boncompagni u. A. p. 6. sagt: „Il Prof. Mossotti nella sua lettera suddetta avverte che Dante in questo passo del suo Paradiso indicò un principio teorico importante, cioè che le superficie piane luminose od illuminate in egual grado appariscono della stessa chiarezza a qualunque distanza esse siano poste." Wir möchten wohl den einen oder den anderen unserer Leser auffordern, eine weitere mathematische, ganz elementare, Erläuterung der obigen Stelle des Dante zu geben, natürlich mit Rücksicht auf die vorliegende Schrift, und würden einem betreffenden Aufsatze gern eine Stelle im Archiv einräumen. Was Witte in den seiner Uebersetzung beigefügten „Erläuterungen" S. 653. über obige Stelle sagt, ist jedenfalls wenig genügend.

Schliesslich will ich noch anführen, was Mossotti selbst über die in Rede stehende Stelle sagt: „A me pare che Dante coll' essempio dei tre specchi ha voluto segnalare il principio che le superficie piane luminose, od illuminate in egual grado appajono della stessa chiarezza a qualunque distanza siano poste, perchè la grandezza dell' immagine e la quantità di luce che riceve la pupilla da ciascun punto diminuendo l'una e l'altra nella ragione inversa del quadrato della distanza, vi è un compenso, ed ogni elemento d'egual estensione dell' immagine apparente è sempre rappresentato da una stessa quantità di luce nell' occhio a qualunque distanza si osservi la superficie.."

Intorno ad una traduzione italiana fatta nell' anno 1341 di una compilazione astronomica di Alfonso X. Re di Castiglia. Nota di Enrico Narducci. Roma. Tipografia delle scienze matematiche e fisiche. Via Lata. N°. 211 A. 1865. 8°.

Eine von der grossen Gelehrsamkeit des Herrn Enrico Narducci von Neuem das schönste Zeugniss ablegende Beschreibung

eines auf der Bibliothek des Vatican's sich findenden Codex, welche für die Geschichte der Mathematik, insbesondere der Astronomie, sehr wichtig ist, und auf welche daher hier besonders aufmerksam gemacht werden muss. Dieser Codex ist in dem Catalog der Codices der genannten Bibliothek also bezeichnet:

„8174. Trattato della Sfera composto per ordine di Alfonso Rè di Castiglia, e tradotto dalla Lingua Araba in Italiano da Gueruccio figliuolo di Cione Federighi della molto nobile Città di Firenze nell' anno 1341, come ricavasi dal Foglio 103. della medesima Opera. Codex Membranaceus in folio summi pretii, quia continet versionem Italam supradicti Guerucii Federighi, cujus nulla mentio habetur apud Crusce scriptores. Continet folia 447. Inc. Questo Libro. Codex Chart. Sec. XIV."

Welche Schätze für die Geschichte der Mathematik mögen die italienischen Bibliotheken noch enthalten, und wie verdienstlich sind die Bemühungen, diese Schätze an's Licht zu ziehen und zugänglich zu machen! Wie gross sind namentlich die Verdienste des Fürsten Boncompagni in dieser Beziehung, der entweder sich selbst solchen Publicationen unterzogen hat, oder durch dessen hochherzige Liberalität dieselben möglich gemacht worden sind!

Memorie di un Codice greco Vaticano, pubblicate dal Prof. Giuseppe Cavaliere Spezi, Scrittore della Vaticana. Roma. Tipografia delle scienze matematiche e fisiche. Via Lata. N°. 211. A. 1865. 8°.

Dieser hier beschriebene, mit der Nummer 191 bezeichnete griechische Codex aus dem 13ten Jahrhundert auf Baumwollen-Papier (carta bambagina) enthält Schriften von Euklid über Optik, Katoptrik und Musik, die Data des Euklides, Schriften von Theodosius, Aristarch, Hypsikles, Eutocius, Ptolemäus, Proclus, Eratosthenes, Hipparch, Diophant (ἀριθμητικῶν βίβλιον ά.; — περὶ πολυγώνων ἀριθμῶν), u. s. w., u. s. w., im Ganzen an der Zahl 49, die in der verdienstlichen Schrift, auf die wir hier recht sehr aufmerksam machen, ihren Titeln nach sämmtlich genau verzeichnet sind.

Geometrie.

Stereometrische Aufgaben nebst ihren Auflösungen, für den Gebrauch in höheren Lehranstalten bearbeitet von Dr. Carl Hechel. Erstes Heft. Reval. Franz Kluge. (Leipzig. R. Hartmann). 1865.

Im Literar. Ber. Nr. CXLVII. S. 3. haben wir bei Gelegenheit der Anzeige der schönen „Sammlung stereomtrischer Aufgaben von J. A. Müttrich. Königsberg. 1861." bemerkt, dass stereometrische Aufgaben für den Unterricht keineswegs in Ueberfluss vorhanden, und Sammlungen solcher Aufgaben daher jederzeit besonders verdienstlich seien. Dies gilt auch von der vorläufig in ihrem ersten Hefte vorliegenden Sammlung von Herrn Dr. Carl Hechel in Dorpat, da wir nach näherer Kenntnissnahme ganz der Meinung sind, dass diese Sammlung ein zweckmässiges, mit Dank aufzunehmendes Hülfsmittel für den stereometrischen Unterricht darbietet, auf welches alle Lehrer recht sehr aufmerksam zu machen sind. Das vorliegende erste Heft enthält die Abschnitte: I. Würfel (1—32). II. Parallelepipedon (33—72). III. Prisma (73—114). IV. Pyramide (115—226). V. Abgestumpfte Pyramide (227—283). VI. Pyramidale und prismatische Kugelhaufen (284—305). VII. Prismatische Abschnitte und *Obelisken* (306—342). VIII. Cylinder (343—477). — Das zweite Heft, dessen baldiges Erscheinen sehr zu wünschen ist, enthält in ungefähr 550 Aufgaben: IX. Kegel. X. Kegelstumpf. XI. Rotationskörper. XII. Kugel.

Trigonometrie.

Lehrbuch der ebenen Trigonometrie nebst mehreren hundert, zur Uebung im Auffinden von Auflösungen und Beweisen systematisch geordneten Formeln, Aufgaben und Lehrsätzen. Zum Gebrauch beim Unterrichte in Real- und Gymnasialanstalten, so wie zum Selbststudium, von Dr. Otto Böklen. Stuttgart. Becher. 1864. 8°.

Dieses Lehrbuch enthält eine einfache und deutliche Darstellung der ebenen Trigonometrie nach gemischter algebraisch-gemetrischer Methode, welche nicht berechtigen würde, dasselbe hier einer kurzen Besprechung zu unterwerfen. Aber die darin enthaltene sehr grosse Sammlung schöner Uebungsaufgaben, die

keineswegs alle zu den leichtesten und einfachsten gehören, verpflichtet uns, hier recht sehr auf dasselbe aufmerksam zu machen, weil Lehrer gewiss vieles für ihre Zwecke sehr Brauchbare darin finden werden.

Physik.

Sulle condizioni igieniche del Clima di Roma. Lettura del P. A. Secchi d. C. d. G. fatta alla Accademia di Arcadia nel Giorno 11 di Giugno 1865. Roma. Tipografia delle belle arti. 1865. 8°.

Wir machen auf diese sehr interressante Schrift des berühmten Astronomen über das Klima der ewigen Stadt in gesundheitlicher Beziehung recht sehr aufmerksam und empfehlen sie zu besonderer Beachtung. Auf S. 4. sagt der Herr Verfasser: „Il clima di Roma di sua natura è eccellente, e privilegiato dalla natura.“ Wenn er dann aber, nachdem er die ganze Schönheit des römischen Klima mit lebhaften Farben geschildert, auf S. 6. weiter sagt: „In mezzo a tanta felicità un fiero nemico ci travaglia in alcuni mesi dell' anno, e questo è la così detta malsania dell' aria, e le febbri che ne sono la conseguenze“, *so müssen* dabei besondere Ursachen wirken, die in dieser in jeder Beziehung interessanten Schrift in eingehender und sehr lehrreicher Weise besprochen und untersucht werden. Mögen unsere Leser dieselbe sich, wie schon gesagt, bestens empfohlen sein lassen!

Vermischte Schriften.

Der Monitor. Eine Sammlung von Formeln und Tabellen aus dem Gebiete der höheren und niederen Mathematik und Mechanik. Für Techniker u. s. w., überhaupt für alle die sich mit Mathematik beschäftigen, zusammengestellt von Hans H. van Aller, Oberst a. D. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. Erster Theil. Mathematik. Hannover. Wedekind. 1865. kl. 8°.

Dieser äusserlich sehr schön und sauber ausgestattete, und sehr zweckmässig eingerichtete, namentlich eine sehr leichte Orientirung gestattende „Monitor“ enthält eine sehr reiche Sammlung von Formeln aus dem ganzen Gebiete der reinen Mathema-

tik, die wohl, namentlich für alle Fälle der Praxis, völlig ausreichend sein dürfte. Alles, was er enthält, ist aber auch wirklich allgemein anwendbar und ganz an seinem Orte. Logarithmentafeln enthält er freilich nicht, wie gewisse andere Sammlungen dieser Art, die aber auch an einem solchen Orte ganz unnütz sind und von Niemand in einem solchen Buche gesucht werden dürften, überhaupt wohl in dieselben nur mit aufgenommen worden sind, um recht viel Papier zu verbrauchen. Auch verdient es Anerkennung, dass der seinem Gegenstande völlig gewachsene Herr Verfasser sich überall der am Allgemeinsten recipirten Zeichen bedient hat, und nicht solcher, die nur ausnahmsweise von einigen Mathematikern gebraucht werden, und die sich letztere oft selbst gemacht haben, was aber der Wissenschaft nicht frommt und mit Recht nur selten Anerkennung findet. Wir empfehlen das hübsche und nützliche Büchlein recht sehr zur Beachtung und sehen der zweiten, die Mechanik enthaltenden Abtheilung mit Verlangen entgegen.

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle università italiane, pubblicato per cura dei Professori G. Battaglini, V. Janni e N. Trudi. Napoli. (S. Literar. Ber. Nr. CLXXIV. S. 3.)

Volume III. Luglio e Agosto 1865. Nozioni teoriche sull' attrito; per Alessandro Dorna. p. 202. — Dimostrazione di alcuni teoremi sulle superficie sviluppabili di 5⁰ ordine; per E. d'Ovidio. p. 214. — Sulle forme binarie dei primi quattro gradi; per G. Battaglini. p. 219. — Ricerche di analisi applicata alla geometria (Cont. vedi pag. 91.); di Eugenio Beltrami. p. 228. — Sulle superficie di curvatura costante; nota di Ulisse Dini. p. 241.

Annali di Matematica pura ed applicata pubblicati da Barnaba Tortolini e compilati da E. Betti a Pisa, F. Brioschi a Pavia, A. Genocchi a Torino, B. Tortolini a Roma. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CLXXIV. S. 4.)

Tom. VII. N⁰. 1. Sulle superficie nelle quali la somma dei due raggi di curvatura principale è costante. Nota di Ulisse Dini. p. 5. — Sull' uso dei determinanti per rappresentare la somma delle potenze intere dei numeri naturali. Nota di F. Siacci. p. 19. — Sopra alcuni punti della teoria delle super-

ficie applicabili. Nota di Ulisse Dini. p. 25. — Pubblicazioni recenti. p. 48.

Sitzungsberichte der königl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften in München. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CLXX. S. 19.)

1864. II. Heft IV. v. Bezold: Zur Lehre vom binocularen Sehen. S. 372.

1865. I. Heft I. Lamont: Astronomische Bestimmung der Lage des bayerischen Dreiecksnetzes auf dem Erdsphäroid. S. 28. (Ein für Geodäsie mehrfach interessanter Aufsatz, dessen Inhalt folgender ist: **Erste Mittheilung.** 1. Geschichtliche Einleitung. — 2. Aeltere Bestimmungen. — 3. Neue Messungen. I. Benediktbeuern. II. Hohenpeissenberg. III. Coburg. IV. München. — 4. Schlussbemerkungen. — (Wir sehen weiteren Mittheilungen mit Verlangen entgegen).

1865. I. Heft II. Enthält in den Kreis des Archivs gehörende Aufsätze nicht.

1865. I. Heft III. H. v. Schlagintweit: *Die Temperaturstationen und Isothermen von Hochasien.* S. 226. — *Nekrolog* auf Friedrich Georg Wilhelm Struve. S. 295.

1865. I. Heft IV. Seidel: Ueber den numerischen Zusammenhang, welcher nach Beobachtungen der letzten 9 Jahre in München zwischen den Niveauschwankungen des Grundwassers und der grösseren oder kleineren Frequenz der Typhusfälle zu erkennen ist. S. 348.

1865. II. Heft I. Enthält keine in den Kreis des Archivs gehörende Aufsätze.

1865. II. Heft II. Steinheil: Ueber die Bedingungen der Erzeugung richtiger dioptrischer Bilder. In diesem interessanten Aufsatze giebt Herr v. Steinheil im Allgemeinen Nachricht über von ihm und seinem Sohne angestellte neue Untersuchungen über den oben genannten allerdings sehr wichtigen Gegenstand und sagt darüber am Schluss des Aufsatzes: „Der hiermit betretene Weg in der Dioptrik wird diese völlig umgestalten. Denn erst jetzt kennen wir die Bedingungen, deren Erfüllung richtige Bilder giebt.“ Hierdurch werden allerdings sehr grosse Erwartungen erregt, denen aber Herr v. Steinheil gewiss entsprechen wird, wie von einem so sehr und so innig theoretisch und praktisch mit den

fraglichen Gegenständen vertrauten Manne gar nicht anders erwartet werden kann.

Bulletins de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CLXXII. S. 11.)

33me Année, 2me Sér., T. XVIII. Nouvelle méthode de mesure de l'indice de réfraction des liquides; par M. Montigny. p. 10. — Sur un nouveau chronoscope électrique à cylindre tournant, fondé sur l'emploi du diapason; par M. H. Valerius. Rapport de M. Melsens. p. 128. — Sur les vitrations des fils de verre attachés par une de leurs extrémités à un corps vitrant et libres à l'autre; par M. H. Valerius. Rapport de M. Melsens. p. 131. — Sur quelques effets curieux des forces moléculaires des liquides; par G. Van der Mensbrugghe. p. 161. — Sur l'observatoire royal de Bruxelles par M. Ad. Quetelet. p. 222. — Sur les observations des étoiles filantes du 10 août 1864 à Bruxelles et sur les extrèmes de température observés depuis trente ans; par M. A. Quetelet. p. 225. — Sur les aérolithes, et spécialement sur ceux observés à Athènes par M. J. Schmidt; note communiquée par M. Ad. Quetelet. p. 315. — Sur les variations séculaires du magnétisme; par M. Chr. Hansteen. p. 379. — Note sur une proposition nouvelle relative à la disposition des appuis qui correspond au minimum de fatigue maxima dans le cas d'une pièce prismatique chargée uniformément; par M. L. Derote. Rapport de M. Lamarle. p. 441. — Der vorstehende Aufsatz ist vollständig mitgetheilt p. 455—p. 476.

34me Année, 2me Sér. T. XIX. Note sur la constitution intérieure des corps; par M. Valerius. Rapport de M. Plateau. p. 11. — Sur la constitution physique du soleil, note de M. Chacornac, adressée à M. Ad. Quetelet. p. 50. — Sur les étoiles filantes et spécialement sur la nécessité de les observer dans l'hemisphère austral. Lettre de M. H.-A. Newton à M. Ad. Quetelet. p. 55. — Sur la constitution intérieure des corps; par M. Valerius. p. 72. — Note sur certaines illusions d'optique; par M. Delboeuf. Rapport de M. Plateau. p. 154. — Recherches sur l'indice de réfraction de la lumière blanche réfractée sans dispersion sensible; par M. Montigny. p. 177. — Note sur certaines illusions d'optique; essai d'une théorie psychophysique de la manière dont l'oeil apprécie les distances et les angles; par M. Delboeuf. p. 195. — Sur les tremblements de terre en 1863, avec supplements pour les années antérieures

de 1843 et 1862; par M. A. **Perrey**. Rapport de M. **Dupres** p. 300. Rapport de M. **Quetelet**. p. 301. — Sur le bolide du 17 février 1865; par M. G. **Dewalque**. p. 304. — Sur les époques comparées de la feuillaison et de la floraison à Bruxelles et spécialement à Stettin et à Vienne; par MM. **Ad. Quetelet**, **Linster** de Pulkowa et **Fritsch** de Vienne. p. 395. — Note sur les hélicoïdes gauches susceptibles de s'appliquer et de se développer les uns sur les autres; par M. E. **Lamarle**. p. 407. — Sur la transformation des séries et sur quelques intégrales définies, mémoire de M. E. **Catalan**. Rapport de M. **Schaar**. p. 524. — Magnétisme terrestre: déclinaison et inclinaison de l'aiguille, par MM. **Ad.** et **Ern. Quetelet**. p. 528. — Sur les étoiles filantes de novembre 1864, aperçues aux Etats-Unis, et sur la détermination de la hauteur des aurores boréales. Lettre de M. **H.-A. Newton** à M. **Ad. Quetelet**. p. 529. — Sur les derniers orages; par M. **Ad. Quetelet**. p. 535. — Détermination géométrique de la série des surfaces de révolution sur lesquelles peut s'appliquer un hélicoïde; par M. **Lamarle**. p. 537.

ELENCO
DELLE PRODUZIONI SCIENTIFICHE
DI
BARNABA TORTOLINI *)
PROFESSORE DI CALCOLO SUBLIME ALL'UNIVERSITA ROMANA:
UNO DEI QUARANTA DELLA SOCIETA ITALIANA DELLE SCIENZE EC. EC.

---

1. Elementi di Calcolo infinitesimale. Tom. I. Calcolo differenziale: vol. in 8. di pag. 622. Roma 1844. Tipografia delle Belle Arti.

*) Dieses Verzeichniss der sämmtlichen bis jetzt (1865) publicirten grösseren Werke und einzelnen Abhandlungen des berühmten **Herausgebers** der „**Annali di Matematica pura ed applicata**" mit genauer Angabe der Schriften, wo sich dieselben finden, werde ich den Lesern des Archivs, meinem im Literar. Ber. Nr. CLXXIV. S. 4. gegebenen Versprechen gemäss, in einigen der nächsten Nummern des Literar. Ber. mittheilen, da dasselbe in eine Nummer aufzunehmen, nicht wohl möglich ist, weil es zu grossen Raum beanspruchen würde.

Memorie e Note inserite nel Giornale Arcadico di Roma dal 1833 *al* 1850.

2. Determinazione dell' integrali di alcune formole differenziali si algebriche, che trascendenti: in 8. tom. LVI. 1833.
3. Teoria analitica delle superficie generate dal moto di una linea: in 8. tom. LVII. 1833.
4. Ricerche sopra alcuni punti di geometria analitica: in 8. tom. LIX. 1834.
5. Analisi sopra alcune questioni di Fisica-Matematica: in 8. tom. LXII. 1834.
6. Trattato del Calcolo dei Residui: in 8. Memoria prima tom. LXIII. 1834 e 1835.
7. Sul Calcolo dei Residui Memoria seconda: in 8. tom. LXVII. 1836.
8. Sopra un Corso di Matematiche intitolato *Elementa Matheseos* auctore Andrea Caraffa e Soc. Jesu. Articolo Bibliografico: in 8. tom. LXXIII. 1838.
9. Memoria sulla quadratura dell' ellissoide a tre assi ineguali: in 8. tom. LXXVIII. 1839.
10. Memoria sopra alcune applicazioni del metodo inverso delle tangenti: in 8. tom. LXXIX. 1839.
11. Memoria sopra le trasformazioni, e valori di alcuni integrali definiti, che si riferiscono alle superficie, e solidità dei volumi: in 8. tom. LXXX. 1839.
12. Seconda Memoria. Sopra la trasformazione, e valori di alcuni integrali definiti, ... in 8. tom. LXXXII. 1840.
13. Memoria sui limiti di alcune espressioni immaginarie: in 8. tom. LXXXVII. 1840.
14. Memoria sull' applicazione del calcolo dei Residui all' integrazione dell' equazioni lineari a differenze finite: in 8. tom. XC. 1842.
15. Seconda Memoria sull' applicazione del calcolo dei Residui all' integrazione dell' equazioni lineari a differenze finite: in 8. tom. XCI. 1842.
16. Memoria sull' applicazione del calcolo dei Residui all' integrazione dell' equazioni differenziali lineari: in 8. tom. XCII. 1842.
17. Memoria sull' applicazione del calcolo dei Residui all' integrazione dell' equazioni lineari a derivate parziali: in 8. tom. XCIII. 1842.

18. Seconda Memoria sull' applicazione del calcolo dei Residui all' integrazione dell' equazioni lineari a derivate parziali: in 8. tom. XCIV, e XCV. 1843.
19. Nota sul passaggio dall' integrali dell' equazioni a differenze finite all' integrali dell' equazioni differenziali: in 8. tom. XCVII. 1843.
20. Rappresentazione geometrica delle funzioni ellittiche di terza specie di dato parametro circolore: in 8. tom. C. 1844.
21. Memoria sopra la rettificazione di alcune curve piane: in 8. tom. CV. 1845.
22. Memoria sopra la rettificazione dell ellisse sferica e sulla divisione de' suoi archi: in 8 tom. CIX. 1846.
23. Memoria sopra alcune superficie curve derivate da una data superficie, e di genere concoidale: in 8. tom. CXIII. 1847.
24. Memoria sulla riduzione di alcuni integrali definiti ai trascendenti ellittici, ed applicazione a differenti problemi di geometria, e di Meccanica razionale: in 8. tom. CXVI. 1848.
25. Nota sopra le superficie curve parallele all' ellissoide, e sull' espressione generale della loro quadratura: in 8. tom. CXIX. 1850.

(Fortsetzung folgt.)

Druckfehler.

Im Literar. Ber. Nr. CLXXIV. S. 10 (im 2ten Hefte dieses Theils) muss es in der Unterschrift des „Programme pour le prix Carpi“ statt „N. Cavaliere San Bertolo“ heissen: „N. Cavalieri San Bertolo“.

Literarischer Bericht
CLXXVI.

Geschichte der Mathematik.

A History of the mathematical Theory of Probability, from the time of Pascal to that of Laplace. By I. Todhunter, M. A., F. R. S. Cambridge and London: Macmillan and Co. 1865. 8°.

Der Herr Verfasser dieser Geschichte der mathematischen Wahrscheinlichkeitsrechnung hat sich schon durch seine im Literarischen Ber. Nr. CXLIV. S. 1. angezeigte schöne Geschichte der Variationsrechnung um die Geschichte der mathematischen Wissenschaften sehr verdient gemacht, und erwirbt sich durch das vorliegende Werk ein neues sehr anzuerkennendes Verdienst auf diesem Gebiete. Das XVI und 624 Seiten starke, äusserlich trefflichst ausgestattete Werk ist mit sehr grosser Gelehrsamkeit und einer tief eingehenden Kenntniss aller in demselben besprochenen Werke über die Wahrscheinlichkeitsrechnung verfasst, wie die vielen aus diesen Werken gegebenen, oft ziemlich ausführlichen Auszüge, welche immer ein sehr deutliches Bild von dem Inhalte und der wissenschaftlichen Bedeutung dieser Werke liefern, und die Lectüre dieser Geschichte der Wahrscheinlichkeit zu einer höchst interessanten und überaus lehrreichen machen, am besten bekunden. Seinem Zwecke gemäss hat sich der Herr Verfasser für jetzt, wie auch der Titel besagt, auf die Zeit von **Pascal** bis **Laplace** beschränkt, so dass also die neueren wichtigen Arbeiten von **Gauss**, **Airy** (**On the algebraical and numerical Theory of errors of observations and the combination of observations.** **Cambridge, London 1861**) u. A. hier unberücksichtigt geblieben sind und bleiben mussten, wenn dieselben auch theilweise beiläufig Erwähnung gefunden haben. Ueberhaupt besteht das Werk aus zwanzig Kapiteln,

welche die folgenden Ueberschriften haben: I. Cardan. Kepler. Galileo. II. Pascal and Fermat. III. Huygens. IV. On Combinations. V. Mortality and Life Insurance. VI. Miscellaneous Investigations between the years 1670 and 1700. VII. James Bernoulli. VIII. Montmort. IX. De Moivre. X. Miscellaneous Investigations between the years 1700 and 1750. XI. Daniel Bernoulli. XII. Euler. XIII. D'Alembert. XIV. Bayes. XV. Lagrange. XVI. Miscellaneous Investigations between the years 1750 and 1780. XVII. Condorcet. XVIII. Trembley. XIX. Miscellaneous Investigations between the years 1780 and 1800. XX. Laplace. Appendix (John de Witt. Rizzetti. Kahle. S'Gravesande. Quotation from John Bernoulli. Mendelsohn. Lhuilier. Waring), aus welcher Aufzählung man die grosse Vollständigkeit des Werkes erkennen wird. Indem wir nochmals mit besonderer Freude das grosse Interesse bekennen, mit welchem wir das schöne Werk gelesen haben und dasselbe dringend der Beachtung unserer Leser empfehlen, können wir nicht umhin, den Wunsch auszusprechen, dass es dem Herrn Verfasser recht bald gefallen möge, seine treffliche Arbeit bis auf die neueste Zeit fortzuführen, wo dann namentlich auch, um uns kurz auszudrücken, die Methode der kleinsten Quadrate und was damit Alles in näherem oder entfernterem Zusammenhange steht, eine ausführliche *Besprechung finden* wird und muss.

Arithmetik.

Intorno alla formazione ed integrazione d'alcune equazioni differenziali nella teorica delle funzioni ellittiche; per Angelo Genocchi. Torino. *Stamperia* Reale. 1865. 4°.

Herr Professor A. Genocchi in Turin hat schon durch viele wichtige Untersuchungen sich um die Theorie der elliptischen Functionen und die Analysis überhaupt grosse Verdienste erworben und fügt diesen Verdiensten durch die vorliegende schöne Abhandlung, von welcher wir mit grossem Interesse nähere Kenntniss genommen haben und auf die wir unsere Leser recht sehr aufmerksam machen, ein neues hinzu. Zugleich hat derselbe in sehr anerkennungswerther Weise sich in der Einleitung über den Zweck und die Resultate seiner Abhandlung so deutlich und ausführlich ausgesprochen, dass wir glauben, durch eine ziemlich vollständige Mittheilung dieser Einleitung unsere Leser am Besten, Genauesten und Sichersten von der Wichtigkeit dieser

Abhandlung überzeugen und denselben eine deutliche, von allen Missverständnissen freie Einsicht in deren Inhalt und Tendenz verschaffen zu können. Herr Genocchi spricht sich nämlich folgendermaassen über den Zweck seiner Untersuchungen und die durch dieselben gewonnenen Resultate aus:

„L'illustre Jacobi, dopo aver trovato il suo celebre teorema per la trasformazione delle funzioni ellittiche, diede alcune equazioni a differenziali ordinari e a differenziali parziali che facilitano grandemente il calcolo effettivo del numeratore e del denominatore della funzione trasformata, e quello delle equazioni da cui dipende il nuovo modulo ed il moltiplicatore. A quelle equazioni differenziali egli giunse mediante le formole e relazioni somministrate dal mentovato suo teorema, e quindi coll'aiuto della *dottrina* da lui detta *analitica* della trasformazione, che si fonda nelle formole di addizione e nel principio del doppio periodo; e quantunque altri Matematici abbiano poi dedotta da *principii* meramente *algebrici* le equazioni a differenziali ordinarii pel numeratore e denominatore della funzione trasformata, restava che il simigliante si facesse rispetto alle altre equazioni sopra indicate, il che mi è parso argomento di qualche interesse, ora specialmente che la dottrina algebrica della trasformazione ha chiamata a sè l'attenzione dei geometri per essersi ricavata da essa la risoluzione generale delle equazioni di quinto grado. Di ciò mi sono occupato nello scritto che ho l'onore di presentare al-l'Accademia; e dopo avere stabilite in modo assai semplice le equazioni a differenziali ordinari testè accennate, ne trovo l'integrale completo che Jacobi non ha dato e mostrò desiderare che fosse trovato; indi da questo integrale completo, senza ricorrere ad altri principii per cui si ammette una certa relazione fra i trascendenti ellittici completi di prima specie, traggo l'equazione a differenziali parziali che determina gli stessi numeratore e denominatore; ottengo nel medesimo tempo la notabile espressione del moltiplicatore per mezzo del modulo primitivo, del modulo trasformato e dei loro differenziali, e l'equazione differenziale di terzo ordine tra quei due moduli; e portasi l'occasione, correggo alcune formole di Jacobi; e trovo pure gl'integrali completi di siffatte equazioni. Le considerazioni e i calcoli che espongo presentano un'applicazione del metodo, che può dirsi iniziato da Abel e che fu promosso particolarmente dai signori Liouville e Tchebicheff, per determinare i casi in cui un'integrazione può effettuarsi sotto una data forma algebrica o trascendente, razionale o irrazionale; e in ispecial modo dimostro e applico un teorema generale pel quale dovendosi ridurre ad un'identità ogni equazione

algebrica fra certe funzioni trascendenti, ne derivano utili relazioni fra le altre quantità in essa comprese.

Ottengo inoltre le funzioni che sogliousi chiamare *Jacobiane*, espresse mediante un integrale duplicato, e l'equazione semplicissima a differenziali parziali di primo e second'ordine, alla quale debbono soddisfare, usando, per giungere a questa equazione, una trasformazione che può servire alla riduzione d'altre equazioni consimili ove siano adempiute certe determinate condizioni. Dalle stesse formole discendono le espressioni del numeratore e del denominatore dianzi mentovate, formate col mezzo delle Jacobiane.

Finalmente indico l'uso delle equazioni a differenziali ordinari che appartengono agli stessi numeratore e denominatore, per determinare i coefficienti di queste funzioni, e ne deduco una verificazione semplice e facile delle formole analitiche della trasformazione.

Tali sono gli argomenti esposti nel presente scritto; a trattare i quali confesso avermi spinto, non ultima causa, il pensare che forse metodi simili a quelli che ho qui seguiti, possano giovare nello studio di funzioni trascendenti d'un ordine più elevato."

Indem wir unsere völlige Uebereinstimmung mit den *letzten* Worten, namentlich auch mit der darin ausgesprochenen *Erwartung*, in vorhergehender Mittheilung aussprechen, empfehlen wir die Abhandlung nochmals zur sorgfältigsten Beachtung.

Studi intorno ai casi d'integrazione sotto forma finita. Memoria di Angelo Genocchi. Torino. Stamperia Reale. 1865. 4°.

Von nicht minderer Wichtigkeit für die Integralrechnung als die vorhergehende ist die vorliegende neuere Abhandlung des von uns hochgeehrten Herrn Verfassers, und wir halten es eben durch diese Wichtigkeit vollkommen gerechtfertigt, dass wir, wenn auch dadurch ein ziemlich grosser Raum beansprucht wird, die Einleitung, in welcher der Herr Verfasser sich auch hier sehr vollständig und sehr deutlich über den Zweck und den Inhalt seiner Abhandlung ausgesprochen hat, unseren Lesern nachstehend vollständig mittheilen, weil dadurch auch am Besten vollkommene Deutlichkeit erzielt und Missverständnisse, die auf anderen Wegen bei Referaten über Arbeiten dieser Art zu leicht möglich sind, vollkommen vermieden werden. Der Herr Verfasser sagt p. 3.—p. 6:

„I metodi usati per l'ordinario nel calcolo integrale consistono in artifizi più o meno ingegnosi, diretti ad ottenere una trasformazione che renda più facile l'integrazione, e quando non conducono all'integrale desiderato, lasciano dubbia la possibilità di

esprimerlo mediante funzioni note, onde in tal caso la questione non procede d'un passo. Quindi il Poisson considerava come un vero complemento dei metodi del calcolo integrale quelle proposizioni negative con cui si dimostrasse l'impossibilità dell'integrazione esatta: „car (egli dice) ce qu'on peut demander c'est d'obtenir les intégrales quand'elles existent, ou de s'assurer rigoureusement qu'elles n'existent pas [1]).“ A ciò mirava anche l'Abel quando all'analisi e particolarmente al calcolo integrale proponeva una nuova via nelle ricerche: „Au lieu de demander une relation dont on ne sait pas si elle existe ou non, il faut demander si une telle relation est en effet possible. Par exemple, dans le calcul intégral, au lieu de chercher, à l'aide d'une espèce de tâtonnement et de divination, d'intégrer les formules différentielles, il faut plutôt chercher s'il est possible, de les intégrer de telle ou telle manière. En présentant un problème de cette manière l'énoncé même contient le germe de la solution et montre la route qu'il faut prendre; et je crois qu'il y aura peu de cas où l'on ne parviendrait à des propositions plus ou moins importantes, dans le cas même où l'on ne saurait répondre complétement à la question à cause de la complication des calculs [2]).“ Questo metodo che solo pare atto a contribuire ai progressi e al perfezionamento del calcolo integrale è il solo *scientifico*, come aggiunge lo stesso Abel: „parce qu'elle est la seule dont on sait d'avance qu'elle peut conduire au but proposé.“ Anche Jacobi raccomandava un siffatto genere di ricerche in un caso particolare, cioè rispetto alla determinazione delle soluzioni algebriche d'un'equazione differenziale: *materiem arduam* (esso affermava) *attentione analystarum dignam* [3]).

Ma poco finora si esercitarono in questo nuovo campo i Matematici, distolti probabilmente dalla grande complicazione de' calcoli, la quale nondimeno Abel attesta essere in molti casi solo apparente e non impedire la scoperta di utili teoremi. Dopo Condorcet citato da Jacobi, e Laplace mentovato da Poisson, voglionsi principalmente ricordare Abel e il signor Liouville come coloro cui sono dovuti i più importanti lavori, nè si debbono ommettere le più recenti speculazioni del sig. Tchebichef [4]), quelle dei signori Briot e Bouquet per ciò che spetta alle equazioni integrabili mediante le funzioni ellittiche [5]), e quanto

---

1) Rapport à l'Académie des Sciences sur deux Mémoires de M. Liouville; Crelle, tom. X, pag. 342. — 2) Abel, Oeuvres, tom. II, pag. 185. — 3) Fund. Nova theoriae funct. elliptic., pag. 81. — 4) Journal de Liouville, 1853 e 1857. — 5) Théorie des fonct. doubl. périod., 1859, p. 285—342.

agl' italiani una Memoria del Prof. Mainardi sopra l'integrazione di funzioni contenenti un radicale cubico [1], e altre del Profess. Casorati e del giovine geometra genovese signor Carlo Piuma [2].

Ebbi a fare alcuni studi intorno all' indicato argomento in occasione delle lezioni di *Analisi superiore* di cui era incaricato in questa illustre Università, e diedi un primo estratto di tali studi in una Memoria circa le equazioni differenziali, a cui conduce la trasformazione delle funzioni ellittiche [3]. In questo secondo estratto che oggi ho l'onore di presentare, seguendo il sig. Liouville cerco i casi d'integrazione sotto forma finita d'una classe d'equazioni differenziali e specialmente dell'equazione del Riccati. In una Memoria presentata all'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Francia il Liouville diede una regola da cui risulta che quell'equazione non è integrabile se non nei casi nei quali già si sapeva trovarne l'integrale in termini finiti [4], e la sua dimostrazione fu tenuta per soddisfacente dagli annalisti e in ispecie dal sig. Malmstèn che applicò la regola del Liouville ad un'equazione apparentemente più generale, e dal Prof. Brioschi che dimostrò una siffatta applicazione [5]. Ma nondimeno esaminandola attentamente si trová ch'essa non è del tutto rigorosa e compiuta nella parte che si riferisce all'integrazione meramente algebrica; per la qual cosa stimo far opera non discara agli amatori del rigore matematico ripigliando l'argomento per esporre un'altra dimostrazione che reputo esente da ogni difficoltà, e nella quale mi valgo di sostituzioni già usate da gran tempo per l'effettiva integrazione della stessa equazione del Riccati. Avrò così obbedito ai precetti e imitato gli esempi del medesimo Liouville che credette non inutile di sostituire altre prove a certi ragionamenti di Leibnizio e Laplace per dimostrar teoremi di simigliante natura, e insegnò che „une rigueur absolue est indispensable dans ces recherches qui ont quelque rapport avec la théorie des nombres [6]."

Del resto i principii a cui ricorro sono i medesimi che propose il sig. Liouville a più riprese per lo studio di tali questioni [7], e che formano un metodo ingegnoso e notabilissimo da non abbandonarsi del tutto, sebbene le nuove teoriche intorno alle funzioni di variabili immaginarie abbiano aperte altre vie, poichè,

---

1) Venezia 1846 (Mem. dell'Istituto Veneto). — 2) Annali del Prof. Tortolini, Roma, 1856 e 1861. — 3) Presentata all'Accademia il 14 febbraio 1864. (s. vorher.) — 4) Comptes rendus de l'Acad. des Sciences, tom. XI, pag. 729. Journal de Mathém. 1841, p. 1—13. — 5) Annali del Prof. Tortolini, 1851; Crelle, tom 39, p. 110. — 6) Mémoires de l'Institut, Savans étrangers, 1838, pag. 98. — 7) Journal de Mathém., 1839, pag. 423; 1840, pag. 441; 1841, pag. 1.

se non erro, può ancora esser utile in ricerche particolari. Ho creduto anzi di esporre compiutamente i principii or accennati si per la integrità della dimostrazione, e si per dedurne conseguenze alquanto più ampie di quelle che ne ha tratte e delle quali ha avuto bisogno il sig. Liouville.

Ho pur applicato gli stessi principii agl'integrali Besseliani e a quelli che si dicono *trinomii*, e comprendono gl'integrali ellittici di prima e seconda specie e la somma d'una celebre serie ipergeometrica; e ho finito con alcuni teoremi generali intorno all'integrazione delle equazioni differenziali lineari [1]."

Wir wünschen sehr, dass diese neuen analytischen Arbeiten des Herrn Verfassers, in denen sich namentlich auch ein höchst anerkennungswerthes Streben nach analytischer Strenge, wodurch die Integralrechnung nur allein zu einer wahren Wissenschaft erhoben werden kann, kund giebt, die so sehr verdiente Beachtung auch in Deutschland in vollkommenstem Maasse finden mögen.

Physik.

Lehrbuch der Physik für Schule und Haus. Von Dr. Heinrich Bolze. Zweite vermehrte und verbesserte Auflage. Cottbus. Albert Heine. 1865. 8°.

Dieses in zweiter, vermehrter und verbesserter Auflage vor uns liegende Lehrbuch der Physik, welches sich über das ganze Gebiet der Wissenschaft und auch über die Grundlehren der Chemie verbreitet, ist mit grosser Deutlichkeit verfasst und hat sich bei besonnener Auswahl des Stoffs mit Recht auf das beschränkt, was in der Physik als ausgemacht und Zweifeln nicht unterworfen betrachtet werden darf. Namentlich in dem mechanischen Theile hat auch die elementare Mathematik eine zweckmässige Anwendung gefunden, die wir nur billigen können und deshalb auch wünschen möchten, dass auch in der Optik, namentlich in der Lehre von den Spiegeln und Linsen, die Anwendung der Mathematik sich noch mehr geltend gemacht hätte. Jedenfalls scheint dieses Büchlein Jedem, der sich ohne grosse mathematische Vorkenntnisse eine gründliche Kenntniss von den Hauptlehren der Physik verschaffen will, und auch als Lehrbuch für den Unterricht auf Schulen empfohlen werden zu dürfen.

---

1) Non ho fatta menzione d'una Memoria del P. Pepin pubblicata negli Annali del Professore Tortolini, 1863, perchè venne a mia notizia soltanto dopo che questi studi erano terminati.

ELENCO
DELLE PRODUZIONI SCIENTIFICHE
DI
BARNABA TORTOLINI,

PROFESSORE DI CALCOLO SUBLIME ALL'UNIVERSITA ROMANA:
UNO DEI QUARANTA DELLA SOCIETA ITALIANA DELLE SCIENZE EC. EC.

(Fortsetzung von Literar. Ber. No. CLXXV. S. 14.)

Memorie e Note inserite nell' Opera intitolata: ***Raccolta di lettere, ed altri scritti intorno alla Fisica ed alle Matematiche***, *compilata dal* **Dr. Clemente Palomba**, *dal* **Dr. Ignazio Cugnoni** *e da* **Barnaba Tortolini**: *vol.* 5. *in* 8. *Roma* 1845—1849.

26. Lettera ai Redattori, Sulla quadratura delle superficie curve, e cubatura de solidi: in 8. tom. 1. 1845.
27. Nota sopra differenti proprietà di alcune curve piane del quart' ordine: in 8. tom. 1. 1845.
28. Nota sopra l'equazione di una curva del sesto ordine, che s'incontra in un problema riguardante l'ellisse: in 8, tom. 2. 1846.
29. Soluzione di un problema relativo all' ellissoide: in 8. tom. 2. 1846.
30. Nota sopra la quadratura della superficie, Inviluppo dei piani perpendicolari condotti all' estremità dei diametri di un' ellissoide data: in 8. tom. 2. 1846.
31. Nota sopra l' equazioni, e proprietà di una curva piana luogo geometrico dei piedi delle perpendicolari abbassate da un punto fisso sopra le tangenti di una curva data: in 8. tom. 3. 1847.
32. Nota sulla quadratura di una certa superficie curva: in 8. tom. 4. 1848.
33. Nota sull' equazione e rettificazione della curva piana luogo geometrico di un punto, dal quale se si conducono due tangenti a due circoli dati di egual raggio, il loro prodotto sia costante: in 8. tom. 4. 1848.
34. Nota sull' equazione della curva piana luogo geometrico di un punto tale, dal quale condotte due tangenti ad un' ellisse data l' angolo delle medesime sia costante: in 8. tom. 4. 1848.
35. Nota sul movimento dei projetti nell aria: in 8. tom. 5. 1849.
36. Sulla quadratura di alcune curve sferiche provenienti dall' intersezione di un cono, e di una sfera concentrica. Estratto: in 8. tom. 5. 1849.
37. Applicazione dei trascendenti ellittici alla risoluzione di alcuni problemi riguardanti le attrazioni dei corpi: in 8. tom. 5. 1849.

(Fortsetzung folgt.)

Taf. X

Fig. 7.

Fig. 11.

Fig. 15.

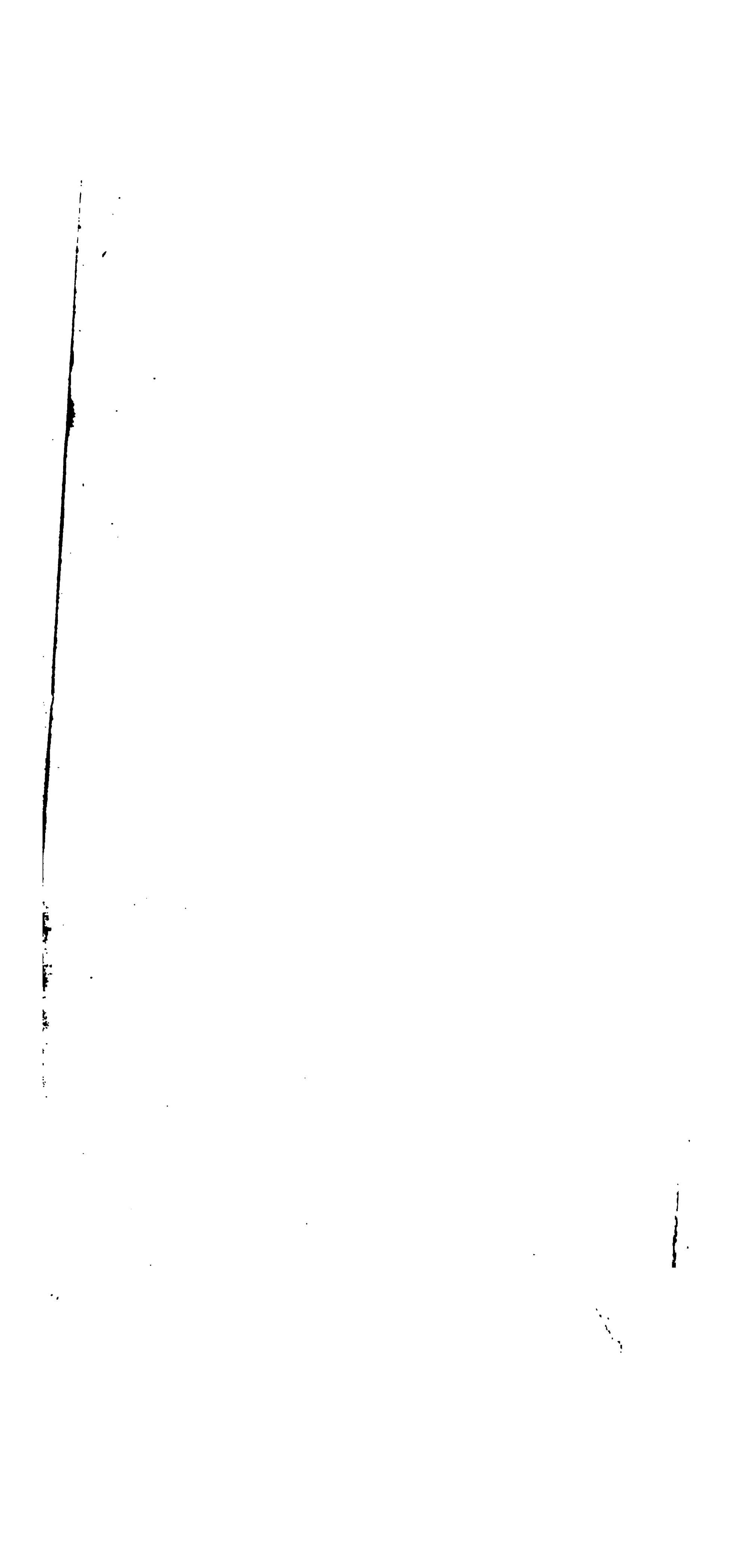


Fig. 22.

Fig.

Fig. 20.

Fig. 23.

Fig. 27.

Fig. 31.

Fig. 35.

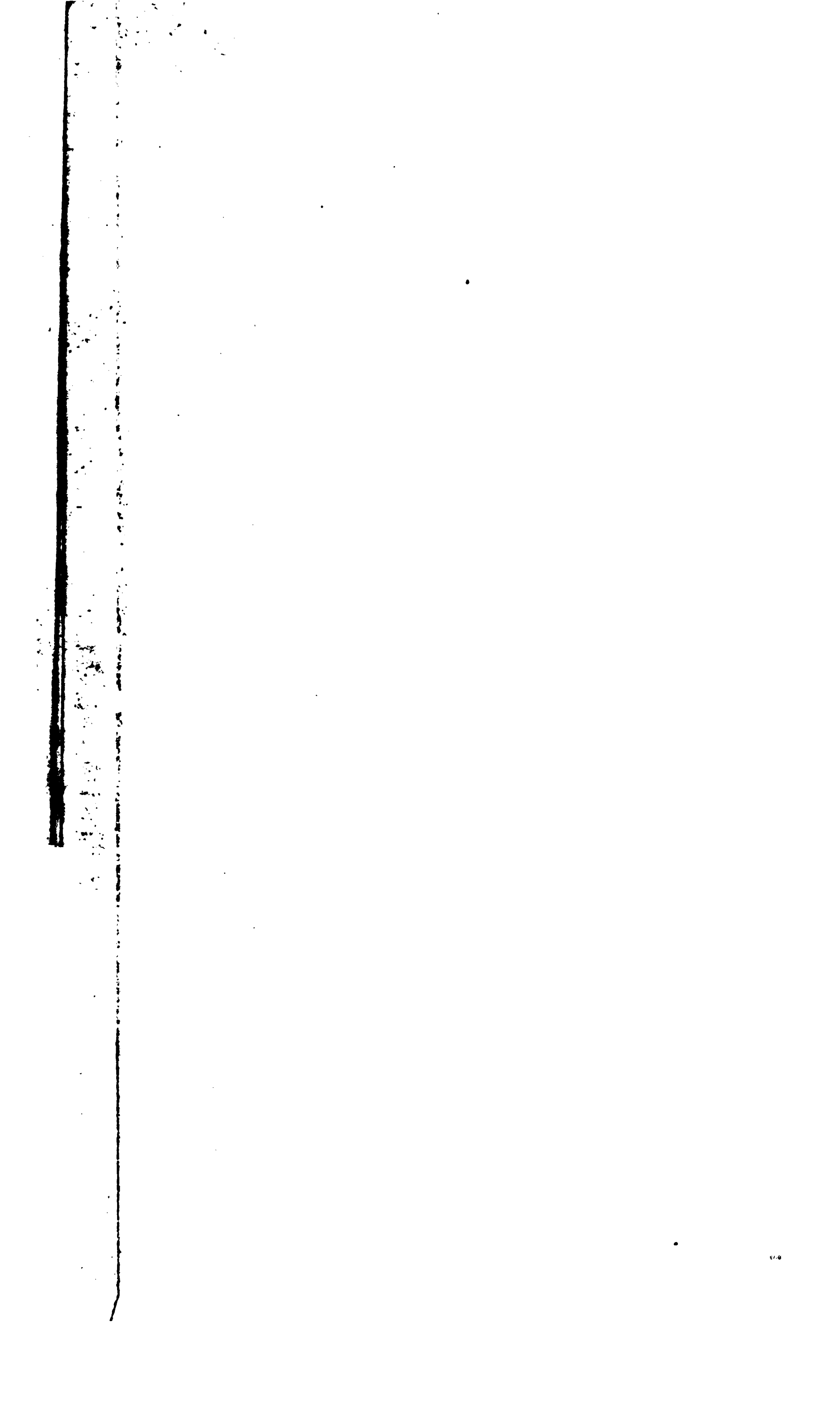
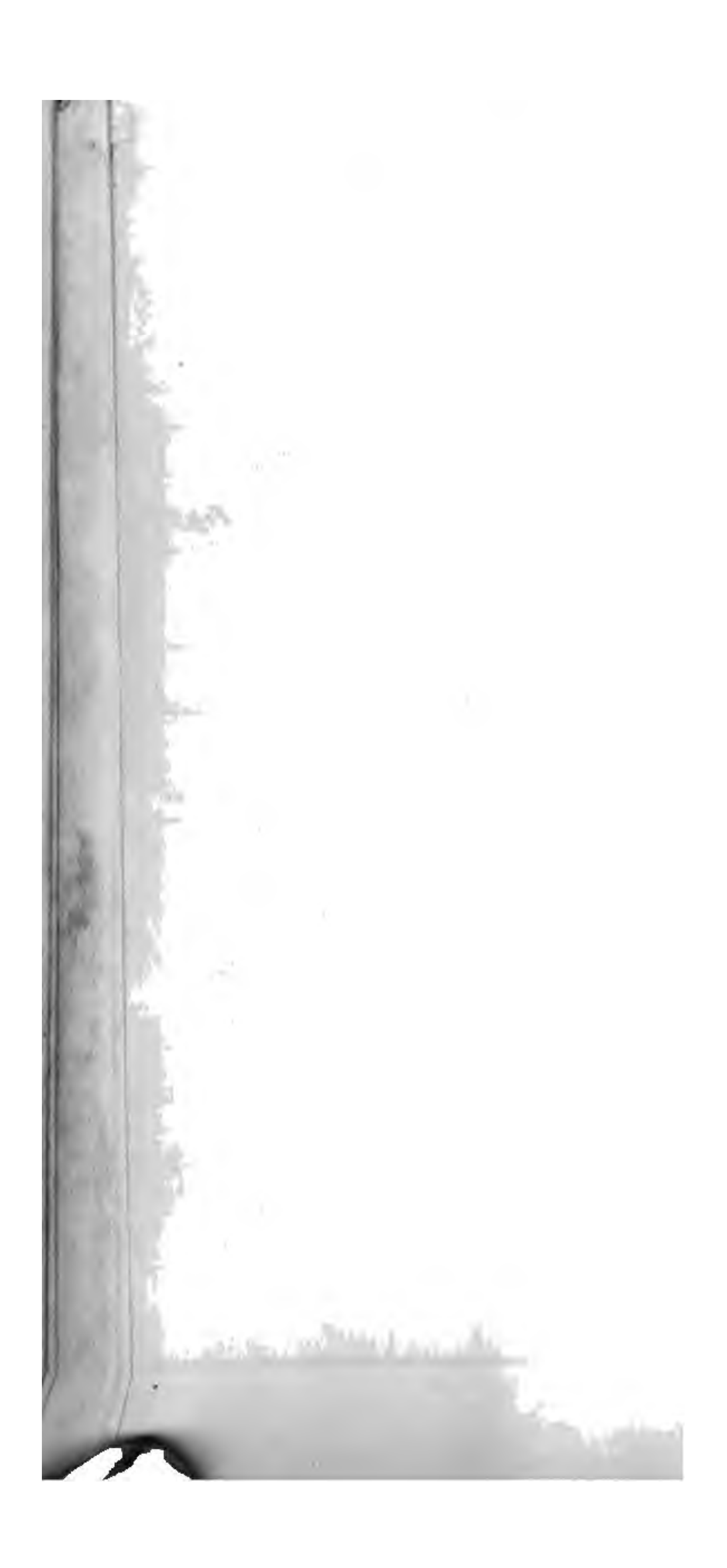
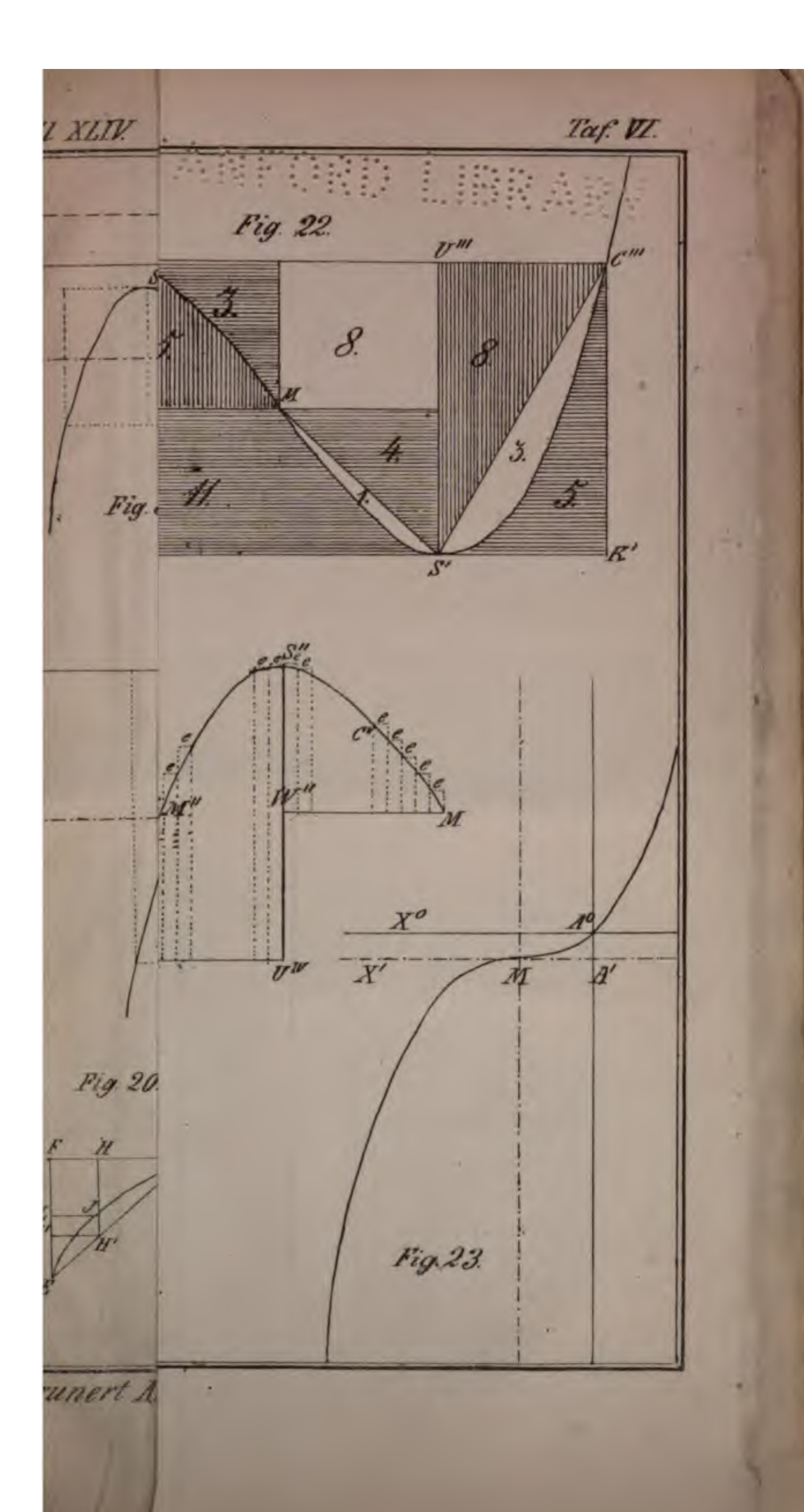


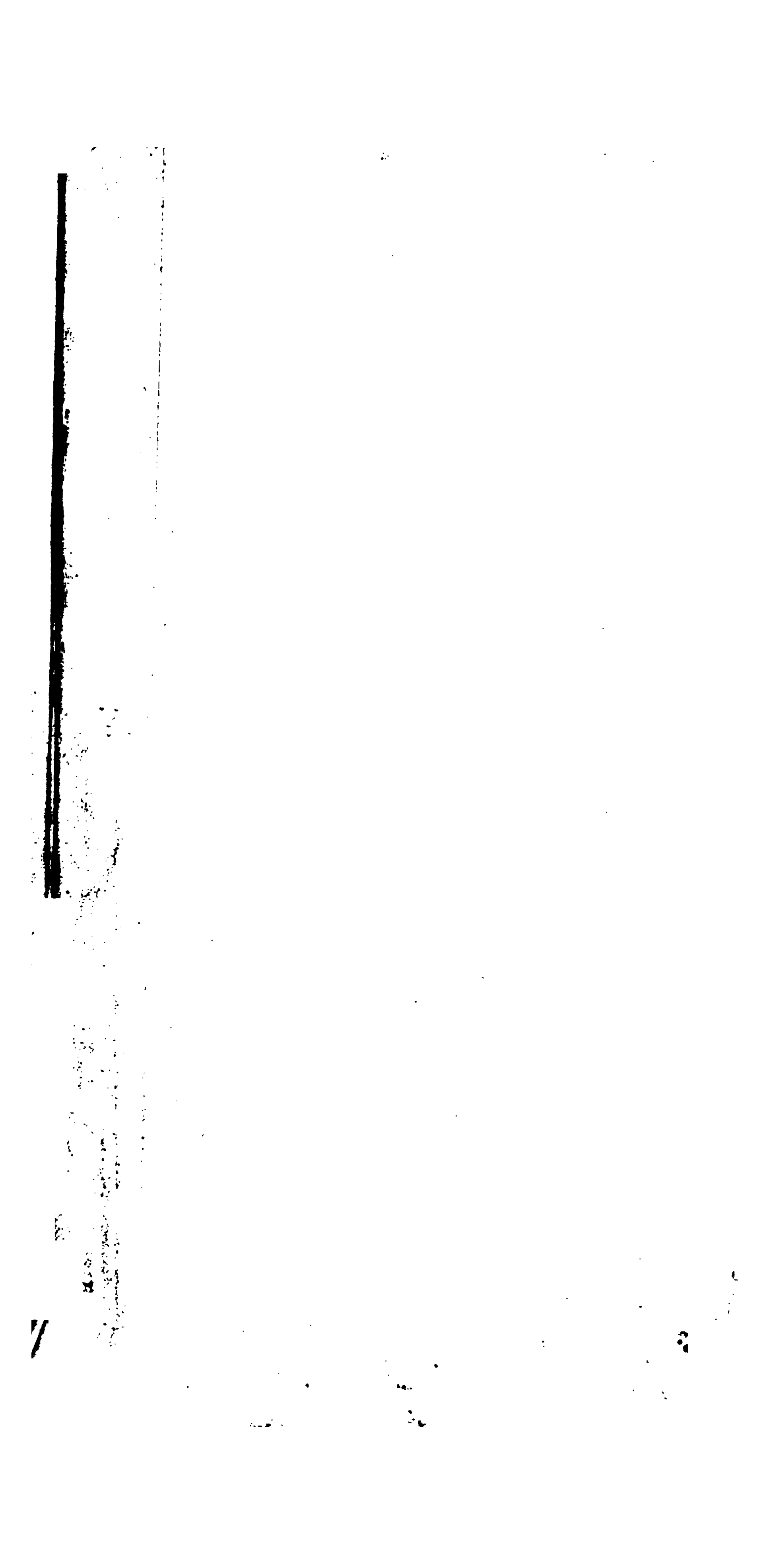
Fig. 7.

Fig. 11.

Fig. 15.




Fig. 22.
Fig. 20.
Fig. 23.
X°
X'
M
A'



X° C
X′
X C‴ C″ B A C
X° A°
M A′
Fig. 27.

X° A°
A′ A′
M
X C′ B C″ C‴ A
A
Fig. 31.

A′
X° M A°
X C B A C′ C‴
C
Fig. 35.


STORAGE AREA



